Міністерство освіти і науки України

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»

Кафедра математики факультету інформатики

Фрактальність у дослідженнях фінансового ринку

Курсова робота за спеціальністю „Прикладна математика” 113

Керівник курсової роботи

к.ф-м.н., доц. Щестюк Н.Ю.

_____

(підпис)

“____” _____ 2020 р.

Виконала студентка Паук В.М.

“____” _____

2020 р.

Київ 2020

Міністерство освіти і науки України

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»

Кафедра інформатики факультету інформатики

ЗАТВЕРДЖУЮ

Зав.кафедри математики,

Доцент, д. ф.-м. н. Б.В. Олійник

_____

(підпис)

“____”_____2020 р.

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ

на курсову роботу

студентці Паук Вікторії Михайлівні

факультету інформатики 4-го курсу

Тема: Фрактальність у дослідженнях фінансового ринку

1. Описати суть стохастичного та хаотичного підходів для опису динамічних систем на фінансовому ринку.
2. Для конкретних фінансових даних розраховувати показник Херста (показник фрактальної розмірності) для розрізнення стохастичної і хаотичної природи фінансових часових рядів за допомогою R/S аналізу.
3. Фрактальний аналіз для визначення самоподібності.
4. Зробити висновок

Дата видачі „____”_____ 2019 р.

Керівник _____

(підпис)

Завдання отримав _____

(підпис)

Тема: Фрактальність у дослідженнях фінансового ринку

Календарний план виконання роботи:

№ п/п	Назва етапу дипломного проекту (роботи)	Термін виконання етапу	Примітка

1.	Отримання завдання на курсову роботу.	11.10.2019	
2.	Огляд технічної літератури за темою роботи.	22.12.2019	
3.	Програмування практичної частини	25.01.2020	
4.	Написання пояснювальної роботи.	17.02.2020	
6.	Створення слайдів для доповіді та написання доповіді.	4.04.2020	
8.	Корегування роботи.	9.04.2020	
8.	Остаточне оформлення пояснювальної роботи та слайдів.	17.04.2020	
10.	Здача курсової роботи	19.04.2020	

Студент _____

Керівник _____

“_____”_____

Зміст

Вступ…….……5

Стохастичний та хаотичний підхід для опису динамічних систем на фінансовому ринку……...7

Показник Херста……...9

Фрактальний аналіз для визначення самоподібності……16

Висновок…….18

Джерела……...…...19

Додаток……...21

Вступ

Моделювання процесів існувало ще задовго до появи ЕОМ, але з винаходом комп'ютера набрало більшого розмаху, актуальності та можливостей. Наразі в світі з'явився потужний вибір інструментів для дослідження динамічних систем, в тому числі і для економічних.

Для опису динамічних систем застосовується стохастичний підхід, який часто базується на передбаченні рухомого середнього MA. Альтернативним методом є хаотичний підхід.

В цій роботі ми розглянемо проблему конфлікту детермінізму та випадковості, а також дослідимо, як за допомогою R/S аналізу та показника Херста розрізнити стохастичний та хаотичний фінансовий ряд, а також як це пов'язано з фрактальністю.

Метою роботи є вивчення та застосування фрактальності для аналізу, прогнозування та оцінки ступеня стабільності на фінансових ринках.

Робота складається з трьох розділів.

У першому розділі ми описали суть стохастичного та хаотичного підходів для опису динамічних систем на фінансовому ринку.

Другий розділ присвячено розрахунку показника Херста (показника фрактальної розмірності) для розрізнення стохастичної і хаотичної природи фінансових часових рядів за допомогою R/S аналізу на прикладі конкретних фінансових даних.

У третьому розділі розглянули фрактальний аналіз для визначення самоподібності. Показали зв’язок показника Херста із визначенням самоподібності.

Суть стохастичного та хаотичного підходів для опису динамічних систем на фінансовому ринку.

