

Національний Університет "Києво-Могилянська Академія"

Дяченко Сергій Миколайович

Морозов Денис Іванович

**p-адичні числа і групи автоморфізмів корневих дерев**

Методичні матеріали до курсу "Додаткові розділи алгебри"

Київ–2015

# Зміст

|                                                                             |           |
|-----------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Перелік умовних позначень                                                   | 3         |
| Вступ                                                                       | 5         |
| <b>1 <math>p</math>-адичні числа</b>                                        | <b>7</b>  |
| 1.1 Проективні границі. . . . .                                             | 7         |
| 1.2 $p$ -адична метрика . . . . .                                           | 10        |
| 1.3 Поле $p$ -адичних чисел, як поповнення поля раціональних чисел. . . . . | 12        |
| <b>2 Ізометрії простору Бера як автоморфізми дерев.</b>                     | <b>14</b> |
| 2.1 Алгебраїчний запис . . . . .                                            | 19        |
| <b>3 Ізометрії простору цілих <math>p</math>-адичних чисел.</b>             | <b>23</b> |
| <b>4 Представлення автоморфізмів регулярного дерева</b>                     | <b>28</b> |
| 4.1 Портрети автоморфізмів . . . . .                                        | 28        |
| 4.2 Автоматні перетворення . . . . .                                        | 32        |
| 4.3 Орієнтовані графи . . . . .                                             | 35        |
| 4.4 Матричне представлення . . . . .                                        | 38        |
| 4.5 Зв'язок між представленнями . . . . .                                   | 43        |
| <b>Список використаних джерел</b>                                           | <b>59</b> |

## Перелік умовних позначень

|                                                |                                                                                                 |
|------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\mathbb{N}^+$                                 | - напівгрупа натуральних чисел по додаванню ;                                                   |
| $\bar{\mathbb{N}}^+ = \mathbb{N}^+ \cup \{0\}$ | - напівгрупа натуральних чисел з нулем;                                                         |
| $Z_p$                                          | - кільце цілих $p$ -адичних чисел;                                                              |
| $Z_T$                                          | - кільце розширених по дереву $T$ цілих 2-адичних чисел ;                                       |
| $C_n^{(r)}$                                    | - декартів добуток $r$ копій циклічної групи $C_n$ ;                                            |
| $G \rtimes H$                                  | - напівпрямий добуток груп , де $H$ – нормальний дільник ;                                      |
| $(G, X) \wr H$                                 | - вінцевий добуток групи перетворень $(G, X)$ (активний співмножник) та абстрактної групи $H$ ; |
| $[g, h]$                                       | - комутатор в групах ;                                                                          |
| $\langle M, g, \dots \rangle$                  | - підгрупа породжена множиною $M$ та елементами $g, \dots$ ;                                    |
| $K^+, K^*$                                     | - адитивна та мультиплікативна групи поля ;                                                     |

|                |                                                                       |
|----------------|-----------------------------------------------------------------------|
| $\circ$        | -суперпозиція автоморфізмів, функцій.                                 |
| $T_n$          | - кореневе однорідне дерево валентності $n$ ;                         |
| $AutT_n$       | - група автоморфізмів кореневого однорідного дерева валентності $n$ ; |
| $FAutT_n$      | - підгрупа скінченностанових автоморфізмів групи $AutT_n$ ;           |
| $\zeta(a)$     | - кількість різних станів автоморфізму $a$ ;                          |
| $\varphi_a(n)$ | - функція росту автоморфізму $a$ ;                                    |
| $C_G(a)$       | - централізатор елемента $a$ в групі $G$ ;                            |

## Вступ

Наприкінці двадцятого сторіччя на стику алгебри, дискретної математики та топології виник новий напрямок досліджень, який можна охарактеризувати як динаміку алгебраїчних структур. Він акумулював в собі дослідження самоподібності таких структур, їх функцій росту, автоматні перетворення, дії на графах, зокрема на деревах, наявність інваріантних мір, ймовірносні розподіли та випадкові блукання на таких структурах. Серед засновників цього напрямку такі відомі математики як М. Громов, Ж.-П. Серр, Ж. Тітс, Р. Григорчук, С. Сідки, Н. Гупта, В. Суццанський.

Вивчення групових дій на нескінченних деревах займає тут чільне місце. Базовим є приклад бінарного однокореневого нескінченного дерева  $T_2$ , група автоморфізмів якого  $AutT_2$  збігається з проективною границею ітерованих вінцевих добутків циклічних груп другого порядку. Ця група є топологічною, як про-2-група. Нескінченні шляхи, що виходять з кореневої вершини можна ототожнити з нескінченними двійковими послідовностями, як елементами метричного простору Бера над двоелементним алфавітом. При цьому вказана група буде також групою ізометрій цього простору. Кожній вершині цього дерева відповідає скінченна послідовність нулів та одиниць  $w$ - шлях від кореневої вершини до даної. Автоморфізм дерева  $\sigma$  переводить всі кінці з початком  $w$  перведе в кінці зі спільним початком  $w'$ , тобто для довільної нескінченної двійкової послідовності кінець  $wx$ , буде перетворений автоморфізмом в кінець  $w'y$ , причому відображення  $x \rightarrow y = y(x)$  є також автоморфізмом нескінченного бінарного дерева. Всі автоморфізми дерева отримані з  $\sigma$  у вказаний спосіб називаються **станами** автоморфізму  $\sigma$ . Особливо цікавими є скінченностанові автоморфізми, які утворюють групу, про будову

якої відомо дуже мало.[9]

Зручною технікою роботи з скінченими груповими автоматами є представлення їх за допомогою  $p$ -адичних функцій.

# 1 р-адичні числа

Є два різних підходи для визначення що таке р-адичні числа. Перший підхід, як проєктивна границя, другий підхід, як поповнення поля раціональних чисел за певною нормою. Давайте розглянемо обидва випадки.

## 1.1 Проективні границі.

Частково-впорядкована множина  $I$  називається наведеною, якщо для довільних  $i, j \in I$  існує  $k \in I$  таке, що  $k < i$ ,  $k < j$ .

**Означення 1.1.1.** *Проективною системою комутативних кілець, або проєктивним спектром комутативних кілець, називається наступний набір  $(K_i, f_{ij}, I : i, j \in I)$ , де  $(K_i, i \in I)$  — набір комутативних кілець,  $(f_{ij} : i \leq j, i, j \in I)$  — набір гомоморфізмів кілець такий, що 1)  $f_{ii} = id_{K_i}$  для всіх  $i$ ; 2) для всіх наборів індексів  $i \leq j \leq k$  має місце  $f_{ik} = f_{ij}f_{jk}$ .*

**Означення 1.1.2.** *Проективною границею проєктивної системи (спектру) комутативних кілець  $(K_i, f_{ij}, I : i, j \in I)$  називається підмножина декартового добутку*

$$\varprojlim (K_i, f_{ij}, I : i, j \in I) \subset \prod_{i \in I} K_i,$$

*яка складається з таких кортежів  $(a_i)_{i \in I}$  що для всіх  $i < j$   $f_{ji}(a_j) = a_i$ .*

Можна довести, що на проєктивну границю комутативних кілець коректно переносяться операції додавання та множення, таким чином, отримана множина також є комутативним кільцем.

Ми використаємо цю конструкцію для наступної проєктивної системи.

Нехай  $p$  — деяке просте число. Позначимо  $K_i = \mathbb{Z}_{p^i}$ ,  $i \in \mathbb{N}$  — кільце класів лишків за модулем  $p^i$ . Гомоморфізми  $f_{ji} : \mathbb{Z}_{p^j} \rightarrow \mathbb{Z}_{p^i}$  — стандартні проекції.

**Означення 1.1.3.** Множиною цілих  $p$ -адичних чисел називається проєктивна границя

$$\widehat{\mathbb{Z}}_p = \varprojlim (\mathbb{Z}_{p^j}, f_{ij}, i, j \in \mathbb{N}).$$

Оскільки для кожного  $i$  наявне відображення  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_{p^i}$  — ціле число відображається у остачу при діленні на  $p^i$ , то існує вкладення кілець  $\pi : \mathbb{Z} \rightarrow \widehat{\mathbb{Z}}_p$ , що задається правилом  $\pi(n) = (\bar{n})_{i \geq 1}$ .

**Приклад 1.1.1.** Нехай  $p = 2$ . Розглянемо число 11. Образом цього числа в множині  $p$ -адичних чисел буде наступне число:

$$(11 \bmod 2, 11 \bmod 2^2, 11 \bmod 2^3, 11 \bmod 2^4, 11 \bmod 2^5, \dots).$$

Зрозуміло, що починаючи з четвертої координати ця послідовність стабілізується. Даваймо знайдемо цю послідовність:

$$(1, 3, 3, 11, 11, 11, 11, 11, \dots)$$

Поки що не зрозуміло, звідки беруться ці числа. Але даваймо розглянемо, як це буде виглядати у системі числення по основі 2.

$11_{10} = 1011_2$ , а відповідна послідовність має вигляд

$$(1, 11, 11(= 011), 1011, 1011, 1011, \dots)$$

таким чином, ми бачимо, що представлення числа в  $p$ -адичному вигляді означає запис перших цифр у представленні цього числа в системі числення за основою  $p$ .

Давайте подивимось на це з іншого боку. Розглянемо представлення натурального числа в системі числення з основою  $p$ :

$$m = \sum_{i=0}^n a_i p^i,$$

де  $a_i \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ . Тоді  $m = \sum_{i=0}^{k-1} a_i p^i \pmod{p^k}$ , таким чином запис числа  $m$  як  $p$ -адичного числа буде мати вигляд  $(a_0, a_1 a_0, a_2 a_1 a_0, \dots)$ .

Користуючись такою логікою можна зробити навпаки. Нехай у нас є  $p$ -адичне число

$$m = (a_0, a_1 a_0, a_2 a_1 a_0, \dots, a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0, \dots).$$

Давайте запишемо його в такому вигляді:

$$m = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i.$$

Таким чином,  $p$ -адичні числа — це узагальнення натуральних чисел в тому розумінні, що якщо записувати натуральні числа в системі числення за основою  $p$ , то ми будемо отримувати скінченні суми, а якщо дозволити нескінченні суми, то ми отримаємо множину цілих  $p$ -адичних чисел.

Поки що це формальний запис у вигляді ряду, який в  $\mathbb{R}$  не збіжний. Але виявляється в певній  $p$ -адичній метриці цей ряд буде збіжним. Але ми про це поговоримо у наступному розділі.

Давайте розберемось, як виконувати арифметичні дії з  $p$ -адичними числами. Виявляється все просто, дії виконуються за тими ж правилами, як і з натуральними числами. Зручно це виконувати у стовбчик. При цьому діє правило переносу одиниці в наступний розряд, якщо сума стала більшою за  $p$ .

Якщо дозволити скінченну кількість доданків з від'ємними степенями, то ми отримаємо поле раціональних  $p$ -адичних чисел

$$\widehat{\mathbb{Q}}_p = \left\{ \sum_{i=n}^{\infty} a_i p^i \mid n \in \mathbb{Z}, a_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}, i \geq n \right\}.$$

Це поле є полем часток кільця цілих  $p$ -адичних чисел.

## 1.2 $p$ -адична метрика

Нехай  $p$  — просте число. Розглянемо на  $\mathbb{Z}$  наступну функцію. Нехай  $m \in \mathbb{Z}$ . Представимо  $m = p^k l$ , де  $l$  та  $p$  взаємно прості. Позначимо  $\text{ord}_p(m) = k$ . Значення  $\text{ord}_p(0) = +\infty$ .

Властивості.

$$1) \text{ord}_p(1) = 0;$$

$$2) \text{ord}_p(mn) = \text{ord}_p(m) + \text{ord}_p(n).$$

Остання властивість дозволяє перенести значення порядку на раціональні числа. А саме, покладемо

$$\text{ord}_p\left(\frac{m}{n}\right) = \text{ord}_p(m) - \text{ord}_p(n).$$

Зауважимо, що дане означення коректне, оскільки

$$\begin{aligned} \text{ord}_p\left(\frac{cm}{cn}\right) &= \text{ord}_p(cm) - \text{ord}_p(cn) = \\ &= \text{ord}_p(c) + \text{ord}_p(m) - \text{ord}_p(n) - \text{ord}_p(c) = \text{ord}_p(m) - \text{ord}_p(n). \end{aligned}$$

3)  $\text{ord}_p(m+n) \geq \min(\text{ord}_p(m), \text{ord}_p(n))$ . Дійсно, якщо  $p^i | m$ ,  $p^j | n$  і  $i \leq j$  то  $p^i | m+n$ .

Введемо на  $\mathbb{Z}$   $p$ -адичну норму.

$$\|m\|_p = \begin{cases} 0 & m = 0; \\ \left(\frac{1}{p}\right)^{\text{ord}_p(m)} & \end{cases}$$

(1) Очевидно, що  $\|m\| = 0$  тоді і лише тоді, коли  $m = 0$ .

(2) З властивості 2) випливає, що  $\|mn\|_p = \|n\|_p \|m\|_p$ .

(3) З властивості 3) випливає, що  $\|m + n\|_p \leq \max(\|n\|_p, \|m\|_p)$ .

Зокрема, виконується нерівність трикутника  $\|m + n\|_p \leq \|n\|_p + \|m\|_p$ .

Ці три властивості означають те, що функція  $\|m\|_p$  є нормою на кільці  $\mathbb{Z}$ . Її можна продовжити на поле  $\mathbb{Q}$  за формулою

$$\left\| \frac{m}{n} \right\|_p = \frac{\|m\|_p}{\|n\|_p}.$$

Третя властивість більш сильна, ніж нерівність трикутника. Якщо для норми виконується така посилена нерівність трикутника, то говорять, що така норма є *неархімедовою*. У просторів з неархімедовою нормою досить цікаві і незвичні властивості.

В нормованому просторі можна розглядати *послідовності Коші*, тобто, такі послідовності  $\{a_i\}_{i \geq 1}$ , що для довільного  $\varepsilon > 0$  існує  $N > 0$ , таке що, для всіх  $m, n > N$  виконується нерівність  $\|a_n - a_m\| < \varepsilon$ .

**Означення 1.2.1.** Дві норми  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$  називаються *еквівалентними*, якщо існує  $\alpha > 0$  таке, що для всіх  $m$   $\|m\|_1^\alpha = \|m\|_2$ .

Отже, для поля раціональних чисел  $\mathbb{Q}$  нам відома  $p$ -адична норма  $\|\cdot\|_p$  для кожного простого числа  $p$ , крім того, є стандартна норма — абсолютна величина, позначимо її  $\|\cdot\|_\infty$ . Ще є тривіальна норма, рівна одиниці на усіх елементах окрім нуля. Виявляється інших норм на полі раціональних чисел немає, про це говорить наступна теорема.

**Теорема 1.2.1** (Островський). Довільна нетривіальна норма на полі  $\mathbb{Q}$  еквівалентна  $\|\cdot\|_p$  для деякого простого  $p$ , або  $p = \infty$

### 1.3 Поле $p$ -адичних чисел, як поповнення поля раціональних чисел.

Є багато різних підходів до побудови дійсних чисел. Один з них — поповнення поля раціональних чисел відносно метрики заданої абсолютною величиною. Нагадаємо теорему Хаусдорфа.

**Теорема 1.3.1** (Хаусдорф). *Довільний метричний простір має поповнення єдине з точністю до ізометрії.*

Нагадаємо, як будується поповнення. На множині фундаментальних послідовностей (послідовностей Коші) вводиться відношення еквівалентності: дві послідовності еквівалентні, якщо їх різниця є збіжною до нуля послідовністю. Множина класів еквівалентності послідовностей Коші є поповненням. Якщо ми починали з поля, то на поповненні також можна ввести структуру поля.

Виявляється, якщо ми застосуємо процедуру поповнення  $(\mathbb{Q}, \|\cdot\|_\infty)$ , то отримаємо  $\mathbb{R}$ , а якщо застосуємо процедуру поповнення  $(\mathbb{Q}, \|\cdot\|_p)$ , то отримаємо  $\widehat{\mathbb{Q}}_p$  — поле раціональних  $p$ -адичних чисел.

Людей завжди цікавило як знайти розв'язок поліноміального рівняння. Для кільця цілих  $p$ -адичних чисел є прекрасна лема, яка дає можливість знаходити корені многочлена, знаючи розв'язок лише в полі лишків  $\mathbb{Z}_p$ .

