

Міністерство освіти і науки України  
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»  
Кафедра факультету інформатики

## **ТЕОРІЯ РАМСЕЯ**

**Курсова робота за спеціальністю "Прикладна математика"**

Керівник курсової роботи  
канд. Фіз.-мат. наук,  
старший викладач  
Тимошкевич Л. М.

\_\_\_\_\_  
(підпис)

«\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2020р.

Виконав студент

3-го року навчання

Моргачов І. О.

«\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2020р.

## Тема: Теорія Рамсея

### Календарний план виконання роботи:

| № п/п | Назва етапу курсової роботи                                                       | Термін виконання етапу | Примітка |
|-------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------|----------|
| 1.    | Отримання літератури за темою курсової роботи.                                    | 24.10.2020             |          |
| 2.    | Огляд літератури за темою роботи.                                                 | 01.10.2020             |          |
| 3.    | Дослідження та аналіз літератури за темою роботи.                                 | 25.11.2020             |          |
| 4.    | Дослідження та аналіз отриманих результатів/питань з керівником (за літературою). | 07.01.2021             |          |
| 5.    | Отримання задач для курсової роботи.                                              | 10.01.2021             |          |
| 6.    | Дослідження та виконання задач для курсової роботи.                               | 15.01.2021             |          |
| 7.    | Дослідження та аналіз отриманих результатів/питань з керівником (за задачами).    | 17.01.2021             |          |
| 8.    | Корегування роботи.                                                               | 30.01.2021             |          |
| 9.    | Оформлення курсової роботи.                                                       | 10.04.2021             |          |
| 10.   | Створення презентації до курсової роботи.                                         | 10.05.2021             |          |
| 11.   | Захист курсової роботи.                                                           | 20.05.2021             |          |

# Зміст

|                                                               |    |
|---------------------------------------------------------------|----|
| <b>1 Вступ</b>                                                |    |
| 1.1 Актуальність .....                                        | 4  |
| 1.2 Мета та цілі теорії Рамсея.....                           | 5  |
| <b>2 Теорія Рамсея та двокольнірові числа Рамсея</b>          |    |
| 2.1 Теорія Рамсея .....                                       | 6  |
| 2.2 Числа Рамсея та їх властивості.....                       | 7  |
| 2.3 Знаходження точних значень чисел Рамсея.....              | 10 |
| 2.4 Оцінка чисел Рамсея зверху та знизу.....                  | 15 |
| <b>3 Теорія Рамсея та багатокольорові числа Рамсея</b>        |    |
| 3.1 Багатокольорові числа Рамсея.....                         | 18 |
| 3.2 Властивості та теореми багатокольорових чисел Рамсея..... | 19 |
| 3.3 Теорема Шура .....                                        | 21 |
| <b>4 Практична частина</b>                                    |    |
| <b>5 Висновки</b>                                             |    |
| <b>6 Список літератури</b>                                    |    |

# 1 Вступ

## 1.1 Актуальність

Сьогодні математика охоплює гігантську кількість різноманітних розділів, одним із яких є теорія Рамсея. Найбільш відомий опис розділу був сказаний ізраїльсько-американським математиком Теодором Моцкіном: «Повного хаосу не існує». Розділ був названий в честь англійського математика, філософа та економіста Френка Пламптона Рамсея, який в 1928 році довів, що в якійсь великій структурі завжди знайдеться якась конкретна підструктура. Але найбільший вклад в розвиток теорії Рамсея зробив Пал Ердеш, який через 3 роки після смерті Френка Рамсея, в 1933 році, разом із Джорджем Шекерешом заново відкрили теорію Рамсея. Після другого відкриття теорії Рамсея Ердеш почав досліджувати якого конкретно розміру має бути структура для гарантованого існування конкретної підструктури, роблячи велику кількість відкриттів.

Перевагою цього розділу є простота формулювання його задач. В класичному формулюванні цей розділ відповідає на питання «Скільки має бути елементів у деякому об'єкті для того, щоб гарантовано виконувалася якась умова чи існувала якась послідовність». Якщо більш практично, то можна сформулювати найпопулярнішу задачу - «Якщо серед присутніх людей на вечірці обрати 6 людей, то серед них обов'язково знайдеться або троє попарно знайомих, або троє попарно незнайомих». Ця задача являється відправною точкою в розумінні того, як працює теорія Рамсея, яка може допомогти в розв'язанні задач різноманітних прикладних задач довільних масштабів та складності.

Оскільки величезна кількість задач, навіть враховуючи сучасні технології

поки що не можливо розв'язати, хоча це і є всього-на-всього питанням часу, то зрозуміло що теорія Рамсея ще процесі свого розвитку. Тож логічним є такий висновок, що з вирішенням таких задач буде розвиватися теорія Рамсея та її можливості, актуальність котрої з часом буде рости.

## **1.2 Мета та цілі теорії Рамсея**

Мета курсової роботи полягає в дослідженні та застосуванні теорії Рамсея до різноманітних практичних задач і питань теорії Рамсея. Завдяки розумінню теоретичної та практичної складових, з'являється можливість як для подальшої праці з цим розділом математики так і для його застосування в інших галузях.

## 2 Теорія Рамсея та двокольорові числа Рамсея

### 2.1 Теорія Рамсея

#### Означення 1. [\[6\]](#)

*Теорія Рамсея* – розділ математики, котрий вивчає за яких умов в якихось випадково сформованих об'єктах з'явиться певна послідовність.