В цьому розділі розглянемо, стохастичні та хаотичні моделі, а також основні поняття, що пригодяться в наступних розділах.

Визначення стохастичності різне, але, зазвичай говорять, що стохастичний процес - це набір випадкових величин, проіндексований деяким набором. Терміни випадковий і стохастичний процес вважаються синонімами, і використовуються, коли незалежна змінна подана у вигляді часу.[6]

Хаотичні системи, як правило, нелінійні системи, що мають незрозумілу, хаотичну поведінку. Такі системи мають відповідати двом основним вимогам:

1. існування фрактальної розмірності
2. існування характеристики, що називається чутливістю до початкових умов.[2]

Стохастичні моделі мають риси хаотичності, оскільки однакові початкові умови можуть призвести до зовсім різних результатів. Детерміновані моделі завжди мають однаковий результат при однакових початкових умовах. Очевидно, що стохастичні моделі краще описують реальні моделі. Проте інколи трапляються моделі, що мають стохастичну поведінку, насправді не будучи такими.

Маючи емпіричні дані, важко розрізнити фрактальний шум від так званого шумного хаосу (“noisy chaos”). Як виявилось, визначення хаосу в експериментальних даних не проста задача. Більшість методів не є надійними з вирішенням проблеми, на відміну від R/S аналізу, що навпаки, широко застосовується в цій області. [2]

Дійснозначний стохастичний процес $\{W(t):\ t \geq 0\}$ називається Броунівським рухом з початком в $x \in \Re$, якщо справджується[7]:

1. $W(0) = x$,
2. процес має незалежний інкремент, тобто для всіх $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n$ майбутні інкременти $W(t_n) - W(t_{n-1}), W(t_{n-1}) - W(t_{n-2}), ..., W(t_2) - W(t_1)$ незалежні випадкові величини
3. має Гаусівські інкременти $W(t+u) - W(t)$, що нормально розподілені з середнім значенням 0 і варіацією u , $W(t+u) - W(t),\ \aleph \sim (0, u)$
4. функція $t \mapsto W(t)$ неперервна
5. $cov(W_t, W_s) = E(W_t W_s) - E(W_t)E(W_s) = E((W_t - W_s + W_s)W_s) - 0 =$

   $= W_s E(W_t - W_s) + E(W_s^2) = 0 + var(W_s) = var(W_s),\ s < t$

6. Самоподібність

$$Law(W_{Tt}) = Law(\sqrt{T}\ W_t),\ t > 0$$

$\sqrt{T} = T^H$, де H показник Херста

В наступному розділі детальніше розберемо особливості показника Херста.

Показник Херста

В цьому розділі на прикладі конкретних фінансових даних розглянемо показник Херста (показник фрактальної розмірності) для розрізнення стохастичної і хаотичної природи фінансових часових рядів за допомогою R/S аналізу.

Показником Херста називають міру нахилу фрактального Броунівського руху[2].

В 1951 році британський кліматолог Г.Херст, що провів більше 60 років в Єгипті, беручи участь в гідрологічних проектах, пов'язаних з дослідженням Нілу, опублікував роботу, в якій розповідає про неочікуваний ефект в поведінці флуктуацій річних вод Нілу і інших рік. [4] Він визначив, що показник H приблизно дорівнює 0,7, при очікуваних 0,5.

Показник Херста несе багато інформації про ряд. Наприклад:

- персистентність
- існування періодичних циклів
- кластерність
- фрактальність
- антиперсистеність
- визначає вид шуму (стохастичний чи хаотичний)
- сильну пам'ять

Алгоритм розрахунку показника Херста:

Нехай маємо деякий часовий ряд $t_1,\ t_2, \dots, t_k$ довжини K. A- деяка додатня константа, яку Херст розрахував емпірично і яка рівна 0,5. Але ця константа була розрахована для короткострокових рядів, тому інколи замість константи A підставляють значення $\frac{\pi}{2}$.