**Лема 1.3.1** (Гензеля). *Нехай  $f(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n$  — многочлен з цілими  $p$ -адичними коефіцієнтами,  $f'(x) = c_1 + 2c_2x + \dots + nc_nx^{n-1}$  — його похідна. Нехай рівняння  $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$  має розв'язок  $x \equiv a_0 \pmod{p}$ , при чому,  $f'(a_0) \not\equiv 0 \pmod{p}$ , тоді існує єдине ціле  $p$ -адичне число  $a$ , таке що  $f(a) \equiv 0 \pmod{p}$  і  $a \equiv a_0 \pmod{p}$ .*

*Доведення.* Доведення теореми проведемо методом математичної індукції. Алгоритм, описаний в процесі доведення теореми можна використовувати для знаходження самого розв'язку. Позначимо  $d_0 = f'(a_0) \pmod{p}$ . Згідно умови теореми  $d_0 \neq 0$ .

*База індукції.*  $x_0 = a_0$ , при цьому  $x_0 = a_0 \pmod{p}$ ,  $f(x_0) = f(a_0) = 0 \pmod{p}$ .

*Крок індукції.* Припустимо, ми знайшли  $x_{n-1} = a_0 + a_1p + \dots + a_{n-1}p^{n-1}$  такий, що  $x_{n-1} = a_0 \pmod{p}$ ,  $f(x_{n-1}) = 0 \pmod{p^n}$ . Доведемо, що можна побудувати  $x_n$ .

$x_n$  будемо шукати в такому вигляді:  $x_n = x_{n-1} + a_n p^n$ , де  $a_n \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ .  $f(x_{n-1}) = b_n p^n \pmod{p^{n+1}}$ .

Використовуючи розклад в ряд Тейлора, матимемо  $f(x_{n-1} + a_n p^n) = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1})a_n p^n + p^{2n}(\dots)$ . Розглянемо останню рівність  $\pmod{p^{n+1}}$ . Зауважимо, що при цьому нам треба використати значення  $f'(x_{n-1}) \pmod{p} = f'(x_{n-1} \pmod{p}) = f'(a_0) = d_0 \pmod{p}$ . Отже, рівність набуде наступного вигляду:

$$f(x_{n-1} + a_n p^n) = b_n p^n + d_0 a_n p^n \pmod{p^{n+1}}.$$

Оскільки  $f(x_n) = 0 \pmod{p^{n+1}}$ , маємо  $b_n p^n + d_0 a_n p^n = 0 \pmod{p^{n+1}}$ . Остання рівність рівносильна  $b_n + d_0 a_n = 0 \pmod{p}$  звідки ми однозначно знаходимо  $a_n = b_n * (d_0)^{-1} \pmod{p}$ .

При цьому  $x_n = x_{n-1} + a_n p^n$  та  $f(x_n) = 0 \pmod{p^{n+1}}$ .

Отже дійсно існує єдине продовження  $a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n$  таке, що  $f(a) = 0$ . □

## 2 Ізометрії простору Бера як автоморфізми дерев.

Нагадаємо, що однокореневим деревом називається зв'язний граф без циклів з відміченою вершиною. Зауважимо, що автоморфізм кореневого дерева переводить відмічену вершину в себе.

Нехай  $X$  скінченний алфавіт. Простором Бера над алфавітом називається множина нескінчених послідовностей  $x_1x_2x_3\dots, x_i \in X$  з наступною метрикою:

$$(x_1x_2x_3\dots, y_1y_2y_3\dots) = \left(\frac{1}{2}\right)^k,$$

де  $k$  - довжина спільного початку  $x_1x_2x_3\dots$  та  $y_1y_2y_3\dots$ .

**Приклад 2.0.1.** Розглянемо множину формальних сум вигляду:

$$Z_p = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot p^k \mid a_k \in, 0 \leq a_k < p \right\}$$

*Відстань між елементами*

$$a = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot p^k$$

*та*

$$b = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cdot p^k$$

*цієї множини покладемо*

$$\rho(a, b) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

*де  $k$  визначається, як*

$$k = \min_{t \in \mathbb{N} \cup \{0\}} (a_t \neq b_t)$$

*Таким чином визначена метрика перетворює  $Z_p$  на простір Бера над  $p$ -літерним алфавітом.*

Співставимо простору Бера над  $r$ -літерним алфавітом регулярне однокореневе дерево  $T_r$  за наступним правилом: кожній вершині відповідає скінчене слово в алфавіті  $X$ . Назвемо вершинами 1-го рівня вершини, що з'єднані з коренем одним ребром. Вершинами  $i$ -го рівня назвемо вершини, що з'єднані одним ребром з вершинами  $(i-1)$ -го рівня.

Вершині  $i$ -го рівня відповідає слово довжини  $i$ .

Легко зрозуміти, що група ізометрій такого простору ізоморфна групі автоморфізмів побудованого дерева.

Охарактеризуємо її як абстрактну групу.

Нехай  $W_1 = S_X$  - група підстановок на  $X$ , тоді можна індуктивно визначити групи  $W_{n+1} = (W_n, X^n) \wr S_X$ , як вінцевий добуток групи підстановок  $W_n$ , що діє на  $X^n = X \times \dots \times X$  (активний співмножник) та групи підстановок на  $X$ . База вінцевого добутку складається з функцій  $X^n \rightarrow X$  від  $n$  змінних і є ядром природного епіморфізму  $\pi_n : W_{n+1} \rightarrow W_n$ . Ці гомоморфізми визначають  $\overline{W}_\infty(X)$  як проєктивну границю  $\overline{W}_\infty(X) = \varprojlim W_n$ , а також гомоморфізми  $\hat{\pi}_n : \overline{W} \rightarrow W_n$ . При цьому група  $\overline{W}_\infty$  діє природним чином на просторі Бера. Має місце наступна теорема:

**Теорема 2.0.1.** [2],[3] *Група ізометрій простору Бера ізоморфна  $\overline{W}_\infty(X)$ .*

Елементи групи  $\overline{W}_\infty$  можна зображати нескінченними послідовностями функцій:

$$g = \langle \sigma_1, \sigma_2(x_1), \sigma_3(x_1, x_2), \dots, \sigma_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}), \dots \rangle, \quad (2.0.1)$$

де  $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$  — координати вершини  $k-1$ -го рівня, а значенням функції  $\sigma_k$  є одиниця, якщо відповідний автоморфізм дерева переставляє дві суміжні вершини  $k$ -го рівня (див. вище п. в)) і є нуль якщо

автоморфізм залишає ці вершини нерухомими. Аналогом циклового типу на групі підстановок є дерево циклового типу на  $\overline{W}_\infty(X)$ .

**Означення 2.0.1.** *Елемент  $a$  групи  $\overline{W}_\infty$  задає розбиття множини вершин кожного рівня дерева  $T_p$  на множину орбіт дії цього елементу на  $T_p$ . Побудуємо по  $a$  дерево циклового типу  $D_a$  цього елементу. Вершинами цього дерева будуть класи еквівалентності по орбітах, причому дві вершини дерева  $D_a$  з'єднані ребром, якщо існують суміжні вершини дерева  $T_p$  з відповідних орбіт.*

Аналогом критерія спряженості в групі підстановок є наступний критерій в групі  $\overline{W}_\infty(X)$ .

**Теорема 2.0.2.** [3]

*Елементи групи  $\overline{W}_\infty(X)$  є спряженими, якщо їх дерева циклового типу ізоморфні.*

$\overline{W}_\infty(X)$  є проскінченною групою і топологічною групою з топологією проєктивної границі.

**Теорема 2.0.3.**  $\overline{W}_\infty$ - є повною топологічною групою.

*Доведення.* Покажемо, що відображення

$$\overline{W}_\infty \times \overline{W}_\infty \rightarrow \overline{W}_\infty \quad (g_1, g_2) \rightarrow g_1 \cdot g_2^{-1}$$

є неперервним в цій топології. Нехай  $q_0 = g_1 \cdot g_2^{-1}$  і  $B_m(q_0) = \{g | \rho(g, q_0) < 2^{-(m+1)}\}$  — відкрита куля з центром в  $q_0$ . Легко бачити, що  $\forall g_1, g_2 \in B_m(q_0)$  має місце  $\hat{\pi}_m(g_1), \hat{\pi}_m(g_2)$ . Розглянемо довільні елементи куль  $b_1 \in B_m(g_1), b_2 \in B_m(g_2)$ . Для цих елементів буде мати місце  $\hat{\pi}_m(b_1) = \hat{\pi}_m(g_1), \hat{\pi}_m(b_2) = \hat{\pi}_m(g_2)$ , звідки

$$\hat{\pi}_m(b_1 \cdot b_2^{-1}) = \hat{\pi}_m(b_1) \cdot \hat{\pi}_m(b_2)^{-1} = \hat{\pi}_m(g_1) \cdot \hat{\pi}_m(g_2)^{-1} = \hat{\pi}_m(g_1 \cdot g_2^{-1}),$$

отже,  $b_1 \cdot b_2^{-1} \in B_m(q_0)$ . Це доводить, що  $\overline{W}_\infty$  є топологічною групою. Для доведення повноти, слід зауважити, що  $\overline{W}_\infty$  є компактом у вищезгаданий топології, оскільки є замкненим у добутку дискретних просторів  $\hat{\pi}_m(\overline{W}_\infty)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ .  $\square$

Група  $\overline{W}_\infty(X)$  є самоподібною, в тому сенсі, що мають місце факторізації  $\overline{W}_\infty(X) = W_k \overline{W}_\infty(X)$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$

**Означення 2.0.2.** Елемент групи називається скінченностановим, якщо для всіх факторізацій елемента  $g$

$$g = w_k \cdot f_k(x_1 \dots x_k)$$

множина значень функцій, яку будемо називати множиною станів

$$\{f_k(x_1 \dots x_k) \mid x_1 \dots x_k \in \overline{W}_\infty(X), k \in \mathbb{N}\} \subset \overline{W}_\infty(X)$$

є скінченною.

**Приклад 2.0.2.** Очевидно, тотожний автоморфізм є одностановим.

**Приклад 2.0.3.** Зафіксуємо нескінченну послідовність  $x_1^* x_2^* \dots$  і автоморфізм  $\sigma \in \overline{W}_\infty(X)$ . Автоморфізм, для якого для всіх  $k$   $f_k(x_1^* x_2^* \dots x_k^*) = \sigma$  та дорівнює  $id$  на інших векторах є двостановим.

**Означення 2.0.3.** Позначимо кількість **різних** станів автоморфізма  $a$  як  $\zeta(a)$ . Функцією росту автоморфізму  $a$  називається функція  $\varphi_a$ , визначена наступним чином:

$$\varphi_a(n) = \zeta(a^n)$$

**Приклад 2.0.4.** Для тотожного автоморфізму, оскільки  $id^n = id$  та  $id = (id, id)$ , то  $\zeta(id^n) = \zeta(id)$ . Тобто функція росту для  $id$  має вигляд  $\varphi_{id}(n) = 1$ .

Означимо на множині функцій  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  бінарне відношення  $\preccurlyeq$ .

**Означення 2.0.4.** [9] Для функцій  $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  та  $\beta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  будемо казати, що

$$\alpha \preccurlyeq \beta$$

якщо знайдеться таке натуральне  $C$ , що для всіх натуральних  $n$  справеджується нерівність:

$$\alpha(n) \leq C\beta(n).$$

**Означення 2.0.5.** Будемо казати, що автоморфізми  $a$  та  $b$  мають однаковий зріст, якщо для функцій росту  $\varphi_a$  та  $\varphi_b$  має місце:

$$\varphi_a \preccurlyeq \varphi_b$$

$$\varphi_b \preccurlyeq \varphi_a$$

З означення суперпозиції автоморфізмів випливає:

**Лема 2.0.1.** Для функції  $\zeta$  має місце нерівність:

$$\zeta(a \circ b) \leq \zeta(a) \cdot \zeta(b)$$

*Доведення.* Нехай автоморфізм  $a$  має  $k$  станів  $a_1, a_2, \dots, a_k$ , автоморфізм  $b$  має  $t$  станів  $b_1, b_2, \dots, b_t$ . Очевидно автоморфізм  $a \circ b$  не може мати інших станів, окрім  $a_i \circ b_j$  ( $1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq t$ ). Оскільки для деяких  $i_1, j_1, i_2, j_2$  можлива рівність

$$a_{i_1} \circ b_{j_1} = a_{i_2} \circ b_{j_2}$$

то кількість станів автоморфізму  $a \circ b$  не більше за  $k \cdot t$ . □

**Теорема 2.0.4.** Якщо для автоморфізмів  $a$  та  $b$  існує скінченностановий автоморфізм  $c$  такий, що виконується рівність:

$$c^{-1} \circ a \circ c = b$$

то  $a$  та  $b$  мають однаковий зріст.

*Доведення.* Оскільки з того, що

$$c^{-1} \circ a \circ c = b$$

випливає рівність

$$c^{-1} \circ a^n \circ c = b^n$$

то згідно з лемою

$$\zeta(b^n) = \zeta(c^{-1} \circ a^n \circ c) \leq \zeta(c^{-1}) * \zeta(a^n) * \zeta(c) = \zeta(a^n) * \zeta(c)^2$$

$$\zeta(a^n) = \zeta(c \circ b^n \circ c^{-1}) \leq \zeta(c) * \zeta(b^n) * \zeta(c^{-1}) = \zeta(b^n) * \zeta(c)^2$$

тобто

$$\frac{1}{\zeta(c)^2} \leq \frac{\varphi_a(n)}{\varphi_b(n)} \leq \zeta(c)^2$$

□

## 2.1 Алгебраїчний запис

Для роботи з автоморфізмами з  $\sigma \in \overline{W}_\infty(X)$  зручно використовувати алгебраїчний запис.

В алгебраїчному запису автоморфізм з  $\sigma \in \overline{W}_\infty(X)$  над двоелементним алфавітом буде виглядати, як  $(a, b)$  або як  $(a, b) \circ \sigma$ .

Автоморфізм вигляду  $(a, b)$  діє на праве для кореня піддерево автоморфізмом а, на ліве - автоморфізмом b, залишаючи суміжні з коренем вершини на місці. Автоморфізм вигляду  $(a, b) \circ \sigma$  діє на праве для кореня піддерево автоморфізмом а, на ліве - автоморфізмом b, та переставляє суміжні з коренем вершини.

Множення автоморфізмів відбувається наступним чином:

$$(a, b) \circ (c, d) = (a \circ c, b \circ d)$$

$$(a, b) \circ ((c, d) \circ \sigma) = (a \circ c, b \circ d) \circ \sigma$$

$$((a, b) \circ \sigma) \circ (c, d) = (a \circ d, b \circ c) \circ \sigma$$

$$((a, b) \circ \sigma) \circ ((c, d) \circ \sigma) = (a \circ d, b \circ c)$$

Також зручно записувати обернений до автоморфізму дерева:

$$(a, b)^{-1} = (a^{-1}, b^{-1})$$

$$((a, b) \circ \sigma)^{-1} = \sigma \circ (a^{-1}, b^{-1}) = (b^{-1}, a^{-1}) \circ \sigma$$

Крім цього за допомогою алгебраїчного запису скінченною кількістю співвідношень визначаються скінченостанові автоморфізми. Наприклад *adding machine* задається наступним співвідношенням:

$$\varepsilon = (id, \varepsilon) \circ \sigma$$

$$id = (id, id)$$

Квадрат *adding machine* має 3 стани  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon^2$  та  $id$ :

$$\varepsilon^2 = (\varepsilon, \varepsilon)$$

$$\varepsilon = (id, \varepsilon) \circ \sigma$$

$$id = (id, id)$$

За допомогою цієї техніки опишемо  $\varepsilon^k$ :

$$\varepsilon^{-1} = (\varepsilon^{-1}, id) \circ \sigma$$

$$\varepsilon^3 = \varepsilon^2 \circ \varepsilon = (\varepsilon, \varepsilon) \circ (id, \varepsilon) \circ \sigma = (\varepsilon, \varepsilon^2) \circ \sigma$$

$$\varepsilon^{2k} = (\varepsilon^k, \varepsilon^k)$$

$$\varepsilon^{2k+1} = (\varepsilon^k, \varepsilon^k) \circ \varepsilon = (\varepsilon^k, \varepsilon^k) \circ (id, \varepsilon) \circ \sigma = (\varepsilon^k, \varepsilon^{k+1}) \circ \sigma$$

**Приклад 2.1.1.** Автоморфізми  $\varepsilon = (id, \varepsilon) \circ \sigma$  ( $id = (id, id)$ ) та  $\varepsilon^3$  мають однаковий зріст, оскільки спряжені за допомогою скінченностанового автоморфізму  $a$ , що задається співвідношеннями:

$$a = (a, b)$$

$$b = (a, c) \circ \sigma$$

$$c = (b, c)$$

Означимо підгрупу  $FAutT_p$  групи  $AutT_p$ .