Класичне питання цього розділу математики: «Скільки має бути елементів у деякому об'єкті для того, щоб гарантовано виконувалася якась умова чи існувала якась послідовність?».

Розглянемо задачу про «вечірку», яка є частинним випадком і розкриває принцип роботи теорії Рамсея. Нехай на вечірці ми довільно обираємо 6 людей. Теорія Рамсея стверджує, що серед них є або троє попарно знайомих, або троє попарно незнайомих. Цю задачу можна вирішувати багатьма способами. Зазвичай першим на думку приходить спосіб «перебору», але в такому випадку ми муситимемо перебрати  $2^{15}$  комбінацій, що не є практично. За принципом Діріхле, зафіксуємо одну конкретну людину і розглянемо 2 випадки. Перший – ця людина знає трьох (або більше). Тоді або ця трійка попарно незнайома, або хтось з них знайомий і тоді, разом із зафіксованим, вони втрьох є попарно знайомими. В другому випадку – вона знає менше трьох. З цього слідує, що ця людина не знайома з трьома (або більше). Тоді ця трійка або попарно знайома, або хтось з них не знайомий і разом з зафіксованим вони утворюють трійку попарно незнайомих.

Узагальнимо цю задачу. Замість людей – об'єкти, замість 6 об'єктів та 2 типів знайомств – будь-які інші числа. Отже, тепер узагальнене визначення є зрозумілим.

Задачі теорії Рамсея зручно розглядати на мові графів. Вершинами – позначають об’єкти, а кольорами ребр – зв’язки.

## 2.2 Числа Рамсея та їх властивості

**Означення 2** (Рамсей, 1930). [\[10\]](#)

*Число Рамсея  $R(m, n)$*  – це найменше з таких натуральних чисел  $x$ , що для довільного розфарбування графа  $K_x$  в один з двох кольорів знайдеться або  $m$ -кліка першого кольору, або  $n$ -кліка другого кольору.

Або на прикладі класичної задачі: *Число Рамсея  $R(m, n)$*  – це найменше з таких натуральних чисел  $x$ , що серед довільних  $x$  людей знайдуться або  $m$  попарно знайомих, або  $n$  попарно незнайомих.

Тепер можемо визначити число Рамсея для класичної задачі як  $R(3, 3) = 6$ .

**Теорема 1** (Рамсей, 1930). [\[10\]](#)

Нехай дані числа  $x_1, \dots, x_n$ . Тоді існує таке число  $R$ , що при будь-якому розфарбуванні ребр повного графа на  $R$  вершинах в  $n$  кольорів, гарантовано знайдеться підграф  $i$ -го ( $i = 1, \dots, n$ ) кольору на  $x_i$ .

Ми можемо уявити, представляючи граф, наскільки велике має бути конкретне число Рамсея. Наприклад, зображено на рисунку 3.1, п’яти точок не достатньо для того, щоб якісь три точки утворили трикутник одного кольору. Отже, можна зробити висновок, що  $R(3,3) > 5$ . Аналогічно щодо інших графів:  $R(3, 4) > 8$  (рис. 3.2),  $R(3, 5) > 13$  (рис. 3.3),  $R(3, 6) > 17$  (рис. 3.4),  $R(3, 7) > 23$  (рис. 3.5),  $R(3, 8) > 27$  (рис. 3.6),  $R(3, 9) > 35$  (рис. 3.7),  $R(4, 4) > 17$  (рис. 3.8). Також можна знайти та довести деякі точні числа Рамсея (розглядається в розділі 2.3).

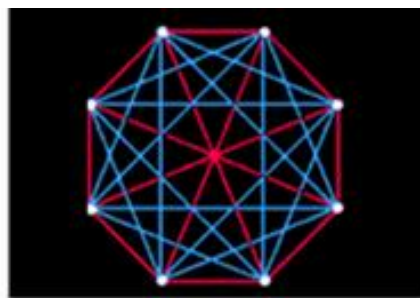


Рисунок 3.1 –  $5 < R(3, 3)$  [2] Рисунок 3.2 –  $8 < R(3, 4)$  [2]

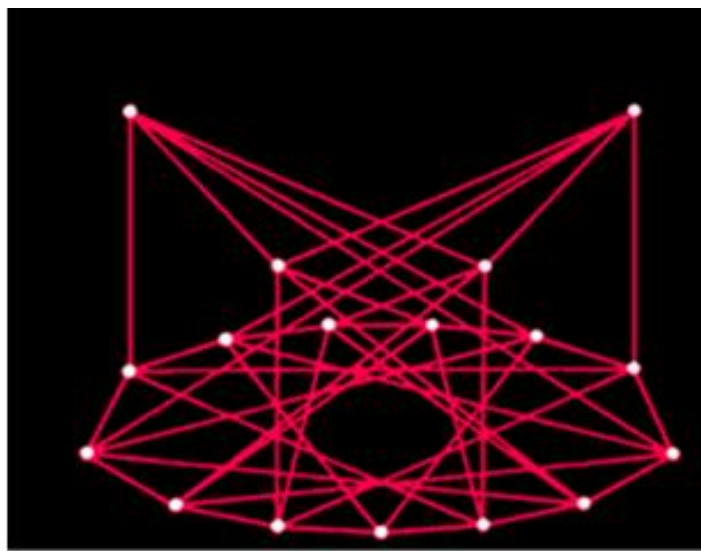
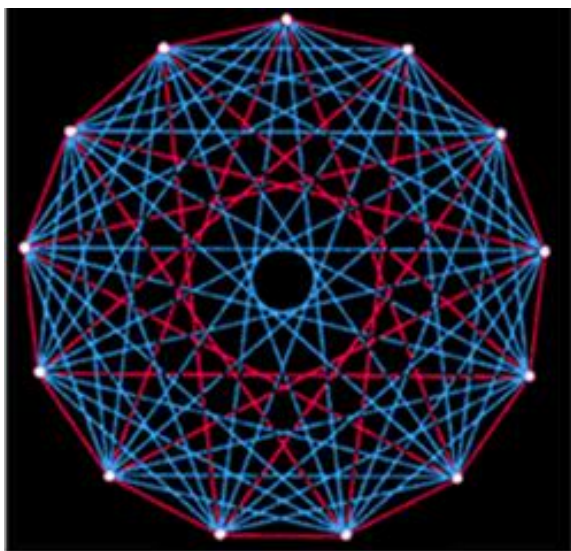