1. Перетворюємо ряд шляхом логарифмування. Отримуємо ряд довжини N=K-1

$$x_i = log(t_{i+1}/t_1),\ i = 1, 2,\ \dots, K-1$$

2. Знаходимо середнє значення

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i$$

3. Рахуємо середньоквадратичне відхилення

$$S = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2}$$

4. Знаходимо кумулятивне відхилення від середнього значення

$$Z_j = \sum_{j=1}^{J} (x_i - \bar{x})$$

5. Шукаємо максимальне і мінімальне значення

$$min\{Z_j\},\ max\{Z_j\},\ \text{де}\ \ j < N$$

6. Рахуємо розмах R кумулятивного відхилення

$$R = min\{Z_j\} - max\{Z_j\}, \text{ де } j < N$$

7. Нормуємо розмах R/S
8. Логарифмуємо R/S та AN
9. Знаходимо показник Херста за формулою

$$log(R/S) = H\ log(A) + H\ log(N)$$

Побудувавши графік залежності $log(R/S)$ від $log(N)$, як $y = ax + b$ визначаємо H, як тангенс кута нахилу (значення b).

$$H = \frac{log(R/S)}{log(A)+log(N)}$$

Цей алгоритм може бути застосований для рядів з невеликою кількістю досліджень. Для ряду, в якого кількість значень вимірюється тисячами, варто застосувати модифікацію [3]. Для цього розбиваємо ряд на рівних A періодів, довжиною n та визначаємо R/S як середнє значення

$$(R/S)_n = \frac{1}{A}\sum_{j=1}^{A}(R_j/S_j)_n .$$

Для знаходження H будуємо лінійну регресію

$$log(R/S)_n = f(log(n)),$$

тоді показник Херста буде дорівнювати нахилу.

Щоб проаналізувати вплив автокореляційних даних минулого і визначення тенденції майбутнього, використовують міру кореляції: $C = 2^{2H-1} - 1$

Порахувавши H можна визначити тип ряду, якщо:

- 0<H<0,5- є негативний тренд ряду, тобто з часом значення спадають, а також свідчить про відсутність стабільності. Це явище називається “рожевий шум”;
- H=0,5 - значення ряду мають стохастичну природу (дані не мають залежності), що називається “білий шум”;
- 0,5<H<1 - є позитивний тренд ряду, тобто значення зростали в минулому, а отже ймовірно будуть зростати і в майбутньому. Це явище називається “чорний шум”; Ця нерівність дозволяє відкинути гіпотезу, що всі величини є незалежними і гаусівськими.

Інтуїтивно зрозуміло, що віддалене минуле і майбутнє мають бути асимптотично незалежними, але для фрактального шуму існує ненульова кореляція між середнім з T минулих значень і середнім з T майбутніх значень.[2]

Наведемо приклад на щоденних даних GSPC500 з 18 лютого 2019 року до 18 лютого 2020 року. Для розрахунку показника Херста використаємо Python. Такий вигляд мають перші 20 значень:

0	2769.280029
1	2779.050049
2	2780.239990
3	2780.669922
4	2804.350098
5	2792.360107
6	2787.500000
7	2788.110107
8	2798.219971
9	2814.370117
10	2794.409912
11	2790.270020
12	2766.530029
13	2730.790039
14	2747.610107
15	2787.340088
16	2799.780029
17	2810.379883
18	2810.790039
19	2822.610107

рис. 1

Описова статистика:

count	251.000000
mean	2993.371878
std	157.718632
min	2730.790039
25%	2882.050049
50%	2965.520020
75%	3088.344971
max	3378.080078

рис. 2

Побудуємо часовий ряд:

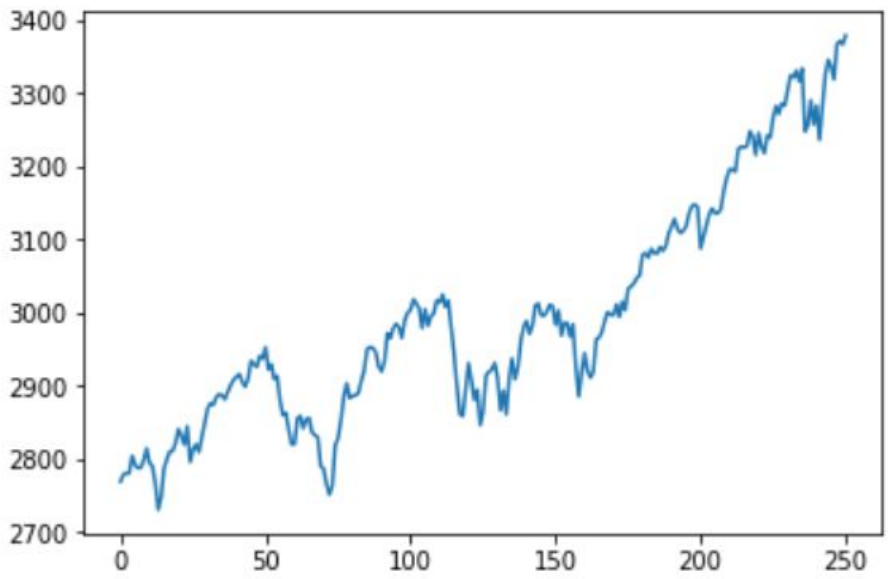

рис.3

На графіку видно тренд, тобто, ймовірно, тенденція зростання буде продовжуватись з часом.

Тепер знайдемо значення показника Херста за допомогою власної імплементації алгоритму.

```
h=hurst(data)
print(h)
```

```
0.5722852899366592
```

рис 4

Знайдемо міру кореляції:

```
c=math.pow(2,2*h-1)-1
print(c)
```

```
0.10540158007545486
```

Отримане значення говорить про те, що маємо “чорний шум”, що найчастіше зустрічається при аналізі фінансового ринку, ряд має тренд і зростає з часом. Даний факт підтверджує графік, зображений на рис 3.

Фрактальний аналіз для визначення самоподібності.

Теорія фракталів з'явилась в 1975 році після публікації статті "Фрактальні об'єкти: форма, випадковість та розмірність" академіка Бенуа Мандельброта (1924 - 2010). Мандельброт прийшов до висновку, що геометрія Евкліда не в змозі пояснити нерегулярність та складність природи, тому розробив нову геометрію природи, що називається фрактальною. [8]

Фрактали не мають точного визначення, але їх описують як об'єкти, які складаються з таких самих об'єктів. Наприклад, трикутник Серпінського або крива Коха.

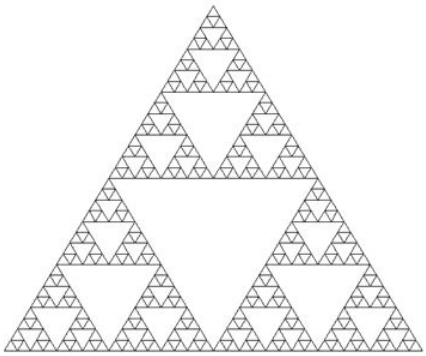

рис.5

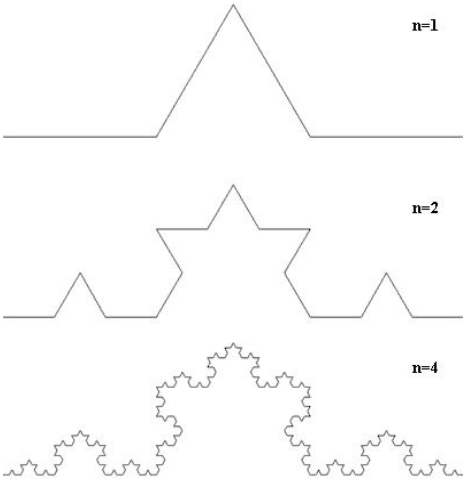

рис.6

Отже, властивістю фракталів є самоподібність.