Розглянемо піддерево кореневого однорідного дерева  $T_p$  з коренем в деякій вершині, що ізоморфно  $T_p$ . Автоморфізм  $a \in AutT_p$  природнім чином задає автоморфізми на всіх таких піддеревах.

Якщо маємо скінченну кількість отриманих таким чином автоморфізмів, то назвемо а скінченностановим. Множина всіх скінченностанових автоморфізмів утворює групу  $FAutT_p$ .

Кінцем назвемо нескінчену послідовність вершин, яка починається з кореня, кожна вершина з'єднана ребром з наступною вершиною послідовності і жодна вершина не входить в послідовність більше одного разу. Легко бачити, що метричний простір на кінцях  $T_p$  з метрикою  $\rho(x, y) = \frac{1}{2}^n$ , де  $x, y$  - кінці  $T_p$ ,  $n$  - довжина спільного початку ізоморфне простору Бера. Цей ізоморфізм породжує ізоморфізм групи ізометрій простору Бера на  $AutT_p$ . З іншого боку  $AutT_p$  ізоморфна вільному добутку груп  $S_p \wr S_p \wr S_p \dots$ . Дійсно,  $AutT_p$  переставляє вершини першого рівня. Групою цих підстановок є  $S_p$ . Для другого рівня  $AutT_p$  переставляє вершини, які виходять зі спільної вершини першого рівня і т.д.

Для автоморфізму  $a \in AutT_p$  циклами  $n$ -того рівня назвемо орбіти дії  $a$  на  $n$ -тий рівень  $T_p$ .

Шарово-однорідними автоморфізмами в  $FAutT_p$  назовемо автоморфізми, для яких циклом  $n$ -того рівня є в точності  $n$ -тий рівень. Множину таких елементів позначимо як  $M$ . Очевидно  $M$  не є підгрупою в  $FAutT_p$ .

Для автоморфізму  $a \in M$ ,  $x, y$  - кінці з  $T_p$ ,  $x_n, y_n$  - вершини  $n$ -го рівня, такі, що  $x_n \in x, y_n \in y$ .

Означимо  $\rho_{a,n}(x, y) = k$ , де  $k$  - найменше натуральне число, для якого

$$x_n * a^k = y_n.$$

Так як для  $a \in M$  цикл  $n$ -го рівня складається з  $p^n$  вершин, то

$$0 \leq \rho_{a,n}(x, y) < p^n.$$

Нехай  $x_{n1}$  та  $x_{n2}$  вершини  $(n+1)$ -го рівня з'єднані ребром з вершиною  $x_n$   $n$ -го рівня,  $y_{n1}$  та  $y_{n2}$  вершини  $(n+1)$ -го рівня з'єднані ребром з вершиною  $y_n$   $n$ -го рівня.

**Означення 2.1.1.** *Означимо  $\rho_a(x, y)$  як нескінчену послідовність  $(\rho_{a,1}(x, y), \rho_{a,2}(x, y), \dots)$ .*

Для цілого  $p$ -адичного числа

$$z = a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + a_3 \cdot 2^3 + \dots + a_k \cdot 2^k + \dots$$

послідовністю часткових сум назовемо послідовність:

$$b_n = \sum_{k=0}^n a_k \cdot 2^k$$

**Лема 2.1.1.** *Для всіх  $a \in M$  послідовність  $\rho_a(x, y)$  є послідовністю часткових сум деякого цілого  $p$ -адичного числа.*

*Доведення.* Дійсно  $\rho_{a,n}(x, y) = p^n$ , так як цикл  $n$ -го рівня складається з  $p^n$  вершин. Так як  $(x_n) * a^{p^n} = x_n$ , то  $(x_{n1}) * a^{p^n}$  дорівнює або  $x_{n1}$  або  $x_{n2}$ .

Але  $\rho_{a,n+1}(x_{n1}, x_{n1}) = p^{n+1}$ , звідси  $(x_n 1) * a^{p^n} = x_{n2}$ , тобто  $\rho_{a,n+1}(x_{n1}, x_{n2}) = p^n$ . З цього випливає, що  $\rho_{a,n+1}(x_{ni}, y_{nj}) = \rho_{a,n}(x_n, y_n) \bmod(p^n)$ .  $\square$

Для того, щоб визначити автоморфізм  $a \in \text{Aut}T_p$ , достатньо для кожного  $x \in T_p$  вказати такий  $y \in T_p$ , що  $\rho_a(x, y) = 1$ . Означимо автоморфізм  $a^k$ , де  $k$  деякий елемент кільця цілих  $p$ -адичних чисел, як  $b \in \text{Aut}T_p$ , для якого  $\rho_b(x, y) = 1$ , якщо  $\rho_a(x, y) = k$ .

Якщо  $s, q$  -  $p$ -адичні числа,  $a \in \text{Aut}T_p$ , то

$$a^s \circ a^q = a^{s+q}$$

$$(a^s)^q = a^{sq}$$

Звуження дії піднесення у степінь  $a^k$  до кільця цілих чисел відповідає звичайному означенню степеня. Наприклад,

$$a^{(1,3,3,\dots,3,\dots)} = a^3$$

$$a^{(1,3,7,15,\dots,2^{-1},\dots)} = a^{-1}$$

для автоморфізму  $a \in \text{Aut}T_2$ .

### 3 Ізометрії простору цілих $p$ -адичних чисел.

Ототожнюючи кодування елементів простору Бера над двійковим алфавітом з двійковим кодуванням цілих 2-адичних чисел отримаємо представлення автоморфізма функцією на  $Z_2$ . Кожен автоморфізм дерева  $\alpha$  задає функцію  $f_\alpha$  за правилом: якщо автоморфізм  $\alpha$  переводить кінець  $x$  в кінець  $y$ , то  $f_\alpha(x) = y$ . Наприклад *adding machine* при такому представленні задається функцією  $f(x) = x + 1$ .

Але не кожна функція є автоморфізмом дерева. Для того, щоб функція задавала автоморфізм необхідно, щоб ця функція пару кінців з

однаковим початком переводила в пару кінців з однаковим початком тієї ж самої довжини.

**Приклад 3.0.1.** Функція  $f(x) = 2x$  переводить пару  $\dots 1111$  та  $\dots 0000$  в пару  $\dots 1110$  та  $\dots 0000$  відповідно. Перша пара має спільний початок довжини 0, друга - довжини 1, тобто функція  $f(x) = 2x$  не є автоморфізмом дерева.

**Приклад 3.0.2.** Функція  $f(x) = x^2$  не є автоморфізмом дерева.

Дійсно, оскільки має місце наступне співвідношення

$$(2^n \cdot t + x)^2 = 2^{2n} \cdot t^2 + 2 \cdot 2^n \cdot x \cdot t + x^2$$

тобто

$$\begin{aligned} & (2^n \cdot t_1 + x)^2 - (2^n \cdot t_2 + x)^2 = \\ &= (2^{2n} \cdot t_1^2 + 2 \cdot 2^n \cdot x \cdot t_1 + x^2) - (2^{2n} \cdot t_2^2 + 2 \cdot 2^n \cdot x \cdot t_2 + x^2) = \\ &= 2^{n+1}(t_2 - t_1)(2^{n-1}(t_2 + t_1) + 1) \end{aligned}$$

то для пари 2-адичних чисел  $x_1, x_2$ , що мають спільний початок ненульової довжини  $n$ , пара  $x_1^2, x_2^2$  має спільний початок довжини як найменше довжини  $n+1$  отже відображення  $f(x) = x^2$  є неперервним, але не є автоморфізмом.

Втім клас функцій, що є автоморфізмами дерева є досить широким. Мають місце наступні твердження:

**Теорема 3.0.1.** Функції вигляду  $f(x) = \frac{a^x - 1}{a - 1}$ ,  $a = 4k + 1$ ,  $k \in \mathbb{Z}_2$  є автоморфізмами дерева.

*Доведення.* Функція  $f(x) = \frac{a^x - 1}{a - 1}$ ,  $a = 4k + 1$ ,  $k \in \mathbb{Z}_2$  є єдиним розв'язком рівняння

$$\chi^{-1} \circ (x + 1) \circ \chi = ax + 1$$

для якого

$$\chi : \dots 000 \rightarrow \dots 000$$

.

□

**Теорема 3.0.2.** *Лінійні функції вигляду  $f(x) = ax + b$ ,  $a = 2k + 1$ ,  $a, b, k \in \mathbb{Z}_2$  є автоморфізмами дерева.*

*Доведення.* Те, що 2-адичні послідовності  $x$  та  $y$  мають спільний початок довжини  $k$ , рівносильно тому, що послідовність  $x - y$  має наступний вигляд:  $\dots t10\dots 00$ , де на початку послідовності маємо  $k$  нулів. Але для послідовностей  $ax + b$  та  $ay + b$  різниця має вигляд  $a(x - y)$ , а оскільки  $a$  - непарне 2-адичне число, то  $a(x - y) = \dots t'10\dots 00$ , де на початку послідовності маємо  $k$  нулів, тобто послідовності  $ax + b$  та  $ay + b$  також мають спільний початок довжини  $k$ . □

Добутку автоморфізмів дерева відповідає суперпозиція відповідних функцій. І для автоморфізмів, і для функцій оберемо ліву дію.

$$\varepsilon^2 = \varepsilon \circ \varepsilon = (x + 1) \circ (x + 1) = (x + 1) + 1 = x + 2$$

$$(3x + 1) \circ (x + 2) = (3x + 1) + 2 = 3x + 3$$

$$(x + 2) \circ (3x + 1) = 3(x + 2) + 1 = 3x + 7$$

**Лема 3.0.1.** *Для функції  $f(x) = ax + b$ ,  $a = 2k + 1$ ,  $a, b, k \in \mathbb{Z}_2$  маємо  $f^{-1}(x) = \frac{1}{a}(x - b)$ .*

*Доведення.*

$$(ax + b) \circ \left(\frac{1}{a}(x - b)\right) = \frac{1}{a}((ax + b) - b) = x$$

□

Побудуємо алгебраїчний запис для автоморфізма, що задається функцією  $f(x) = ax + b$ . Функція  $f(x) = ax$  переводить кінець  $\dots t0$  в кінець  $\dots(t * a)0$ , оскільки

$$\dots t0 * a = \dots t * 2 * a = \dots t * a * 2 = \dots(t * a)0.$$

Кінець  $\dots t1$  функція  $f(x) = ax$  переводить в кінець  $\dots(t * a + (a - 1)/2)1$ , оскільки

$$\begin{aligned} \dots t1 * a &= (\dots t0 + 1) * a = \dots t * 2 * a + a = \\ &= \dots t * a * 2 + \frac{a - 1}{2} * 2 + 1 = \dots(t * a + \frac{a - 1}{2})1 \end{aligned}$$

тобто для автоморфізма  $f(x) = ax$  маємо:

$$ax = (ax, ax + \frac{a - 1}{2}).$$

Далі

$$ax + b = ax \circ (x + b),$$

а ,оскільки функція  $f(x) = x + b$  відповідає автоморфізму  $\varepsilon^b$ , то для  $b = 2k$  маємо:

$$\begin{aligned} ax + b &= (ax, ax + \frac{a - 1}{2}) \circ (x + \frac{b}{2}, x + \frac{b}{2}) = \\ &= (ax + \frac{b}{2}, ax + \frac{a - 1}{2} + \frac{b}{2}). \end{aligned}$$

Для  $b = 2k + 1$ :

$$\begin{aligned} ax + b &= (ax, ax + \frac{a - 1}{2}) \circ (x + \frac{b - 1}{2}, x + \frac{b - 1}{2} + 1) \circ \sigma = \\ &= (ax + \frac{b - 1}{2}, ax + \frac{a - 1}{2} + \frac{b - 1}{2} + 1) \circ \sigma. \end{aligned}$$

**Приклад 3.0.3.** Автоморфізм, що задається функцією  $f(x) = 5x + 1$  є скінченностановим, і визначається наступними співвідношеннями:

$$(5x + 1) = (5x, 5x + 3) \circ \sigma$$

$$(5x) = (5x, 5x + 2)$$

$$(5x + 3) = (5x + 1, 5x + 4) \circ \sigma$$

$$(5x + 2) = (5x + 1, 5x + 3)$$

$$(5x + 4) = (5x + 2, 5x + 4)$$

тобто містить 5 станів.

**Означення 3.0.1.** Група  $G$  автоморфізмів однорідного кореневого дерева називається станово-замкненою, якщо множина станів кожного елемента групи  $G$  належить цій групі.

**Лема 3.0.2.** Множина функцій  $f(x) = x + p$  ( $p \in Z_2$ ) є абелевою станово-замкненою групою.

*Доведення.*

$$(x + p)^{-1} = x - p$$

$$(x + p_1) \circ (x + p_2) = (x + p_2) \circ (x + p_1) = x + p_1 + p_2$$

$$x + 2p = (x + p, x + p)$$

$$x + 2p + 1 = (x + p, x + p + 1) \circ \sigma$$

□

**Теорема 3.0.3.** Множина лінійних ізометрій кільця  $Z_2$  є станово-замкненою групою.

*Доведення.* Дійсно, множина станів лінійної функції складається з лінійних функцій:

$$ax = (ax, ax + \frac{a-1}{2}),$$

$$x + 2k = (x + k, x + k),$$

$$x + 2k + 1 = (x + k, x + k + 1) \circ \sigma,$$

$$\begin{aligned}
ax + 2k &= ax \circ (x + 2k) = (ax, ax + \frac{a-1}{2}) \circ (x + k, x + k) = \\
&= (ax + k, ax + \frac{a-1}{2} + k), \\
ax + 2k + 1 &= ax \circ (x + 2k) = (ax, ax + \frac{a-1}{2}) \circ (x + k, x + k + 1) \circ \sigma = \\
&= (ax + k, ax + \frac{a-1}{2} + k + 1) \circ \sigma,
\end{aligned}$$

□

добуток лінійних функцій є лінійною функцією:

$$(ax + b) \circ (cx + d) = c(ax + b) + d = cax + (cb + d),$$

та обернена до лінійної функції є лінійною функцією:

$$(ax + b)^{-1} = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}.$$

Нейтральним елементом групи є лінійна функція:

$$f(x) = x.$$

## 4 Представлення автоморфізмів регулярного дерева

### 4.1 Портрети автоморфізмів

Автоморфізми зручно задавати портретами. Портретом автоморфізма дерева  $T_2$  є дерево  $T_2$ , вершини якого розмічені 0-ми та 1-ми.

Автоморфізм задається розміченим деревом в такий спосіб. Якщо автоморфізм переставляє вершини наступного рівня, що суміжні з даною вершиною, то відмітимо цю вершину 1-цею, якщо ні, то 0-лем. Таке представлення автоморфізма назвемо портретом цього автоморфізма.

При такому представленні автоморфізму  $a$  кожному кінцю  $x$  відповідає послідовність цифр  $x_a$  розмічених вершин цього кінця, причому

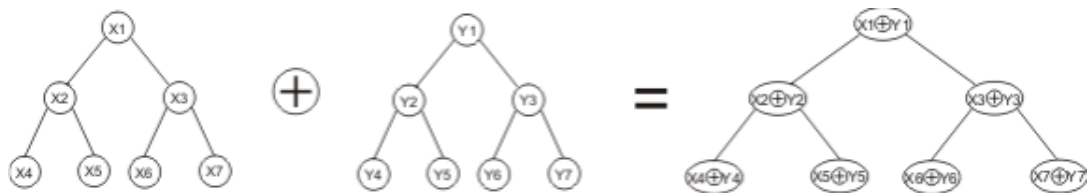


Рис. 1: Додавання портретів за модулем 2

кінець  $x$  під дією автоморфізма  $a$  переходить в кінець  $x \oplus x_a$  (під операцією  $\oplus$  розуміється покоординатне додавання по модулю 2).

Для опису множення на представленні автоморфізмів дерева портретами знадобляться дві конструкції: додавання портретів за модулем 2 та дія на портрет автоморфізмом дерева.

Множина портретів з операцією додавання за модулем 2 відповідних вершин (рис. 1) утворює абелеву групу. Нейтральним елементом цієї групи буде портрет з 0 на всіх вершинах, обернений до елемента групи співпадає з самим елементом.