Рисунок 3.3 –  $13 < R(3, 5)$  [2]

Рисунок 3.4 –  $17 < R(3, 6)$  [2]

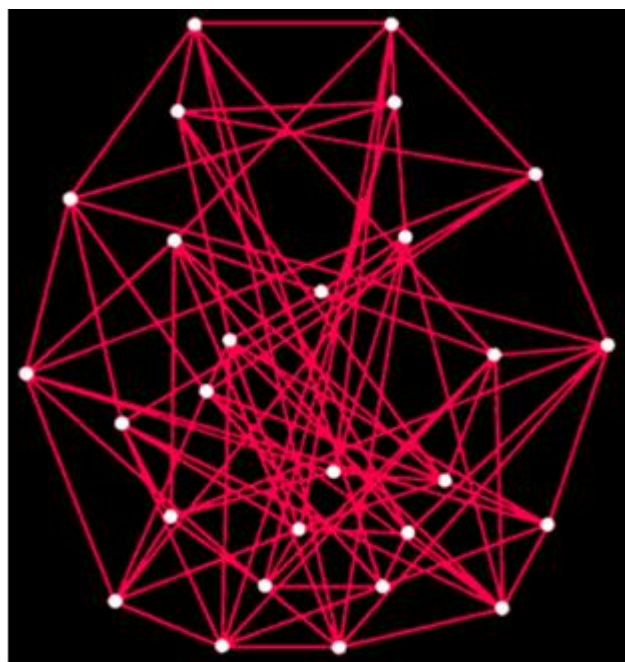
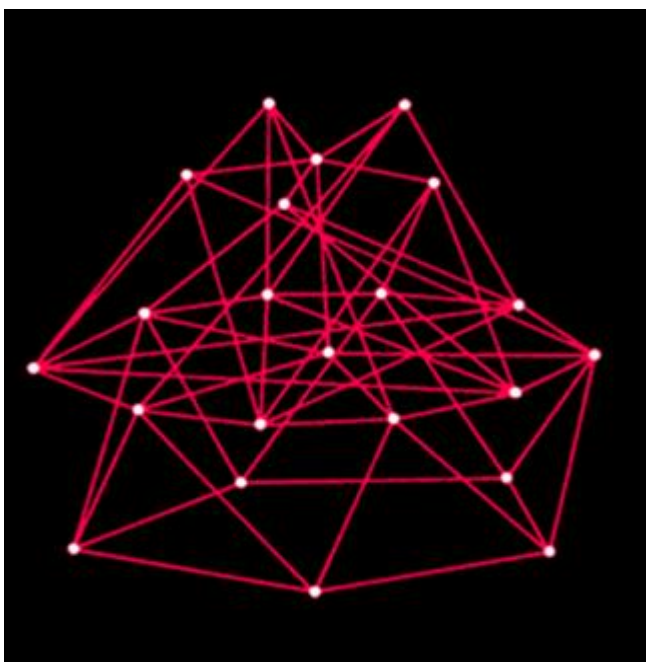


Рисунок 3.5 –  $22 < R(3, 7)$  [2]

Рисунок 3.6 –  $27 < R(3, 8)$  [2]

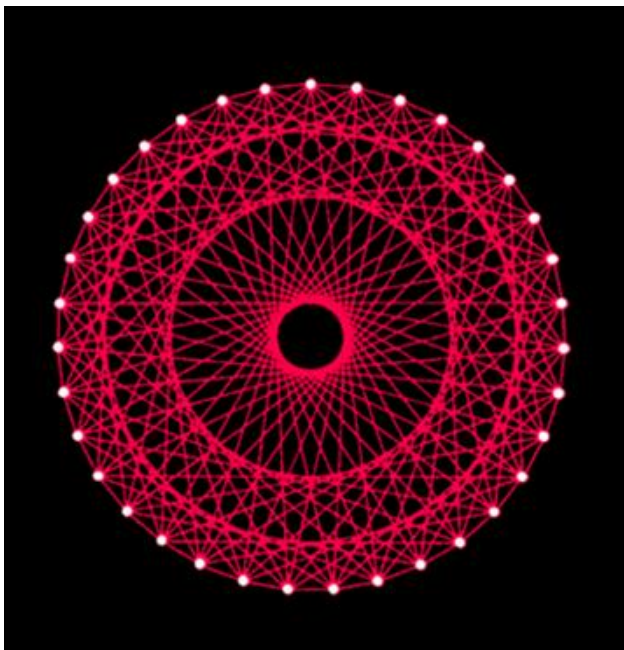


Рисунок 3.7 –  $35 < R(3, 9)$  [2]

