

Верхня оцінка відновлюючого спектрального числа для зважених графів

Лариса Тимошкевич, Олександра Пилипіва

larysatymosh@gmail.com, s.pylypiva@gmail.com

Національний університет «Києво-Могилянська академія»

Різнманітні задачі відновлення для графів посідають значне місце в спектральній теорії графів (див. [1], [2], [3]).

Зваженим графом $\mathbf{G}$ називатимемо таку пару (G, w) , де G — це простий граф, а $w : E \rightarrow (0, +\infty)$ — вагова функція, тобто відображення множини ребер $E(G)$ у множину додатних дійсних чисел.

Постановка задачі. Розглянемо наступну задачу відновлення для зважених графів: нехай нам відомий граф G , ми хочемо однозначно відновити вагову функцію w зваженого графа $\mathbf{G} = (G, w)$ за спектрами певних його індукованих підграфів. Тобто потрібно аби за значеннями спектрів даних підграфів ваги на ребрах вихідного графа знаходилися однозначно. Спектр підграфа будемо називати *підспектром*. Мінімальну кількість таких підспектрів будемо називати *відновлюючим спектральним числом* графа G , позначення: $Srn(G)$. Для кожного графа G виникає дві задачі: навести приклад підспектрів, за якими можна здійснити відновлення та знайти відновлююче спектральне число.

Лема 1. Відновлення ваги для кожного ребра зваженого графа $\mathbf{G}$ за спектрами його підграфів і відновлення за характеристичними многочленами цих підграфів є еквівалентними задачами.

Твердження 1. Для будь-якого $n \geq 3$ можна відновити зважений граф $\mathbf{A}_n$ (рис. 1) за спектром всього графа $\sigma(\mathbf{A}_n)$ і спектром $\sigma(\mathbf{A}_{n-1})$.

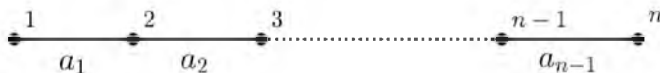


Рис. 1: $\mathbf{A}_n$

Для зваженого уніциклічного графа та дерев, розглянемо поставлену задачу і наведемо верхню оцінку числа Srn . Також розглянемо формулювання теореми, на якій базується доведення наступних тверджень. Позначимо через $cv(G)$ кількість висячих вершин дерева G . Назвемо одну з висячих вершин коренем. Через $CV(G)$ позначимо множину висячих вершин відмінних від кореня.

Теорема 1. Нехай F — довільний зважений граф, $z \in V(F)$ та H — дерево з коренем y . Граф G — об'єднання графів F , H та ребра, що з'єднує

вершини z та y . Тоді за спектрами $\mathbf{G}$ та всіх підграфів виду $\mathbf{G} - v$, де v пробігає $CV(H)$, можна відновити ваги на ребрах графа $\mathbf{H}$, вагу на ребрі (z, y) , а також $P_{\mathbf{F}}, P_{\mathbf{F}-\{z\}}$.

Теорема 2. (оцінка Srn для дерев) Нехай $\mathbf{G} = (G, w)$ і граф G — дерево, тоді $Srn(G) \leq cv(G)$ та для відновлення вагової функції w достатньо знати спектри таких підграфів: $\mathbf{G}$ та всіх підграфів вигляду $\mathbf{G} - v$, де v пробігає множину $CV(G)$.

Теорема 3. (оцінка Srn для уніциклічних графів) Нехай $\mathbf{G} = (G, w)$ і G — уніциклічний граф, тоді $Srn(G) \leq cv(G) + 3$.

Для довільного зваженого графа кактуса-ланцюжка $\mathbf{G}$, зображеного на рисунку 2, розглянемо поставлену задачу.

Нехай елементами ланцюга є графи $F_1, \dots, F_n$ і для будь-якого $i \in \{1, \dots, n\}$: F_i — цикл C_m , де $m \geq 4$, $\forall j \in \{1, \dots, n-1\}$ пронумеруємо вершини, що належать множині вершин F_j і множині вершин F_{j+1} , тобто $V(F_j) \cap V(F_{j+1}) = j$. Також вершини, у яких степінь дорівнює 4, мають бути не суміжними.

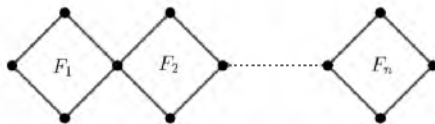


Рис. 2: $\mathbf{G}$ — граф кактус-ланцюг

Твердження 2. Нехай $\mathbf{G} = (G, w)$ і граф G — кактус-ланцюг, тоді $Srn(G) \leq 4$ та для відновлення вагової функції w достатньо знати такі чотири підспектри: $\sigma(\mathbf{A}_B)$, $\sigma(\mathbf{A}_B - v)$, $\sigma(\mathbf{A}_T)$, $\sigma(\mathbf{A}_T - v)$, де A_B — ланцюг, що знаходиться в нижній області, A_T — ланцюг, що знаходиться у верхній області (див рис. 3).

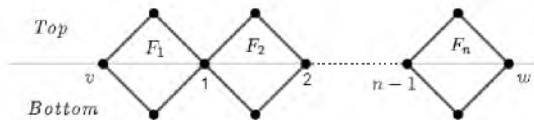


Рис. 3:

1. Cvetkovic D.M. The reconstruction problem for characteristic polynomials of graphs. Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. – 1975. – 498–541. – P. 45–48.
2. Hogben L. Spectral Graph Theory and the Inverse Eigenvalue Problem of a Graph. Chamchuri Journal of Mathematics. – 2009. – vol 1, no. 1 – P. 51-72.
3. van Dam E.R., Haemers W.H. Which graphs are determined by their spectrum. Linear Algebra and its Applications. – 2003. – vol. 373. – P. 241-272.
4. Тимошкевич Л.М. Обернені спектральні задачі на реберно-зважених графах. Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2013. – № 14 – С. 165-175.
5. Тимошкевич Л. М. Прямі та обернені спектральні задачі зважених скінченних графів і злічених графів Кокстера. Дисертація канд. фіз.-мат. наук: 01.01.06, Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка. – Київ, 2015. – 160 с.