Портрет добутку автоморфізмів  $a \circ b$  будується наступним чином. Дієм на портрет  $b$  автоморфізмом, оберненим до  $a$ . Отриманий таким чином новий портрет додаємо по модулю 2 до портрету автоморфізму  $a$ . (рис. 2).

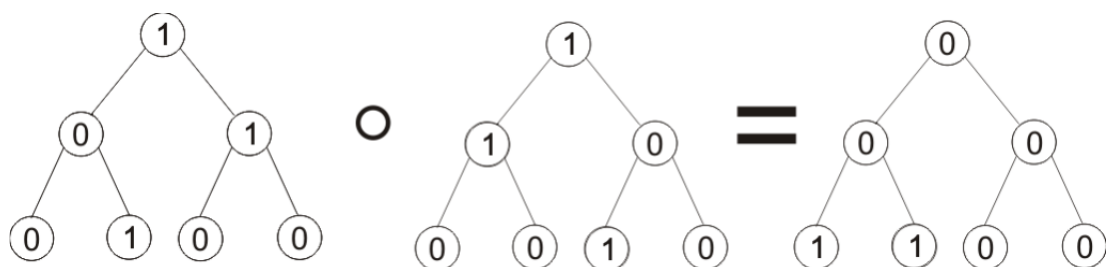
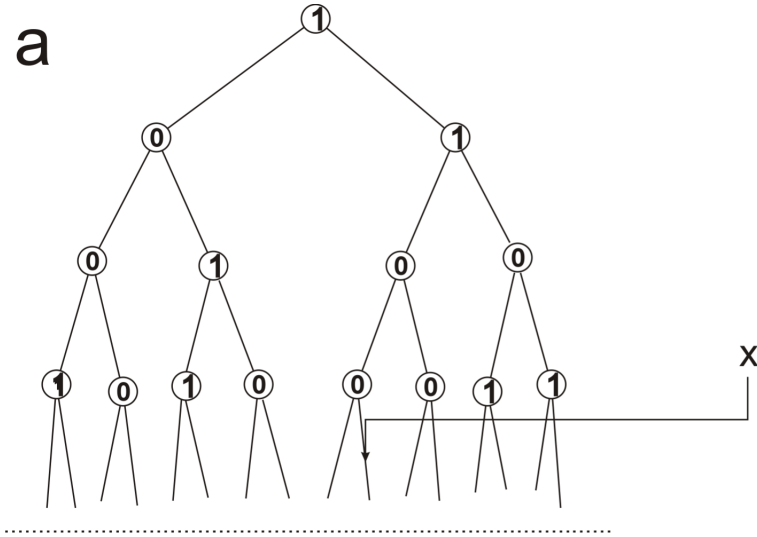


Рис. 2: Портрет добутку автоморфізмів

При множенні портретів розмітка кінців дерева змінюється насту-

Рис. 3: Портрет автоморфізму  $a$ 

ПНИМ ЧИНОМ:

$$x_{a \circ b} = x_a \oplus (x \oplus x_a)_b$$

Для оберненого до  $a$  автоморфізма  $a^{-1}$  маємо:

$$(x \oplus x_a)_{a^{-1}} = x_a$$

Наприклад, нехай автоморфізм  $a$  задається наступним портретом на дереві  $T_2$ , на якому виділимо кінець  $x$  (рис. 3)

Згідно з рис. 3

$$x = \dots 1001$$

$$x_a = \dots 0011$$

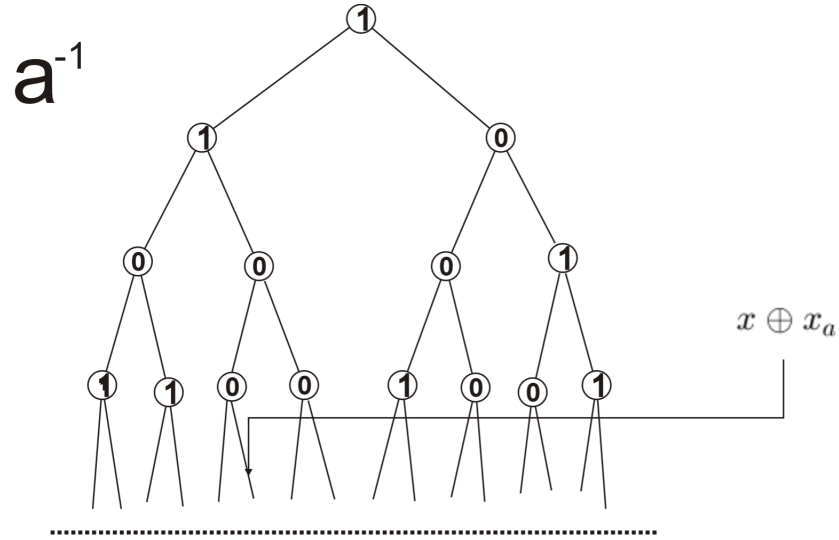
тобто

$$x \oplus x_a = \dots 1001 \oplus \dots 0011 = \dots 1010$$

і для автоморфізму  $a^{-1}$  маємо (рис.4):

$$(x \oplus x_a)_{a^{-1}} = \dots 1010_{a^{-1}} = x_a = \dots 0011.$$

Означимо дію  $[a]b$  для автоморфізмів  $a$  та  $b$  з  $AutT_2$ .

Рис. 4: Портрет автоморфізму  $a^{-1}$ 

**Означення 4.1.1.** Подіємо на розмічене дерево, що задає портрет автоморфізму  $a$  автоморфізмом  $b$ . Отриманий портрет означимо, як  $[a]b$ .

Для автоморфізмів  $a, b, c, d \dots$  з  $AutT_2$  мають місце наступні співвідношення:

$$a \circ b = a \oplus [b]a^{-1}$$

$$[a](b \circ c) = [[a]b]c$$

$$[a \oplus b \oplus c \oplus \dots]d = [a]d \oplus [b]d \oplus [c]d \oplus \dots$$

Наприклад, має місце рівність:

$$a^{-1} = [a]a.$$

Дійсно:

$$a^{-1} \circ a = a^{-1} \oplus [a](a^{-1})^{-1} = a^{-1} \oplus [a]a.$$

З іншого боку

$$a^{-1} \circ a = id$$

тобто

$$a^{-1} \oplus [a]a = id$$

$$a^{-1} \oplus [a]a \oplus a^{-1} = id \oplus a^{-1}$$

$$[a]a = a^{-1}.$$

Аналогічно:

$$a_n = \oplus \sum_{k=0}^{n-1} [a]a^{-k}$$

Дійсно:

$$\begin{aligned} a^n &= a \oplus [a^{n-1}]a^{-1} = a \oplus [a \oplus [a^{n-2}]a^{-1}]a^{-1} = \\ &= a \oplus [a]a^{-1} \oplus [[a^{n-2}]a^{-1}]a^{-1} = a \oplus [a]a^{-1} \oplus [a^{n-2}]a^{-2} = \\ &= a \oplus [a]a^{-1} \oplus \dots \oplus [a]a^{-k+1} \oplus [a^{n-k}]a^{-k} = a \oplus [a]a^{-1} \oplus \dots \oplus [a]a^{-n+2} \oplus [a]a^{-n+1}. \end{aligned}$$

Опишемо групу скінченностанових автоматних підстановок на мові портретів.

**Означення 4.1.2.** *Якщо стан автоморфізму діє на піддереві дерева  $T_2$ , то портрет цього стану є аналогічним піддеревом портрету цього автоморфізму.*

Згідно з цим означенням автоморфізм є скінченностановим тоді і тільки тоді, коли множина різних портретів двійкових піддерев дерева  $T_2$  є скінченною.

## 4.2 Автоматні перетворення

Опишемо автомати над алфавітом  $X$ . Автомат складається з алфавіту  $X$ , множини станів  $S$ , функції переходів  $\lambda : S \times X \rightarrow S$  та функції виходів

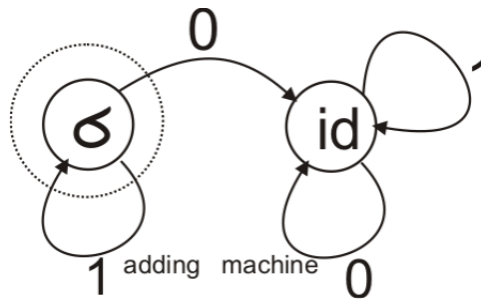


Рис. 5: adding machine

$\gamma : S \times X \rightarrow X$ . Якщо в стан  $s \in S$  попадає елемент  $x \in X$ , то автомат переходить в стан  $\lambda(s, x)$  та повертає елемент  $\gamma(s, x)$ .

Природнім чином автомат діє на множині послідовностей, що складаються з елементів алфавіту  $X$ .

**Приклад 4.2.1.** *Означимо автомат з двома станами над алфавітом  $\{0, 1\}$ .*

Автомат, що задає автоморфізм дерева зручно записувати у вигляді орієнтованого розміченого графа, якій складається з вершин двох типів  $\sigma$  та  $id$ , та множини орієнтованих ребер двох типів, помічених 0 та 1, причому з кожної вершини виходить рівно по одному ребру кожного типу.

Вершини в представленні автомата графом називаються станами автомату. Одна вершина відмічена, як ініціальний стан.

На малюнках наведені автомати:

для автоморфізму дерева  $\varepsilon(\text{adding machine})$ (рис. 5)

для автоморфізму  $\varepsilon^{-1}$ (рис. 6)

та тотожного автоморфізму  $id$ (рис. 7).

Автомат діє на кінцях двійкового дерева у такий спосіб. Помістимо першу цифру двійкового розкладу кінця в ініціальний стан автомату. Якщо цей стан має тип  $id$ , то автомат повертає цифру, не змінюючи її,

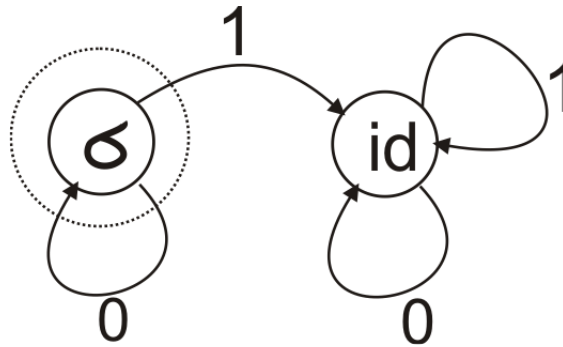


Рис. 6: Автомат автоморфізму, оберненого до adding machine

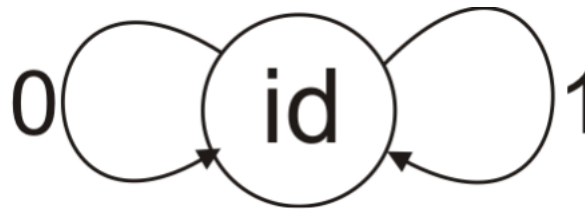


Рис. 7: Автомат для тотожнього автоморфізму

якщо стан має тип  $\sigma$ , то автомат повертає протилежну цифру (0 та 1-протилежні) (рис. 8).

Добутком  $a \circ b$  автоматів  $a$  та  $b$  називається послідовна дія цих автоматів. Спочатку діємо на послідовність автоматом  $a$ , потім автоматом  $b$ .

**Приклад 4.2.2.** Добутком автоматів  $\varepsilon$  та  $\varepsilon^{-1}$  є тотожний автомат  $id$  (рис. 9)

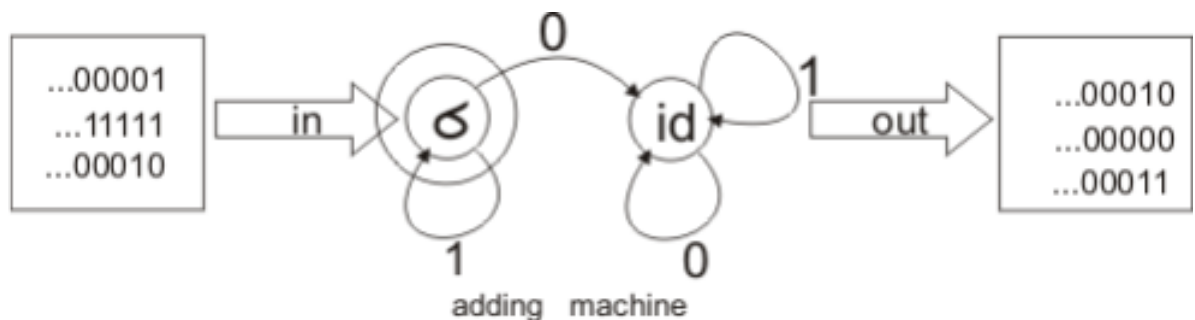
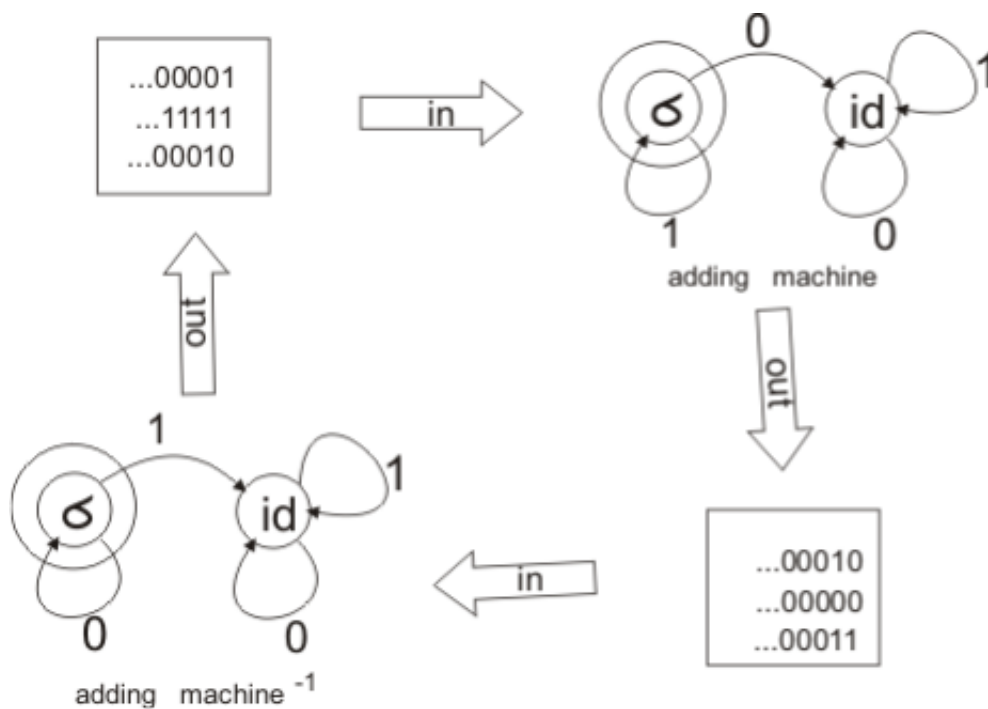


Рис. 8: Дія adding machine на двійкових послідовностях

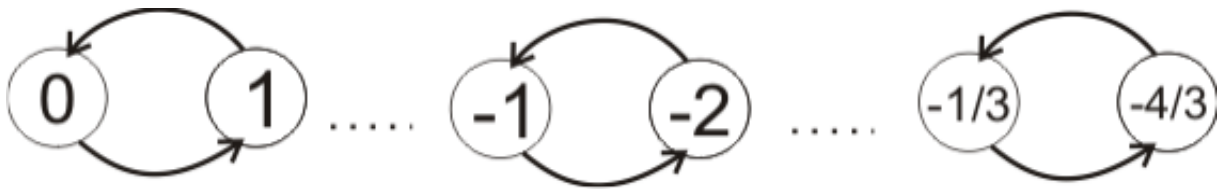
Рис. 9: Послідовна дія  $\varepsilon$  та  $\varepsilon^{-1}$ 

### 4.3 Орієнтовані графи

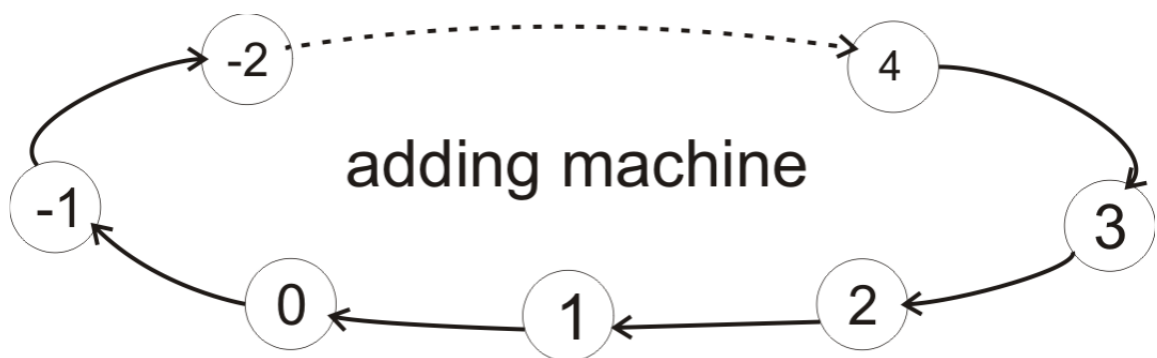
Розглянемо орієнтований граф, вершинами якого є елементи  $Z_2$ , побудований по автоморфізму а двійкового дерева  $T_2$ .