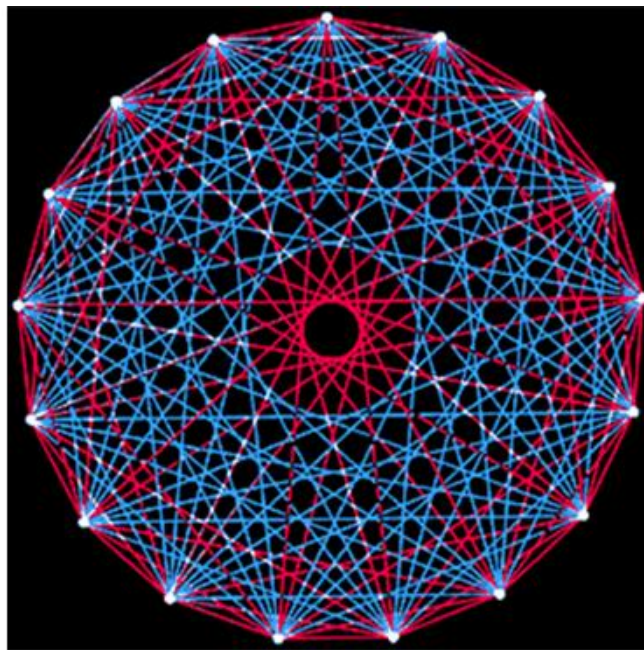


Рисунок 3.8 –  $17 < R(4, 4)$  [2]

**Властивість 1.** [\[11, ст. 2\]](#)

$$R(m, n) = R(n, m)$$

*Доведення властивості 2.*

□ Якщо брати формулювання чисел Рамсея як розфарбування графа в 2 кольори, то перехід від  $R(m, n)$  до  $R(n, m)$  можна інтерпретувати, як зміну кольорів. Очевидним є те, що від зміни кольорів число Рамсея не зміниться. ■

**Властивість 2.** [\[11, ст. 1\]](#)

$$R(1, n) = 1$$

**Властивість 3.** [\[11, ст. 2\]](#)

$$R(2, n) = n$$

*Доведення властивості 3.*

□ Маємо 2 варіанти. Перший – хоча б одне ребро пофарбоване в червоний колір, тоді маємо  $K_2$  червоного кольору. Другий – повний граф має всі ребра зеленого кольору, тоді маємо  $K_n$  зеленого кольору. Отже, достатньо  $n$  вершин. ■

## 2.3 Принцип Діріхле та знаходження значень чисел Рамсея

В основі знаходження точних значень лежить принцип Діріхле.

### Означення 3. [4]

*Принцип Діріхле* – принцип в комбінаториці, з якого слідує, що якщо  $n$  предметів розмістити по  $r$  кліткам, де  $r < n$ , то хоча б в одну клітку попаде більше одного предмета.

Розглянемо декілька прикладів, в яких ми будемо знаходити точні значення чисел Рамсея. Будемо розглядати приклади на мові графів, тож для будемо позначати зеленим кольором ребра, що вказують на **знайомство** двох людей (вершин), а червоним – на **незнайомство**.

### Приклад 1 ( $R(3, 3) > 5$ ).

Серед 5-ти людей може не знайтися ані 3 попарно знайомих, ані 3 попарно незнайомих.

#### Доведення прикладу 1.

□ Для того, щоб довести, можна навести хоча б один приклад графа, в котрому немає трикутника одного кольору (рис. 3.9).



Рисунок 3.9 –  $R(3,3) > 5$

■

### Приклад 2 ( $R(3, 3) \leq 6$ ).

Серед 6-ти людей знайдуться або 3 попарно знайомих, або 3 попарно незнайомих.

#### Доведення прикладу 2.

□ Розглянемо граф відносно однієї конкретної вершини, нехай вона

називається А. З А виходить 5 ребр. За принципом Діріхле - мінімум з 3 ребра одного кольору. Розглянемо варіант, коли ці ребра зелені (показано як (I) на рисунку 4.2). Якщо ці 3 вершини попарно сполучені червоним ребром, то отримуємо трикутник червоного кольору (показано як (II) на рисунку 4.2). В інакшому випадку, коли хоча б одна з цих 3-ох вершин сполучена з іншою зеленим ребром, то отримуємо трикутник зеленого кольору, якщо додаємо до цих 2-ох вершин (що сполучені зеленим ребром) вершину А (показано як (III) на рисунку 4.2).