Означення 1. Випадковий процес $X = (X_t)_{t\geq 0}$ зі значеннями в R^d називається автомодельним (самоподібним) або таким, що задовольняє

властивості автомодельності, якщо для кожного $a > 0$ можна знайти таке $b > 0$, що

$$Law(X_{at}, t \geq 0) = Law(bX_t, t \geq 0) \ . \qquad [4]$$

Знаючи, що для строго нульових стійких процесів існує константа H : $b = a^H$, з означення 1 слідує наступне визначення.

Означення 2. Якщо в означенні 1 покласти $b = a^H$, то випадковий процес $X = (X_t)_{t \geq 0}$ буде називатись автомодельним процесом з показником Харста H.[4]

Для процесів, що не мають властивості самоподібності, цей показник рівний 0,5, а для фрактальних процесів з довготривалою залежністю даний параметр змінюється в межах 0,7…0,9. [9]

Висновок

Отже, в роботі розглянуто фрактальність і як це застосовується в дослідженні часових рядів. Насправді, фрактальність грає велику роль у дослідженні фінансового ринку.

В першому розділі ми визначили різницю між стохастичним та хаотичним процесами, назвали властивості Броунівського руху і визначили зв’язок із самоподібністю та показником Херста.

В другому розділі наведено алгоритм Херста та результати при різних значеннях цього коефіцієнта. Розрахували показник для даних за рік GSPC 500.

В третьому розділі розглянуто фрактальність та властивість самоподібності. Показали, як визначити наявність чи відсутність самоподібності за допомогою показника Херста.

Джерела

1 The (mis)behavior of markets :a fractal view of risk, ruin,and reward / Benoit B. Mandelbrot and Richard L. Hudson.

2 Peters E.E. Fractal Market Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics / E.E. Peters. –New York: Wiley, 1994.

3 Тур Г.І., Трунова О.В. ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ФРАКТАЛЬНОГО АНАЛІЗУ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ТРЕНДОВИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЧИСЛОВИХ РЯДІВ

4 Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики : В 2 т. Т. 1 : Факты, модели. М. : МЦНМО, 2016. 440 с.

мир математики

5 http://geo.phys.spbu.ru/Problems_of_geophysics/2013_2/13_Kiselev_46_2013.pdf

6 https://en.wikipedia.org/wiki/Stochastic_process

7 Sample path properties of Brownian motion by Peter M¨orters (University of Bath) https://www.math-berlin.de/images/stories/lecnotes_moerters.pdf

8 М63 Мир математики: в 40 т. Т. 1: Фернандо Корблан. Золотое сечение. Математический язык красоты. / Пер. с англ. - М.: Де Агостини, 2014 -160 с.

9 Бутакова, Н.А. Москат МОДЕЛИ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННОГО ТРАФИКА В

АВТОМАТИЗИРОВАННЫХ ИНФОРМАЦИОННОУПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМАХ А.Н. Гуда, М.А.

Додаток

```
import math

import pandas as pd

import numpy as np

from hurst import compute_Hc, random_walk

from sklearn.linear_model import LinearRegression

import matplotlib.pyplot as plt

%matplotlib inline

data=pd.read_csv("^GSPC2.csv", parse_dates=['Date'])["Open"]

data.describe()

data.plot()

def hurst(ts,a=math.pi/2):

    log_data=np.log(ts/ts.shift(1))[1:]

    n=len(log_data)

    x_mean=log_data.mean()

    s=math.sqrt(sum((log_data-x_mean)**2)/n)

    zu=np.cumsum(log_data)
```

```
    r=np.max(zu)-np.min(zu)

    r_s=r/s

    h=np.log(r_s)/(np.log(a)+np.log(n))

    return h


h=hurst(data)

print(h)
```