Граф будується за наступним правилом: числа  $x$  та  $y$  з  $Z_2$  з'єднані стрілкою, якщо автоморфізм а відповідний кінець  $x$  дерева  $T_2$  переводить в кінець  $y$ .

Для автоморфізма  $\sigma$ , що переставляє вершини 1-го рівня, а на піддеревах, що виходять з цих вершин, діє тотожно, орієнтовний граф виглядає наступним чином (рис.10).

Рис. 10: Орієнтований граф на  $Z_2$  автоморфізму  $\sigma$ 

Для *adding machine* маємо орієнтований граф вигляду (рис.11).

Рис. 11: Орієнтований граф на  $Z_2$  автоморфізму *adding machine*

Для тотожного автоморфізму *id* маємо орієнтований граф вигляду (рис.12).

Орієнтований граф автоморфізму природнім чином породжує орієнтовані графи на вершинах, що належать одному рівню. По орієнтованому графу автоморфізма дерева легко побудувати дерево циклового типу автоморфізму, яке означається наступним чином: вершинами  $n$ -го рівня цього дерева є цикли відповідного орієнтованого графа. Пара вершин дерева типу автоморфізма з'єднана ребром, якщо існує пара суміжних вершин з відповідних циклів (рис.13).

Тип автоморфізму відповідає цикловому типу елемента в групі підстановок  $S_n$ . Побудуємо дерева типу для деяких автоморфізмів.

**Приклад 4.3.1.** Для *adding machine*  $\varepsilon$ . Оскільки на кожному рівні маємо тільки один цикл, то дерево типу є ланцюгом (рис.14).



Рис. 12: Орієнтований граф на  $Z_2$  тотожного автоморфізму

**Приклад 4.3.2.** Для квадрату *adding machine*  $\varepsilon^2$  маємо два цикли, оскільки

$$\varepsilon^2 = (\varepsilon, \varepsilon)$$

тобто дерево типу для  $\varepsilon^2$  містить два ланцюги (рис.15).

**Приклад 4.3.3.** Для  $f(x) = x \oplus 1$  всі цикли мають довжину 2.

Дійсно, послідовність вигляду  $\dots x_3 x_2 x_1 0$  переходить в послідовність вигляду  $\dots x_3 x_2 x_1 1$ , і навпаки, послідовність вигляду  $\dots x_3 x_2 x_1 1$  переходить в послідовність вигляду  $\dots x_3 x_2 x_1 0$ :

$$\dots x_3 x_2 x_1 0 \oplus 1 = \dots x_3 x_2 x_1 1$$

$$\dots x_3 x_2 x_1 1 \oplus 1 = \dots x_3 x_2 x_1 0.$$

Дерево типу для автоморфізму  $f(x) = x \oplus 1$  має вигляд (рис.16).

**Приклад 4.3.4.** Для тотожного автоморфізму  $id$ , очевидно, всі цикли мають довжину 1, отже дерево типу співпадає з  $T_2$  (рис.17).

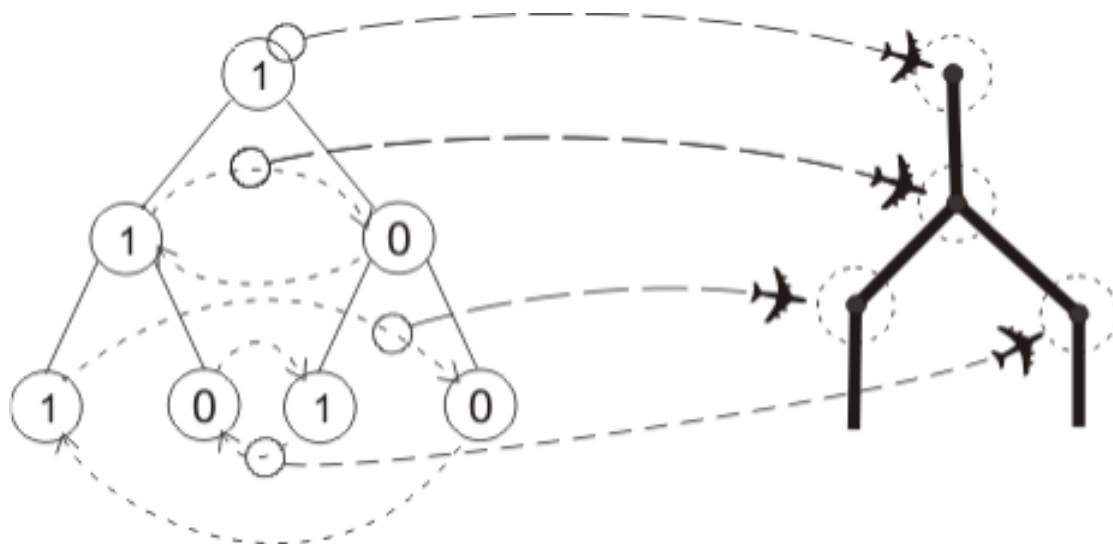
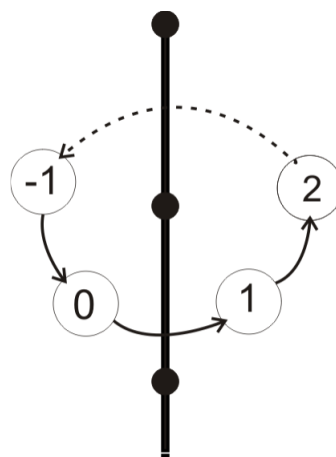


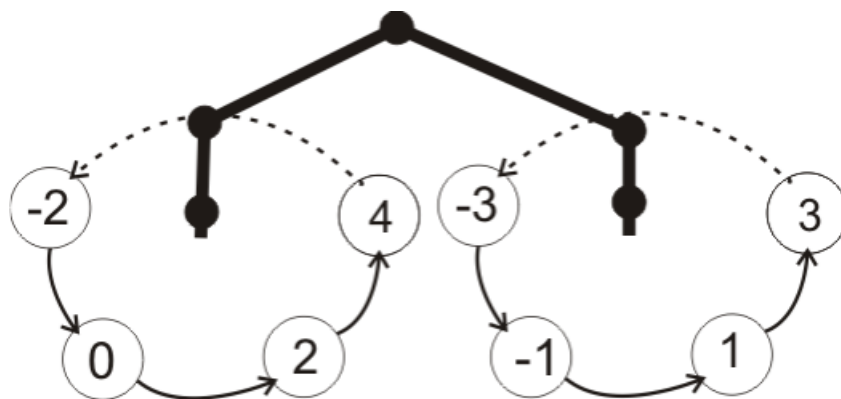
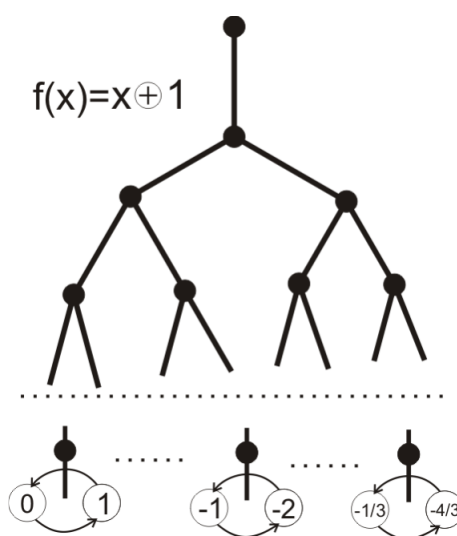
Рис. 13: Дерево циклового типу

Рис. 14: Дерево циклового типу для *adding machine*

#### 4.4 Матричне представлення

В деяких класах задач буває зручно представляти автоморфізми скінченного двійкового  $n$ -рівневого дерева матрицями розміру  $2^n \times 2^n$ . Матриця  $A$ , що відповідає автоморфізму  $a$  будується наступним чином: для автоморфізму  $a = (b, c)$  матриця  $A$  виглядає, як

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

Рис. 15: Дерево циклового типу для квадрату *adding machine*Рис. 16: Дерево типу для автоморфізму  $f(x) = x \oplus 1$ 

для автоморфізму  $a = (b, c) \circ \sigma$  матриця  $A$  виглядає, як

$$A = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

де  $0$ - нульова матриця того ж розміру, що матриці  $B$  та  $C$ . Ненульова матриця автоморфізма дерева  $0$ -го рівня (ізолювана вершина) записується, як  $1$ -ця.

За допомогою зворотної операції по матриці автоморфізма дерева будується портрет цього автоморфізма.

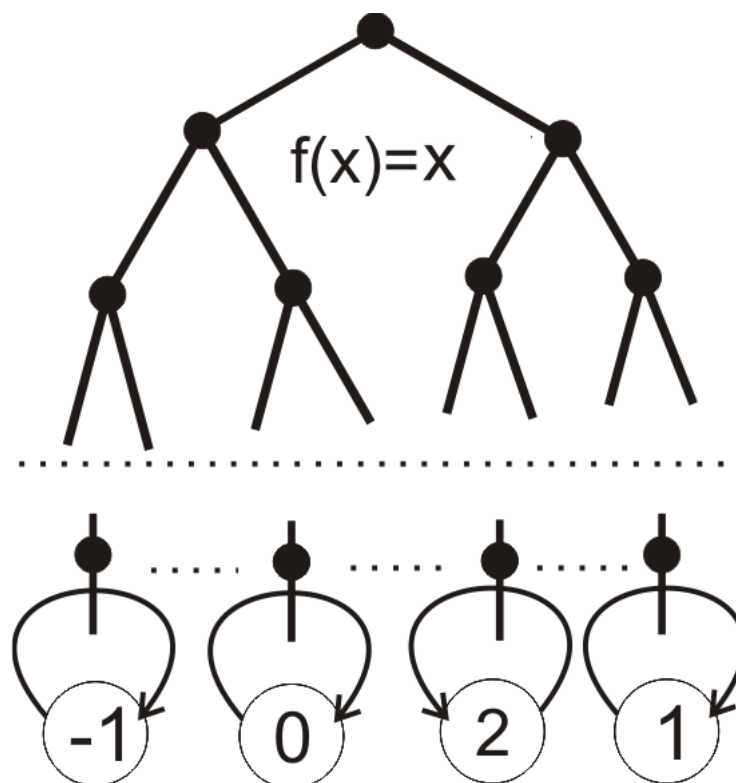


Рис. 17: Дерево типу для тотожного автоморфізму

При такому представленні добутку автоморфізмів відповідає добуток матриць(рис.18).

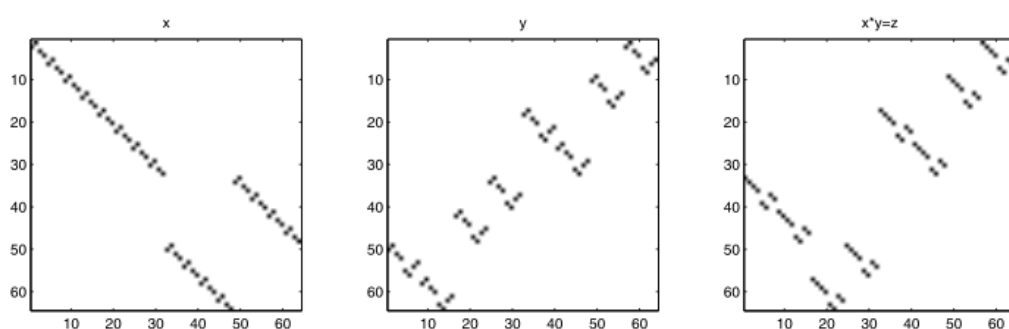
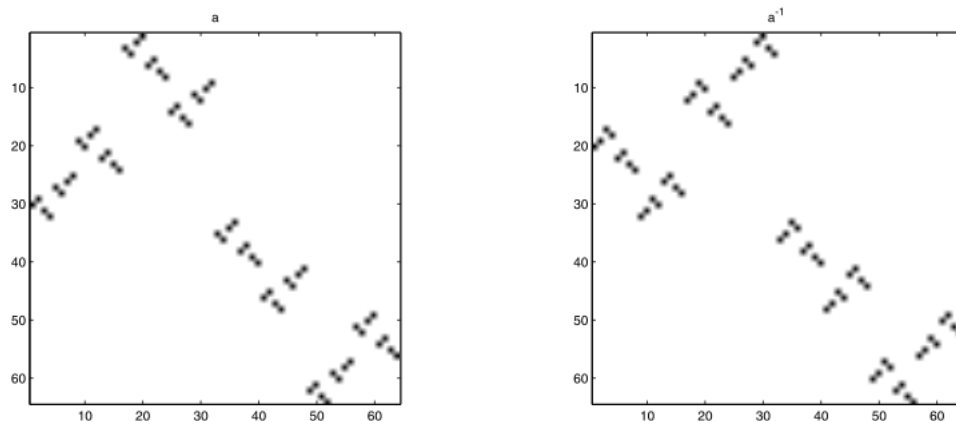


Рис. 18: Добуток матриць автоморфізмів

оберненому автоморфізму відповідає обернена матриця, де під крапками розуміються 1-ці (рис.19).

Зауважимо, що для матриці автоморфізма дерева обернена до неї матриця співпадає з транспонованою.

Рис. 19: Матриці автоморфізмів  $a$  та  $a^{-1}$ 

Наприклад епіморфний образ adding machine  $\varepsilon_{(7)}$  на дерево з 7-ма рівнями у матричному представленні задається наступною матрицею(рис.20).

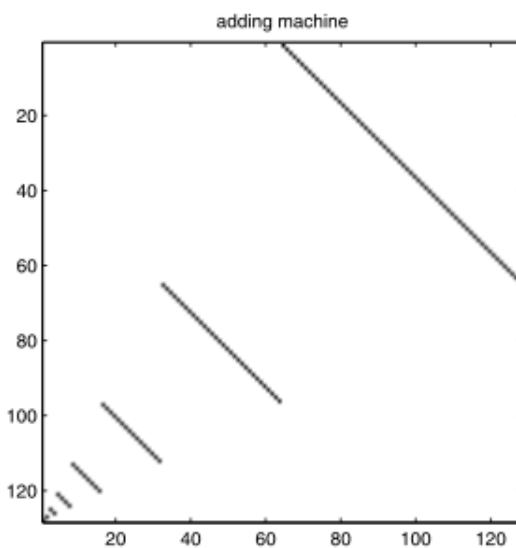


Рис. 20: adding machine

Дійсно, оскільки епіморфний образ adding machine на дерево з 7-ма рівнями задається співвідношенням  $\varepsilon_{(7)} = (id_{(6)}, \varepsilon_{(6)}) \circ \sigma$  ( де  $\varepsilon_{(7)}$ - епіморфний образ adding machine на дерево з 7-ма рівнями,  $\varepsilon_{(6)}$ - епіморфний образ adding machine на дерево з 6-ма рівнями та  $id_{(6)}$ - епіморфний образ

тотожного автоморфізму на дерево з 6-ма рівнями), то матриця для  $\varepsilon_{(7)}$  має вигляд:

$$\varepsilon_{(7)} = \begin{pmatrix} 0 & id_{(6)} \\ \varepsilon_{(6)} & 0 \end{pmatrix}$$

Аналогічно для  $\varepsilon_{(6)}$ ,  $\varepsilon_{(5)}$  і т.д.