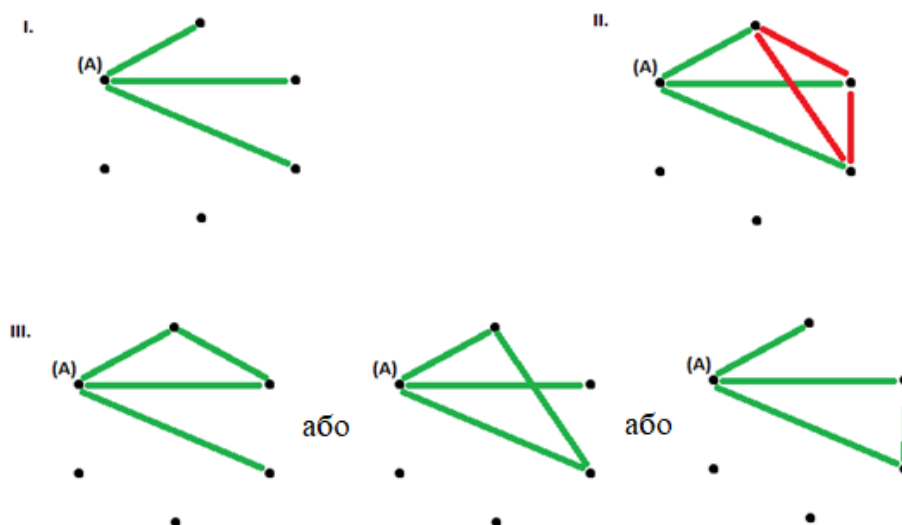


Рисунок 3.10 -  $R(3,3) \leq 6$  (покроково)

■

З прикладу 1 та прикладу 2 слідує, що  $R(3, 3) = 6$ .

**Приклад 3** ( $R(4, 3) > 8$ ).

Серед 8-ми людей може не знайтися ані 4 попарно знайомих, ані 3 попарно незнайомих.

**Доведення прикладу 3.**

□ Для доведення достатньо навести хоча б один приклад де на повному графі з 8-ми вершин немає одночасно червоного трикутника та  $K_4$  зеленого кольору (для зручності не позначаємо) (рис. 4.4).

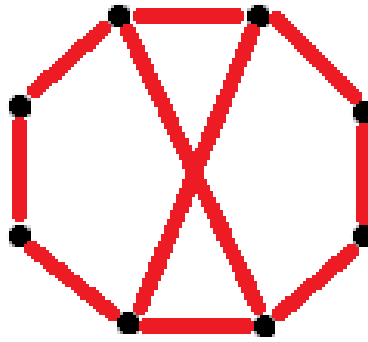


Рис. 4.4 –  $R(4, 3) > 8$

■

#### Приклад 4 ( $R(4, 3) \leq 10$ ).

Серед 10-ти людей знайдуться або 4 попарно знайомих або 3 попарно незнайомих.

#### Доведення прикладу 4.

□ Аналогічно розглядаємо граф відносно вершини А. За принципом Діріхле - А сполучається мінімум п'ятьма ребрами одного кольору. Розглянемо 2 можливих варіанти. Перший – А з'єднана зеленими ребрами з 6 вершинами, тоді за задачею б) маємо, що на цих шести вершинах є трикутник одного кольору. Тоді ми отримали або червоний трикутник, або зелену кліку на 4 вершинах ( $K_4$ ) (показано як (I) на рисунку 4.3). Другий – А з'єднана червоними ребрами з 4 вершинами, тоді або на цих 4 вершинах утворюється  $K_4$  зеленого кольору, або ж якщо хоча б 1 ребро червоне, то маємо трикутник червоного кольору разом з А (показано як (II) на рисунку 4.3). Можна перевірити, що у нас є лише 2 варіанти: нехай А з'єднана менше ніж 6 зеленими ребрами, і менше ніж 4 червоними, тоді маємо, що з вершини А виходить  $5 + 3 = 8$  ребр, що за умовою задачі – неможливо.

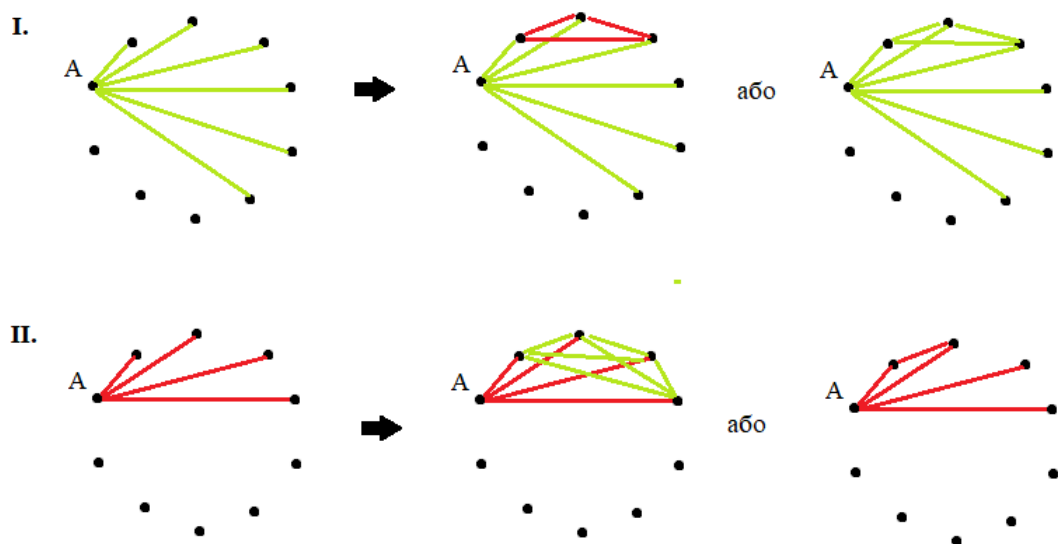


Рис 4.3 -  $R(4, 3) \leq 10$  (покроково)

■

#### Приклад 5 ( $R(4, 3) \leq 9$ ).

Серед будь-яких 9-ти людей знайдуться або 4 попарно знайомих, або троє 3 незнайомих.