#### Приклад 4.4.1.

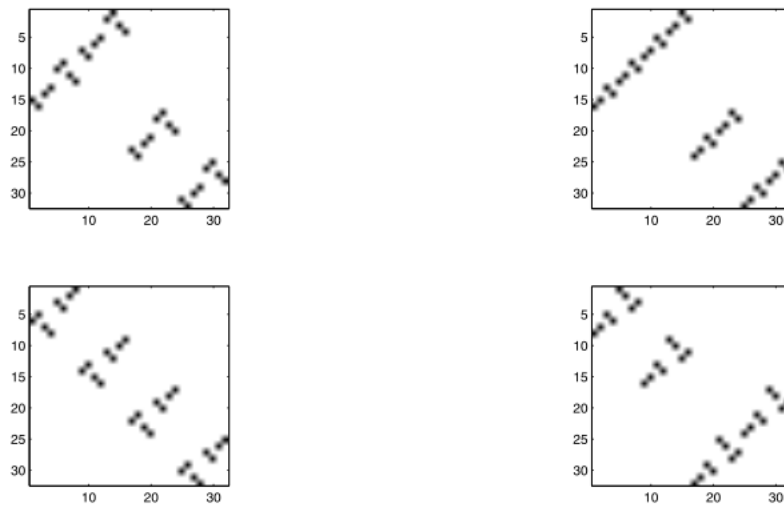


Рис. 21: Приклад чотирьох автоморфізмів дерева  $(T_2)_5$

**Приклад 4.4.2.** Обчислення матриці автоморфізму  $f(x) = x - 1$ , як оберненого до автоморфізму  $f(x) = x + 1$ :

**Приклад 4.4.3.** Обчислення матриці автоморфізму  $f(x) = x + k$ , як  $k$ -го степеня автоморфізма  $f(x) = x + 1$ :

$$k = 2 (\text{рис. 23})$$

$$k = 3 (\text{рис. 24})$$

**Приклад 4.4.4.** Обчислення матриці автоморфізму  $f(x) = ax$ , як розв'язку рівняння  $X^{-1}AX = B$ , де  $A$  - матриця автоморфізму  $f(x) = x + 1$ ,  $B$  - матриця автоморфізму  $f(x) = x + a$ :

$$a = 3 (\text{рис. 25})$$

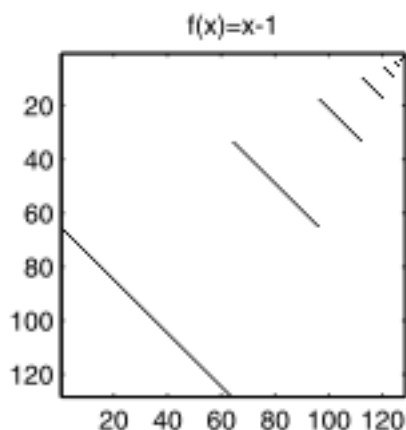


Рис. 22: Матриця автоморфізму  $f(x) = x - 1$

Для автоморфізма дерева  $n$ -го рівня, що задається матрицею  $A$ , будується матриця типу  $A_T = \text{sign}(\sum_{k=1}^{2^n} A^k)$ , за допомогою якої можна побудувати дерево типу для автоморфізму  $A$ , де

$$(\text{sign}(A))_{ij} = \text{sign}(A_{ij})$$

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

#### 4.5 Зв'язок між представленнями

Опишемо зв'язок між представленнями, побудованими в попередніх розділах. На рисунку 26 маємо представлення adding machine у п'яти вищезгаданих мовах: Побудуємо по функції  $f(x) = 3x$  її алгебраїчний запис.

Подіємо на 2-адичні послідовності  $x_0$  та  $x_1$  функцією  $f$  (де  $x$  - це 2-адичний розклад числа  $x$ ).

$$x_0 = 2x$$

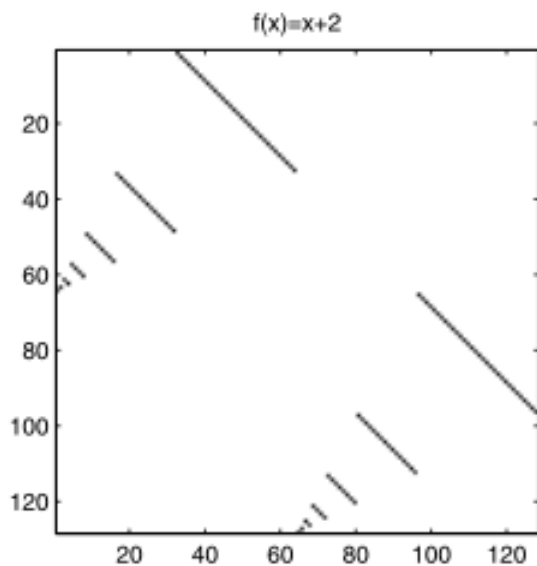


Рис. 23: Матриця автоморфізму  $f(x) = x + 2$

$$3(x0) = 3(2x) = 2(3x) = (3x)0$$

$$x1 = 2x + 1$$

$$3(x1) = 3(2x + 1) = 2(3x + 1) + 1 = (3x + 1)1$$

Тобто

$$3x = (3x, 3x + 1).$$

За допомогою алгебраїчного запису представимо автоморфізми у автоматному вигляді. Для *adding machine*

$$x + 1 = (id, x + 1) \circ \sigma$$

тобто маємо 2-становий автомат:

Для функції  $f(x) = 3x$

$$3x = (3x, 3x + 1)$$

$$3x + 1 = 3x \circ (x + 1) = (3x, 3x + 1) \circ (id, x + 1) \circ \sigma = (3x, 3x + 2) \circ \sigma$$

$$3x + 2 = 3x \circ (x + 2) = (3x, 3x + 1) \circ (x + 1, x + 1) = (3x + 1, 3x + 2) \circ \sigma$$

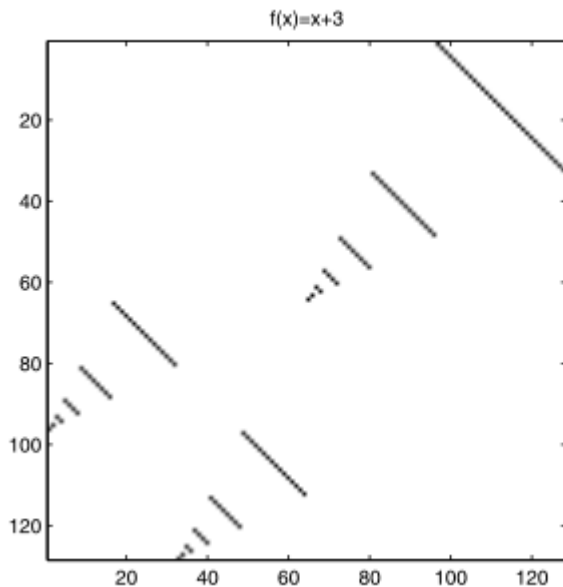


Рис. 24: Матриця автоморфізму  $f(x) = x + 3$

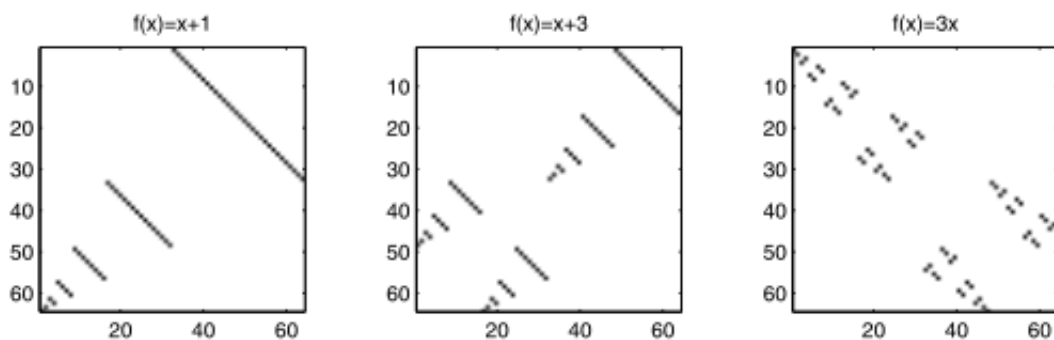


Рис. 25: Матриця автоморфізму  $f(x) = 3x$

Маємо 3 стани  $3x$ ,  $3x + 1$  та  $3x + 2$ .

Стани  $3x$  та  $3x + 2$  мають тип  $id$ , стан  $3x + 1$  має тип  $\sigma$ :

Змінюючи ініціальний стан отримуємо автомати для функцій  $f(x) = 3x + 1$  та  $f(x) = 3x + 2$ :

5-становий автоморфізм, що задається функцією  $f(x) = 5x$  визначається наступними співвідношеннями:

$$a_0 = (a_0, a_2)$$

$$a_1 = (a_0, a_3) \circ \sigma$$

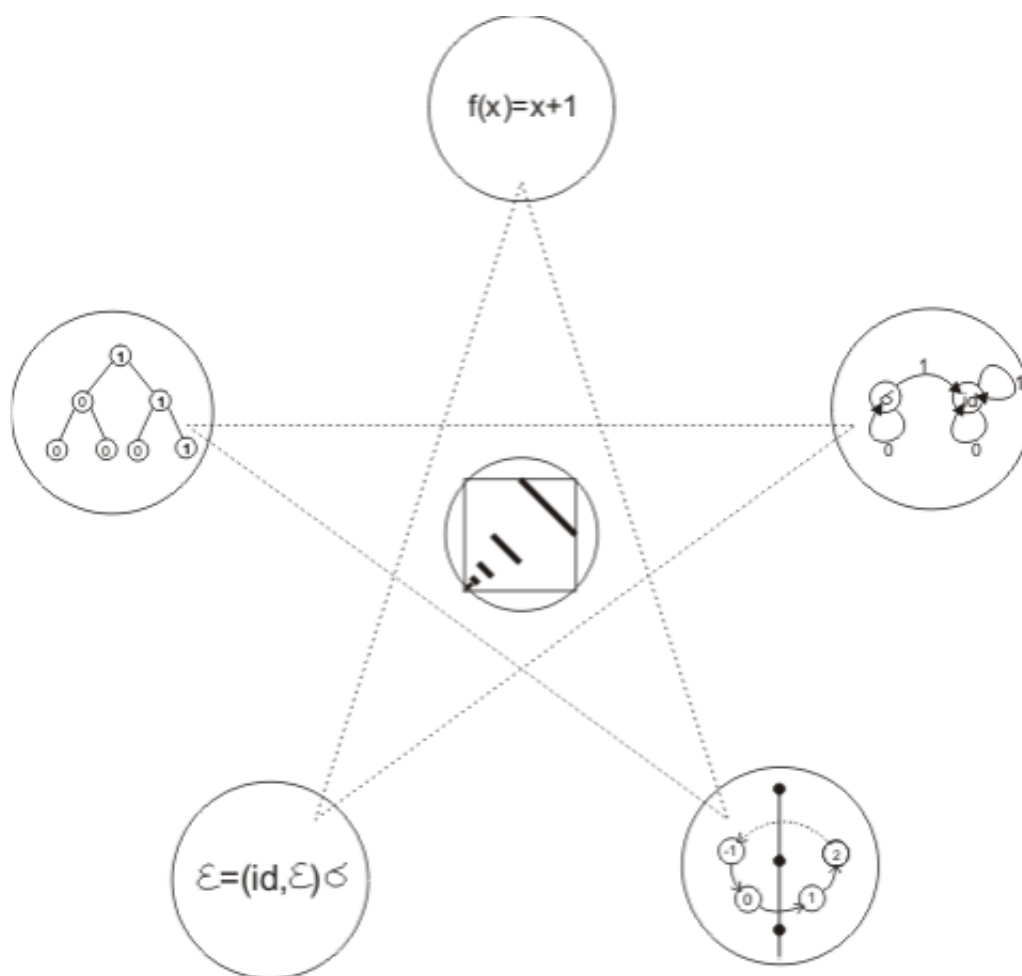


Рис. 26: Представлення adding machine у різних мовах

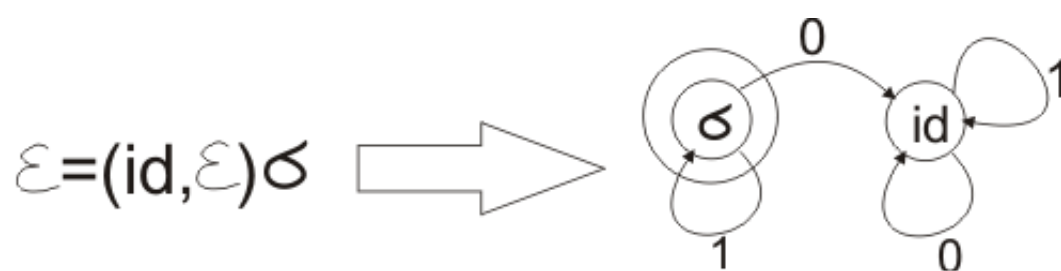


Рис. 27:

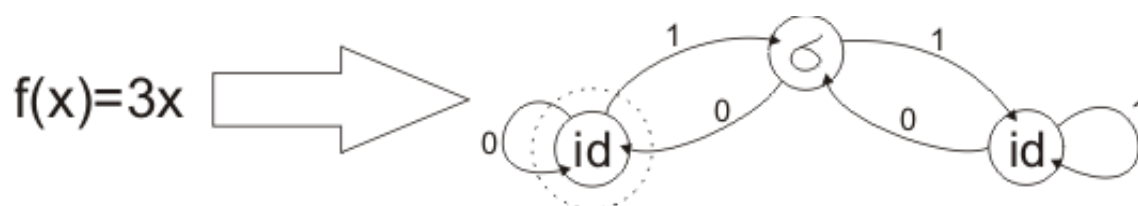


Рис. 28:

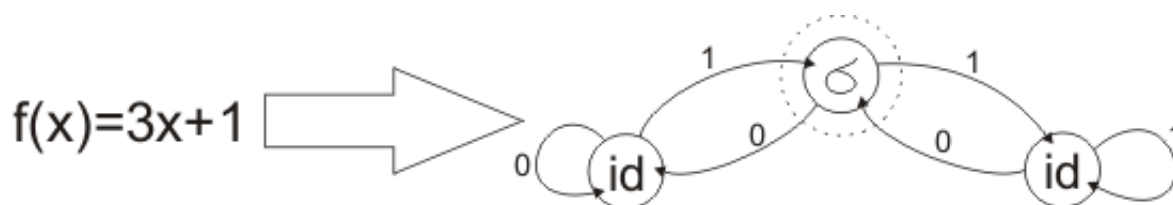


Рис. 29:

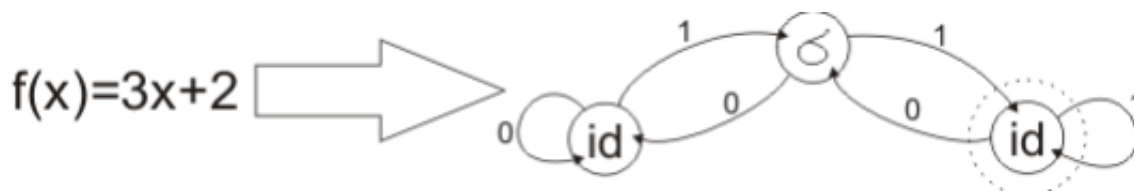


Рис. 30:

$$a_3 = (a_1, a_4) \circ \sigma$$

$$a_2 = (a_1, a_3)$$

$$a_4 = (a_2, a_4)$$

з ініціальним станом  $a_0$ . Змінюючи ініціальний стан отримуємо автомати для функцій  $f(x) = 5x + 1$   $f(x) = 5x + 2$   $f(x) = 5x + 3$  та  $f(x) = 5x + 4$ . Покажемо, як по автоматі будується портрет автоморфізму.

Автомат з початковим ініціальним станом задає автоморфізм двійкового дерева. З початкового ініціального стану виходять дві стрілки, помічені 0 та 1, кінцями яких є стани  $a_0$  та  $a_1$  відповідно.

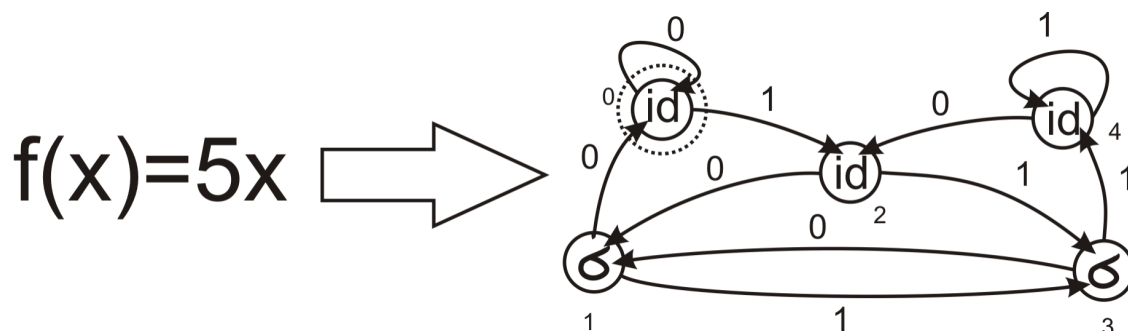


Рис. 31:

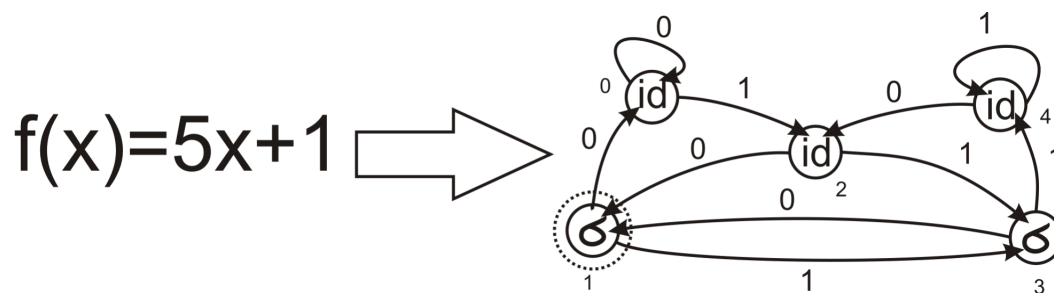


Рис. 32:

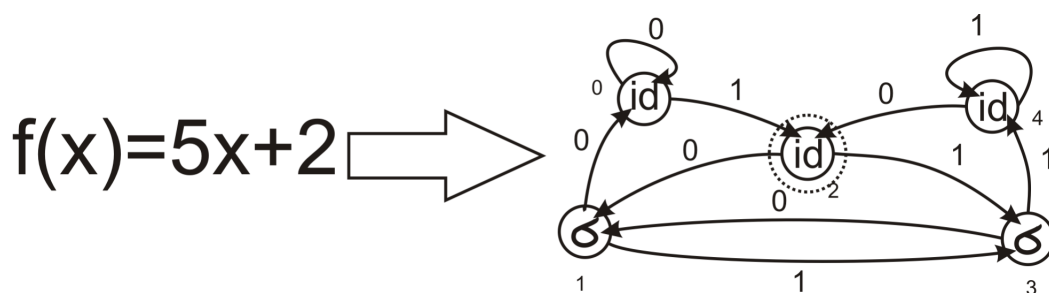


Рис. 33:

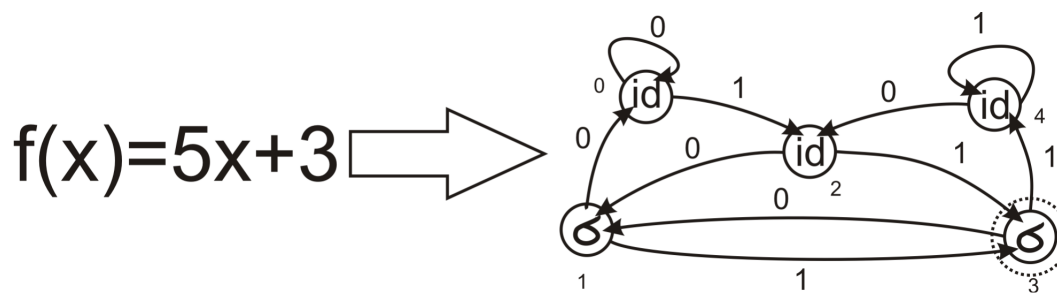


Рис. 34:

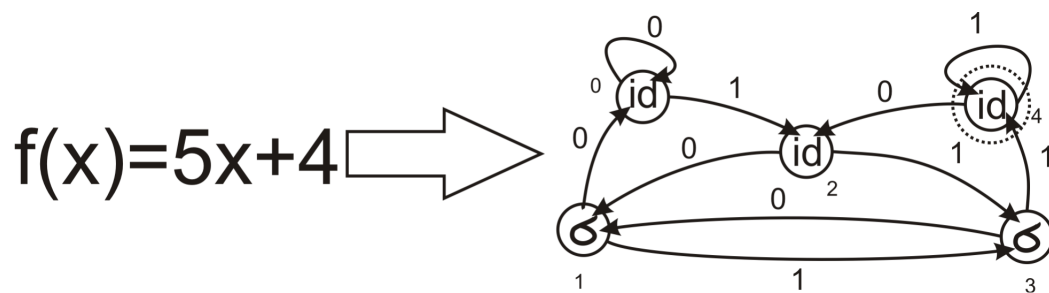


Рис. 35:

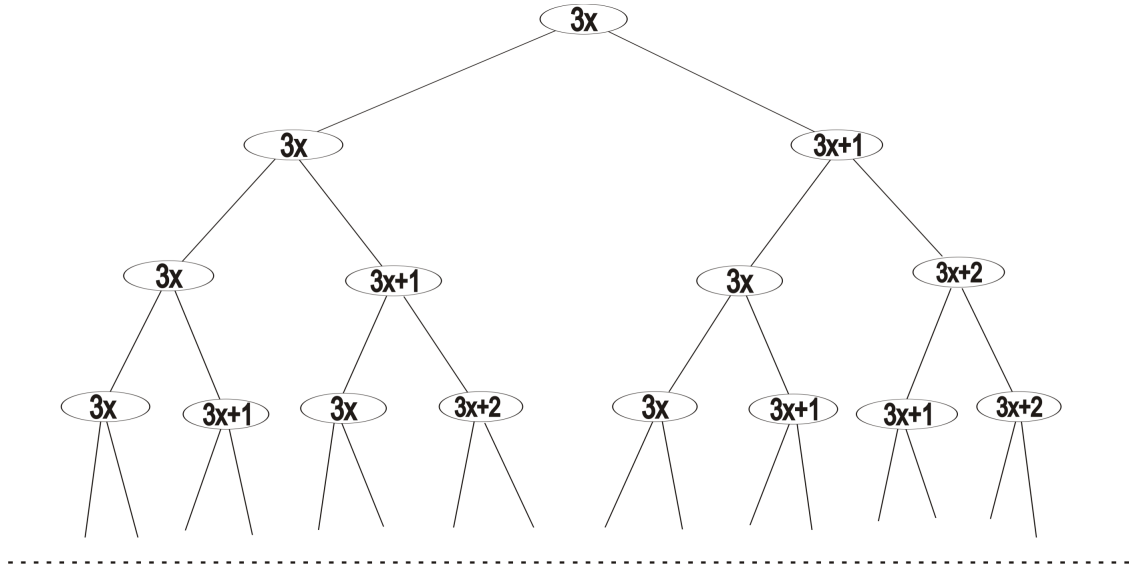


Рис. 36:

Автомат з початковим станом  $a_0$  задає дію на ліве піддерево, автомат з початковим станом  $a_1$  задає дію на праве піддерево, і т.д. Наприклад, для автоморфізму  $f(x) = 3x$  маємо:

$$3x = (3x, 3x + 1)$$

$$3x + 1 = (3x, 3x + 2) \circ \sigma$$

$$3x + 2 = (3x + 1, 3x + 2)$$

Приймаючи до уваги, що автоморфізм  $f(x) = 3x + 1$  переставляє вершини першого рівня дерева  $T_2$ , а автоморфізми  $f(x) = 3x$  та  $f(x) = 3x + 2$  залишають на місці вершини першого рівня, отримуємо портрет для автоморфізму  $f(x) = 3x$ :

По функціональному представленню автоморфізму  $a$

$$a : x \rightarrow f(x)$$

побудуємо орієнтований граф. Кожен цикл цього графа буде мати вигляд

$$\dots \rightarrow f^{-1}(x_0^{(1)}) \rightarrow f^0(x_0^{(1)}) \rightarrow f^1(x_0^{(1)}) \rightarrow f^2(x_0^{(1)}) \dots$$

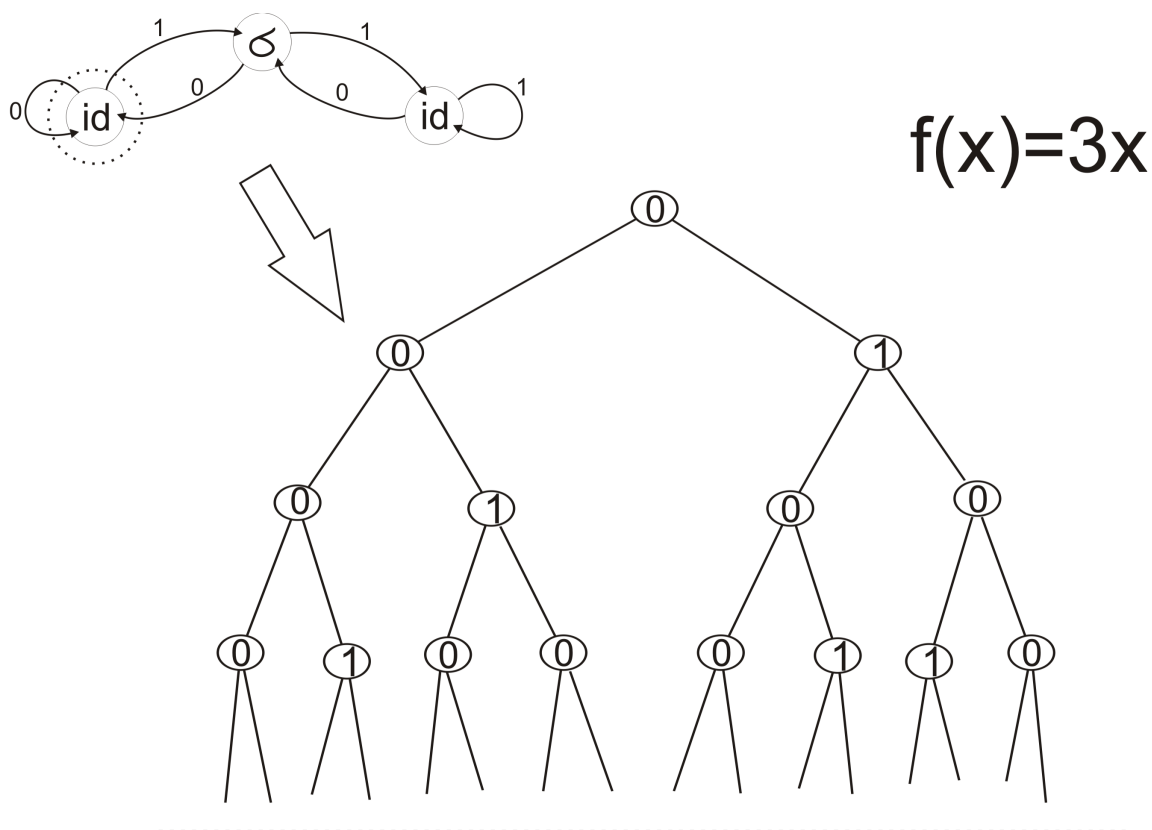


Рис. 37:

$$\dots \rightarrow f^{-1}(x_0^{(2)}) \rightarrow f^0(x_0^{(2)}) \rightarrow f^1(x_0^{(2)}) \rightarrow f^2(x_0^{(2)}) \dots$$

.....

$$\dots \rightarrow f^{-1}(x_0^{(k)}) \rightarrow f^0(x_0^{(k)}) \rightarrow f^1(x_0^{(k)}) \rightarrow f^2(x_0^{(k)}) \dots$$

.....

де кінці  $x_0^{(k_1)}$  та  $x_0^{(k_2)}$  для  $k_1 \neq k_2$  належать різним циклам, тобто не існує  $p \in \mathbb{Z}_2$ , такого, що

$$f^p(x_0^{(k_1)}) = x_0^{(k_2)}$$

Наприклад, для автоморфізма вигляду  $f(x) = 5x + 1$  маємо єдиний цикл вигляду:

$$\dots \rightarrow -\frac{1}{5} \rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow 6 \rightarrow 31 \rightarrow 0 \dots$$

Це представлення зручно використовувати для знаходження  $\chi$  в рівнянні

спряженості

$$\chi^{-1} \circ a \circ \chi = b.$$

Наприклад, якщо автоморфізми  $a$  та  $b$  в представленні орієнтованими графами мають єдиний цикл:

$$a = \dots \rightarrow f^{-1}(x_0^{(a)}) \rightarrow f^0(x_0^{(a)}) \rightarrow f^1(x_0^{(a)}) \rightarrow f^2(x_0^{(a)}) \dots,$$

$$b = \dots \rightarrow f^{-1}(x_0^{(b)}) \rightarrow f^0(x_0^{(b)}) \rightarrow f^1(x_0^{(b)}) \rightarrow f^2(x_0^{(b)}) \dots,$$

то автоморфізм  $\chi$  задається наступним чином:

$$f^{-1}(x_0^{(a)}) \rightarrow f^{-1}(x_0^{(b)})$$

$$x_0^{(a)} \rightarrow x_0^{(b)}$$

$$f(x_0^{(a)}) \rightarrow f(x_0^{(b)})$$

.....

$$f^k(x_0^{(a)}) \rightarrow f^k(x_0^{(b)}), \forall k \in \mathbb{Z}_2.$$

Покладемо  $a(x) = x + 1$ ,  $b(x) = x + 3$ . Для автоморфізмів  $a$  та  $b$  в представленні орієнтованими графами маємо по одному циклу наступного вигляду:

$$a = \dots \rightarrow -1 \rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \dots,$$

$$b = \dots \rightarrow -3 \rightarrow 0 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \dots$$

Тобто автоморфізм  $\chi$  задається наступним чином:

$$-1 \rightarrow -3$$

$$0 \rightarrow 0$$

$$1 \rightarrow 3$$

.....

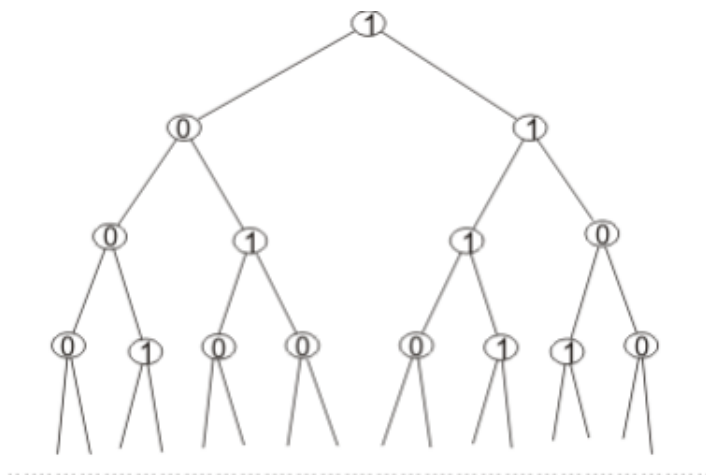


Рис. 38:

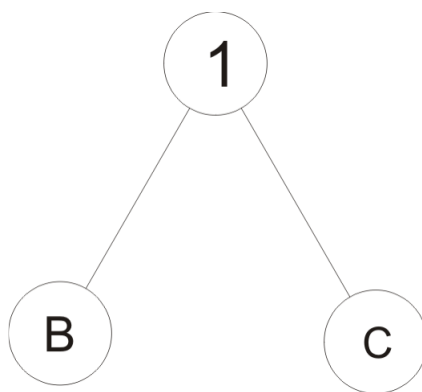


Рис. 39:

$$k \rightarrow 3k, \forall k \in Z_2.$$

З цього отримуємо, що у представленні автоморфізмів 2-адичними функціями  $\chi(x) = 3x$ . Дійсно:

$$\begin{aligned} (3x)^{-1} \circ (x + 1) \circ 3x &= \frac{1}{3}x \circ (x + 1) \circ 3x = \\ &= \left(\frac{1}{3}x + 1\right) \circ 3x = 3\left(\frac{1}{3}x + 1\right) = x + 3. \end{aligned}$$

Побудова по портрету матриці.