#### Доведення прикладу 5.

□ Аналогічно до попередньої задачі, але тут у нас додається випадок, коли з кожної вершини виходять одночасно 5 зелених вершин і 3 червоні.

Розглянемо перший варіант, коли з  $A$  виходить 5 зелених ребр, то Кількість вершин дорівнює  $22.5$  ( $\frac{9 \cdot 5}{2} = 22.5$ , де 9 – кількість вершин, 5 – кількість ребр, 2 – адже ми рахували кожне ребро двічі). Аналогічно з другим варіантом, де кількість вершин дорівнює  $13.5$  ( $\frac{9 \cdot 3}{2} = 13.5$ ). Отже, оскільки кількість вершин не ціле число, тоді цей випадок виключений і при 9 вершинах. ■

З прикладів 3 та 5 слідує, що  $R(4, 3) = 9$ .

#### Приклад 6 ( $R(4, 4) \leq 18$ ).

Серед довільних 18-ти людей знайдуться або 4 попарно знайомих, або 4 попарно незнайомих.

### ***Доведення прикладу 6.***

□ Розглядаємо граф відносно вершини  $A$ . За принципом Діріхле -  $A$  сполучається мінімум 9-ма ребрами одного кольору. Розглянемо варіант коли ці ребра - червоні. Тоді з прикладу 5 маємо, що на цих 9-ти вершинах є або утворюються  $K_4$  зеленого кольору або червоний трикутник, який утворює  $K_4$  червоного кольору разом з  $A$ . Аналогічне доведення для варіанту коли з  $A$  виходить 9 ребр зеленого кольору. ■

З прикладу 6 та рис. 3.8 слідує, що  $R(4, 4) = 18$ .

### **Приклад 7 ( $R(5, 3) \leq 14$ ).**

Серед довільних 14-ти людей знайдуться або 5 попарно знайомих, або 3 попарно незнайомих.

### ***Доведення прикладу 7.***

□ Розглядаємо граф відносно вершини  $A$ . Розглянемо 2 варіанти. В першому варіанті з  $A$  виходять принаймні 5 вершини червоного кольору. Або серед цих вершин існує  $K_5$  зеленого кольору, або ж серед них 2 з'єднані червоним ребром (додаючи  $A$ , маємо червоний трикутник). В другому варіанті з  $A$  виходить не менше ніж 9 зелених ребр. З прикладу 5 маємо, що серед цих 9 точок, знайдеться або  $K_4$  зеленого кольору (з вершиною  $A$  утворюється  $K_5$ ), або ж  $K_3$  червоного кольору. Перевіримо чи не існує інших випадків:  $8 + 4 = 12$  (максимальна кількість зелених + червоних ребр, які не задовільняють розглянуті варіанти). Отже, припущення, що з  $A$  виходить або не менше 9 зелених ребр, або не менше 5 червоних – вірне. Отже, доведено. ■

З прикладу 7 та рис. 3.3 слідує, що  $R(5, 3) = 14$ .

Сьогодні відомо не так багато чисел Рамсея, адже знаходити їх досить важко. Всі відомі точні значення та проміжки значень чисел наведені в таблиці 3.1.

| p, q | 1 | 2  | 3     | 4      | 5       | 6        | 7        | 8        | 9         | 10        |
|------|---|----|-------|--------|---------|----------|----------|----------|-----------|-----------|
| 1    | 1 | 1  | 1     | 1      | 1       | 1        | 1        | 1        | 1         | 1         |
| 2    | 1 | 2  | 3     | 4      | 5       | 6        | 7        | 8        | 9         | 10        |
| 3    | 1 | 3  | 6     | 9      | 14      | 18       | 23       | 28       | 36        | 40-43     |
| 4    | 1 | 4  | 9     | 18     | 25      | 35-41    | 49-61    | 56-84    | 73-115    | 92-149    |
| 5    | 1 | 5  | 14    | 25     | 43-49   | 58-87    | 80-143   | 101-216  | 125-316   | 143-442   |
| 6    | 1 | 6  | 18    | 35-41  | 58-87   | 102-165  | 113-298  | 127-495  | 169-780   | 179-1171  |
| 7    | 1 | 7  | 23    | 49-61  | 80-143  | 113-298  | 205-540  | 216-1031 | 233-1713  | 298-2826  |
| 8    | 1 | 8  | 28    | 56-84  | 101-216 | 127-495  | 216-1031 | 282-1870 | 317-3583  | 317-6090  |
| 9    | 1 | 9  | 36    | 73-115 | 125-316 | 169-780  | 233-1713 | 317-3583 | 565-6588  | 580-12677 |
| 10   | 1 | 10 | 40-43 | 92-149 | 143-442 | 179-1171 | 289-2826 | 317-6090 | 580-12677 | 798-23556 |

Таблиця 3.1 – Числа Рамсея [8, ст. 14]

## 2.4 Оцінка чисел Рамсея зверху та знизу

**Теорема 2** (Оцінка зверху; Ердеш, Секереш, 1935). [13]

Якщо  $R(m-1, n)$  та  $R(m, n-1)$  існують, то число  $R(m, n)$  існує та виконується нерівність  $R(m, n) \leq R(m-1, n) + R(m, n-1)$ .