Нехай автоморфізм  $a \in AutT_2$  задано портретом: Користуючись правилом, що автоморфізму  $a$ , що задається співвідношенням  $a = (b, c) \circ \sigma$  відповідає портрет та матриця

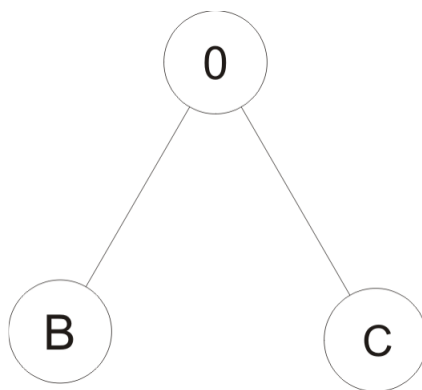


Рис. 40:

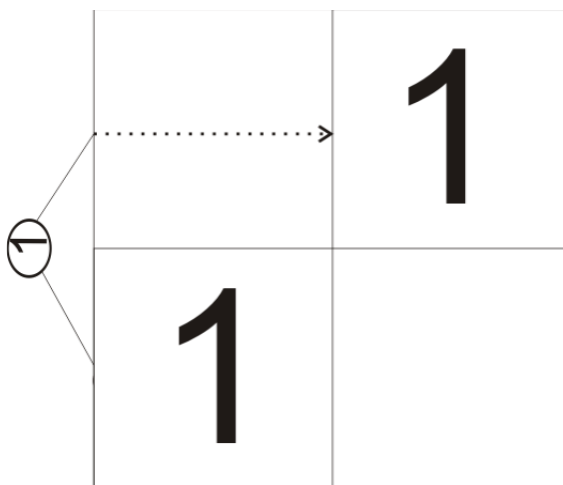


Рис. 41:

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

а автоморфізму, що задається співвідношенням  $a = (b, c)$  відповідає портрет

та матриця

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

отримаємо наступну послідовність кроків побудови матриці автоморфізму: 1-й крок 2-й крок 3-й крок Продовжуючи цю процедуру до  $n$ -го кроку отримаємо матричне представлення для епіморфного образу ав-

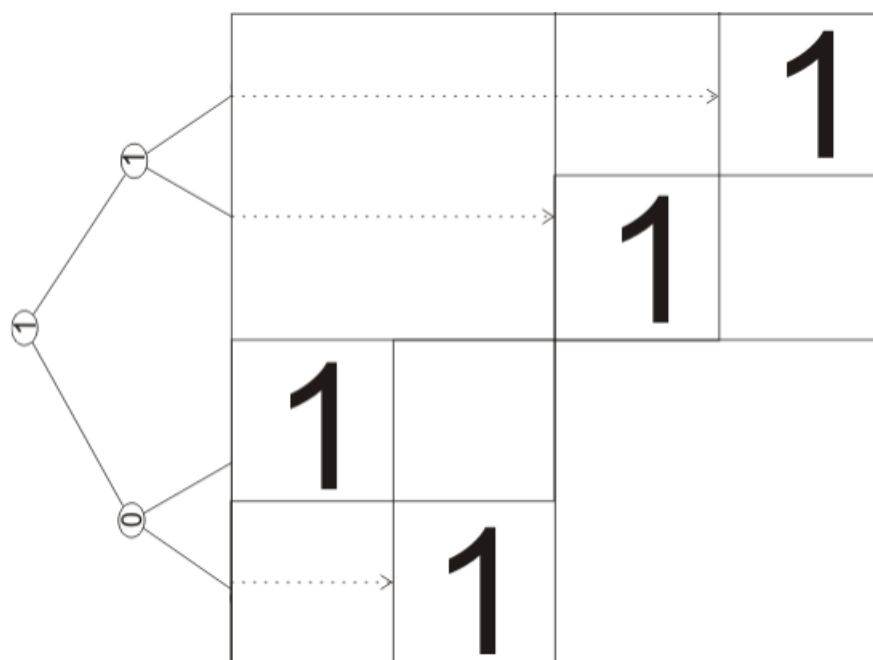


Рис. 42:

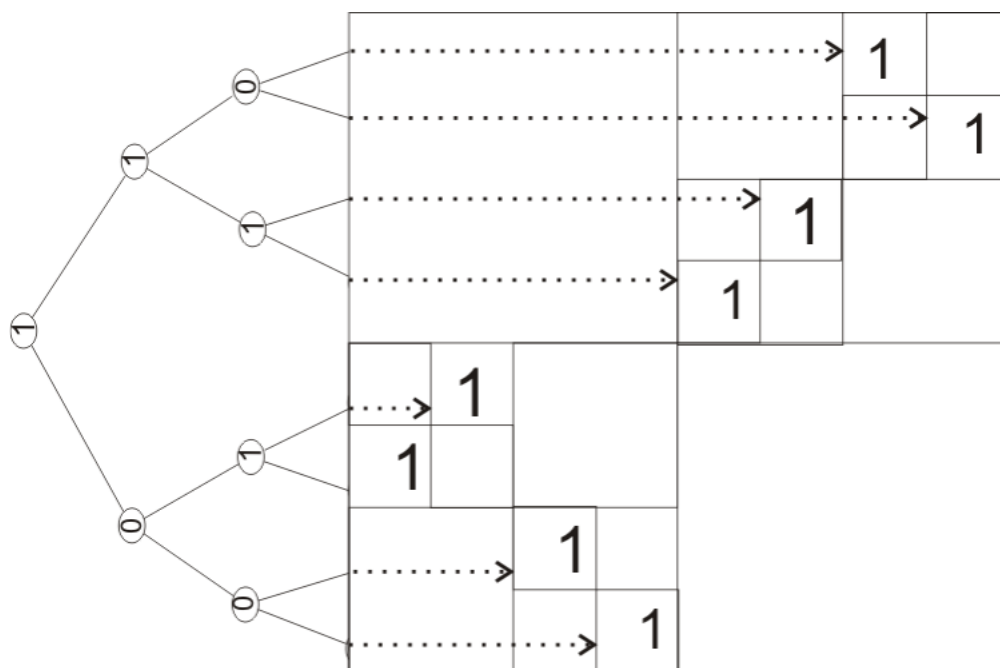


Рис. 43:

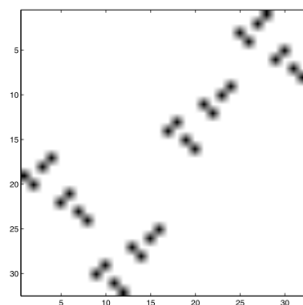


Рис. 44:

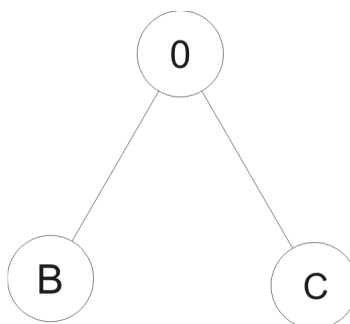


Рис. 45:

томорфізма на  $(AutT_2)_n$ .

Побудова по матриці портрету.

Побудуємо портрет автоморфізму  $\alpha$  по його матриці  $A$ : Оскільки матриці

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

відповідає портрет

а матриці

$$\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$$

портрет то побудова портрету зводиться до послідовного використання функції, оберненої до  $lur$ .

Застосувавши функцію  $lur$  до матриці автоморфізму  $A$  чотири ра-

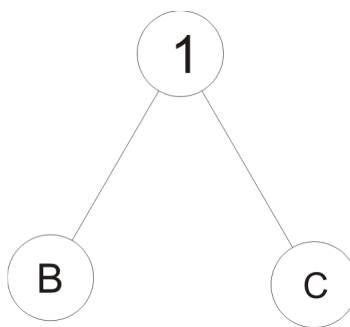


Рис. 46:

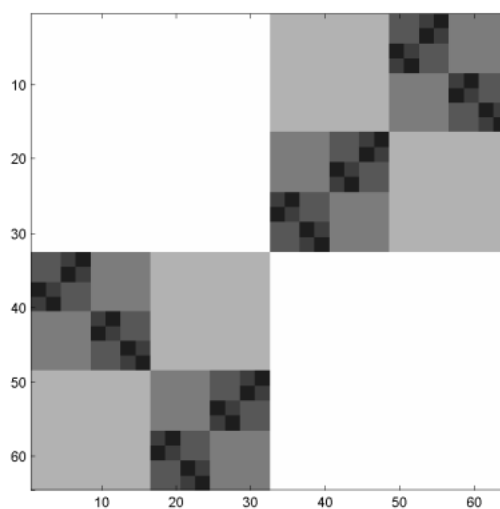


Рис. 47:

зи отримаємо:  $lup^{(4)}(A)$  повертає матрицю портрет для якої має вигляд  
Застосуємо цю операцію послідовно для:

$lup^{(4)}(A) lup^{(3)}(A) lup^{(2)}(A)$  і остаточно маємо портрет для автоморфізму  $a$ , побудований по матриці  $A$ :

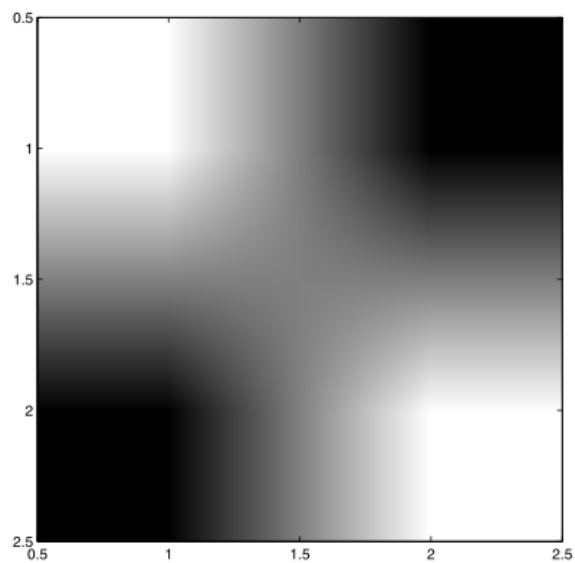


Рис. 48:

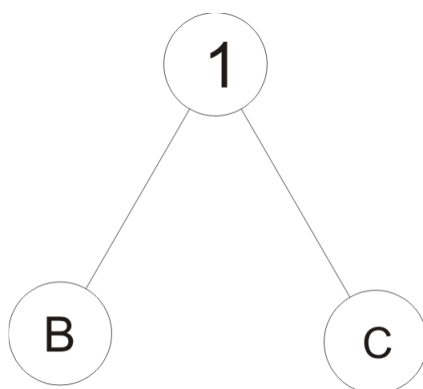


Рис. 49:

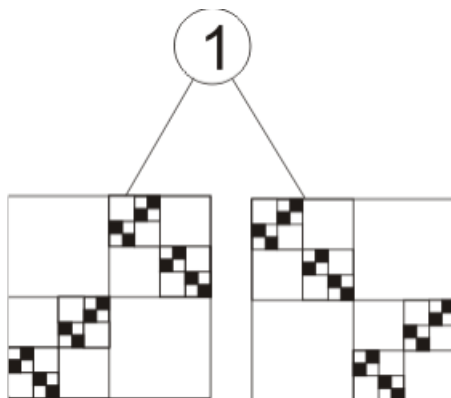


Рис. 50:

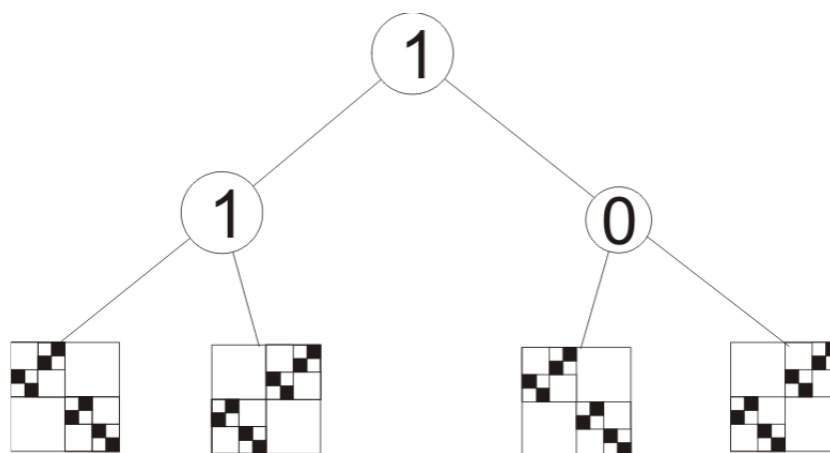


Рис. 51:

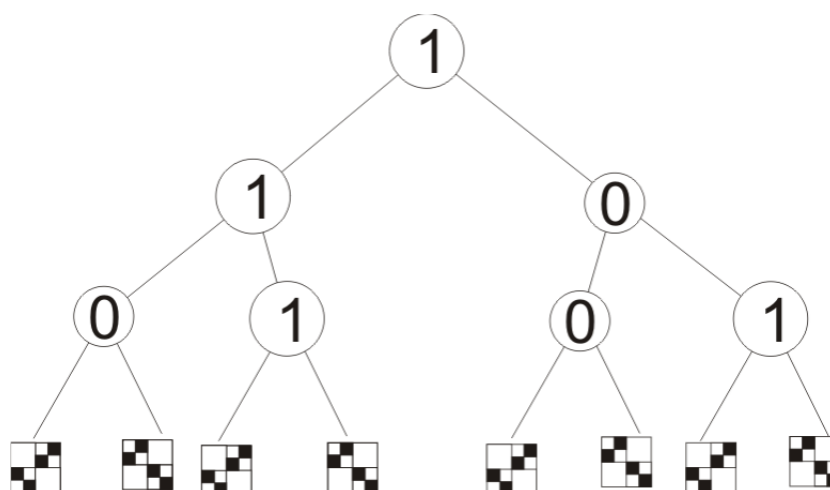


Рис. 52:

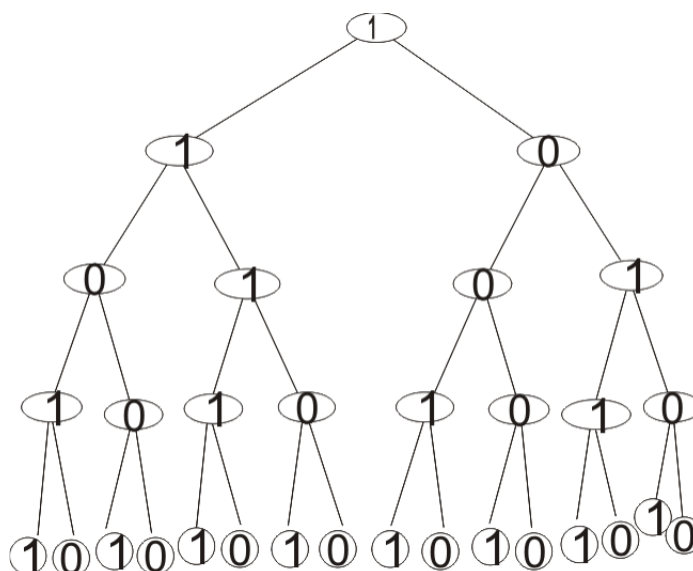


Рис. 53:

## Список використаних джерел

- [1] Коблиц Н.  $p$ -адические числа,  $p$ -адический анализ и дзета-функции. Пер. с англ. М.: Мир. 1981. 192с.
- [2] Суцанский В.И. Группы изометрий  $p$ -пространства Бэра. Докл. АН УССР.-1984.-№8.-с.28-30
- [3] Суцанский В.И. Сплетения по последовательности групп подстановок и финитно-аппроксимируемые группы . Докл. АН СССР.-1984.-№2.-с.19-22
- [4] *R.I.Grigorchuk, V.V.Nekrashevych, V.I.Sushchansky* Automata, dynamical systems and groups. Proc. V.A. Steklov Inst. Math., Vol. 231 (2000), 134-215.
- [5] *V.Nekrashevych* Self-similar groups. AMS: Mathematical Surveys and Monographs, Vol.117, 231 pp., 2005.

- [6] Brunner A. Sidki S. On the automorphism group of the one-rooted binary tree //J. Algebra. - 1997. - V.195. - P. 465-486.
- [7] Боднарчук Ю.В., Морозов Д.І. Будова централізаторів елементів максимального про-порядку в групі автоморфізмів бінарного дерева. Наукові записки НаУКМА.- Т.39. Фізико-математичні науки. - 2005. -с.25-27.
- [8] Боднарчук Ю.В., Морозов Д.І. Розширені 2-адичні числа як централізатори автоморфізмів регулярного кореневого дерева валентності 3. Наукові записки НаУКМА.- Т.51. Фізико-математичні науки. - 2006. -с.4-7.
- [9] Р. И. Григорчук, В. В. Некрашевич, В. И. Сущанский, Автоматы, динамические системы и группы, Тр. МИАН, 2000, 231, 134–214.