### *Доведення теореми 2.*

□ Розглянемо граф із  $R(m-1, n) + R(m, n-1)$  вершин відносно вершини А. А з'єднана з  $l$  вершинами одного кольору і  $f$  вершинами другого кольору. Всього в графі  $R(m-1, n) + R(m, n-1) = 1 + l + f$  вершин. З цього випливає, що або  $R(m-1, n) \leq l$  або  $R(m, n-1) \leq f$ . Отже, з А виходить або  $R(m-1, n)$  ребр першого кольору, або  $R(m, n-1)$  другого кольору. В першому випадку утворюється або  $K_n$  першого кольору, або  $K_{m-1}$  на  $m-1$  вершинах другого кольору (разом з вершиною А -  $K_m$  другого кольору). Аналогічно для другого випадку. ■

### **Наслідок з теореми 2.**

$$R(m, n) \leq \binom{n+m-2}{m-1}$$

### *Доведення наслідку з теореми 2.*

□ Доведемо за методом математичної індукції.

База індукції:

$R(1, m) = 1$  (за властивістю чисел Рамсея).

Підставляємо в  $\binom{n+m-2}{m-1}$  значення  $n=1$  і маємо:  $\binom{1+m-2}{m-1} = \binom{m-1}{m-1} = 1$ .

Отже, маємо, що  $R(1, m) = \binom{1+m-2}{m-1}$ .

Індукційний крок:

Рівність трикутника Паскаля:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \quad (2.1)$$

$$R(m, n) \leq R(m-1, n) + R(m, n-1) \leq \binom{n+m-3}{m-1} + \binom{n+m-3}{m-2} = \binom{n+m-2}{m-1} \text{ (за 2.1).}$$

Отже,  $R(m, n) \leq \binom{n+m-2}{m-1}$ . ■

**Теорема 2.1** (Оцінка зверху; Ердеш, Секереш). [\[6, ст. 24\]](#)

Якщо  $R(m-1, n)$  та  $R(m, n-1)$  – існують і є парними, то виконується нерівність  $R(m, n) \leq R(m-1, n) + R(m, n-1) - 1$ .

**Доведення теореми 2.1.**

□ Аналогічно до Доведення теореми 1, але є одна відмінність через те, що кількість вершин непарна. Отже, і степінь всіх вершин, що з'єднані нехай червоними ребрами буде непарна, тож в цьому випадку степінь червоних вершин дорівнює  $R(m-1, n) - 1$ , або зелених  $R(m, n-1) - 1$ . Розглянемо перший варіант, тоді нехай із кожної вершини виходить  $R(m-1, n) - 1$  червоних ребр, тоді розглянемо підграф  $G$ , що утворений вершинами основного графу і ребрами червоного кольору. В графі  $G$  непарна кількість вершин  $(R(m-1, n) + R(m, n-1) - 1)$ , при цьому степінь кожної – теж непарна  $(R(m-1, n) - 1)$ , що неможливо. Другий варіант - аналогічно. (Приклад: для  $R(3, 4) = 9$ , це варіант коли існують 3 трикутника одного кольору) ■

**Теорема 3** (Оцінка знизу; Ердеш, Секереш, 1947). [\[9\]](#)

Для будь-якого натурального числа  $k$  виконується нерівність  $R(k, k) \geq 2^{\frac{k}{2}}$ , для  $k \geq 3$ .

**Доведення теореми 3.**

□ Візьмемо таке число  $n$ , що  $n \leq 2^{\frac{k}{2}}$ . Всього ребр  $\binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)!2!} = \frac{n(n-1)}{2}$ . Маємо 2 можливості для розфарбування кожного ребра, тоді всіх можливих

розфарбувань –  $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$  (за правилом множення в комбінаториці). Всього графів, що містять зелену  $k$ -кліку на  $n$  вершинах –  $2^{\frac{n(n-1)}{2} - \frac{k(k-1)}{2}}$ . Для того, щоб визначити синю  $n$ -кліку нам потрібно обрати серед  $k$  вершин  $n$ , на яких вона буде утворена, тобто  $\binom{n}{k}$ . Для кожної такої кліки ми вже порахували кількість графів розфарбованих на  $k$  вершинах, які будуть містити цю  $n$ -кліку, тож маємо  $\binom{n}{k} \cdot$

$$\frac{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^{\frac{k(k-1)}{2}}} = [\text{оскільки } k < n] = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^{\frac{k(k-1)}{2}}} < \frac{n^k}{k!} \cdot \frac{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^{\frac{k(k-1)}{2}}} \leq \frac{(2^{\frac{k}{2}})^k}{k!} \cdot \frac{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^{\frac{k(k-1)}{2}}}$$

$$= \frac{2^{\frac{k^2}{2}}}{k!} \cdot \frac{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^{\frac{k^2-k}{2}}} = \frac{2^{\frac{k}{2}}}{k!} \cdot 2^{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{2^{\frac{k}{2}+1}}{k!} \cdot \frac{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2} \leq [\text{Доведемо, що } \frac{2^{\frac{k}{2}+1}}{k!} < 1 \text{ (де } k \geq 3)].$$

$$2^{\frac{k}{2}+1} < k! \Rightarrow 2^{\frac{k}{2}+1} < 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k-1)k \Rightarrow \frac{k}{2} + 1 < k - 1 \Rightarrow \frac{k}{2} > 2 \Rightarrow k > 4.$$

Тепер доведемо для  $k \geq 3$ . Для  $k = 3$ :  $R(3, 3) = 6 \geq 2^{\frac{3}{2}} = 2.82842712$ . Для  $k = 4$ :

$$R(4, 4) = 18 \geq 2^{\frac{4}{2}} = 4. \text{ Отже, оскільки для } k \geq 3 \text{ виконується нерівність } \frac{2^{\frac{k}{2}+1}}{k!} < 1] \leq$$

$$\frac{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^{\frac{k(k-1)}{2}}}. \text{ Аналогічно оцінюється кількість графів, що містять зелену } k\text{-антикліку на}$$

$n$  вершинах. Оскільки кількість графів, що утворюють кліку чи антикліку, на  $n$

вершинах менше за  $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ , то існує такий граф, який не утворює кліку чи

антикліку на  $n$  вершинах. ■

## 3 Багатокольорова теорія Рамсея

### 3.1 Багатокольорові теореми та числа Рамсея

#### Означення 2 (Рамсей, 1930). [\[10\]](#)

Число Рамсея  $R(m_1, \dots, m_k)$  – це найменше з таких натуральних чисел  $x$ , що для довільного розфарбування ребер графа  $K_x$  в  $k$  кольорів знайдеться  $m_i$ -кліка якогось конкретного кольору  $i$ .

Знаходження чисел Рамсея для більше чим 2 кількості кольорів – ще більш складна задача, тому відомо всього 2 точних значення:  $R(3, 3, 4) = 30$  і  $R(3, 3, 3) = 17$ . Протягом довгого часу точне значення числа Рамсея  $R(3, 3, 4)$  було невідоме, але в 2016 році С за допомогою методології, що базувалася на абстракції та порушенні симетрії, було знайдено точне значення  $R(3, 3, 4) = 30$  [\[12\]](#). Точне значення  $R(3, 3, 3) = 17$  розглянемо в Прикладі 1.

Приклад 1. Кожен з 17-ти вчених листується з усіма іншими. У листуванні йде мова тільки про одну з трьох тем. Доведіть, що троє вчених листуються по одній і тій самій темі або  $R(3, 3, 3) = 17$ .

#### Доведення прикладу 1 ( $R(3, 3, 3) = 17$ ).

□ На рисунку 3.9 зображено 2 контрприкладу, які вказують на те, що  $R(3, 3, 3) > 16$ . Тож для доведення рівності  $R(3, 3, 3) = 17$ , нам достатньо довести, що  $R(3, 3, 3) \leq 17$ . Розглянемо граф відносно конкретної вершини  $A$ . Оскільки  $A$  має 16 інцидентних ребер та 3 кольори, то за принципом Діріхле -  $A$  сполучається мінімум з 6-ма ребрами одного кольору. Якщо серед цих 6 вершин хоча б одне ребро такого самого кольору, то ми маємо трикутник одного кольору. В інакшому випадку ми маємо 6 вершин та 2 кольори для розфарбування, що зводиться до  $R(3, 3) = 6$ . З цього слідує, що на цих 6-ти вершинах обов'язково утвориться трикутник одного з двох кольорів, що залишилися. ■

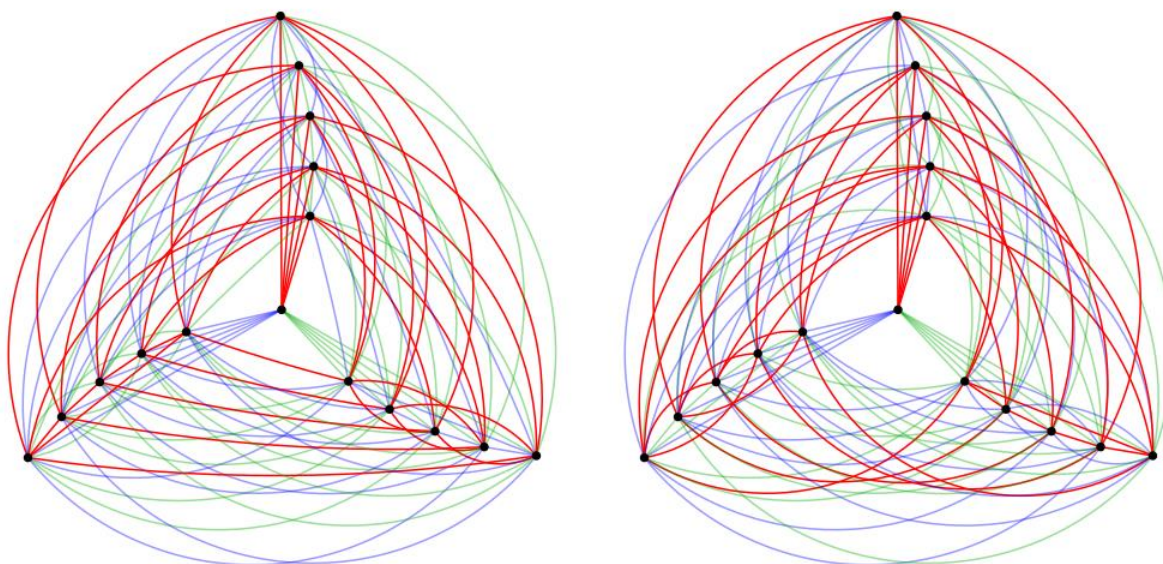


Рисунок 3.9 –  $R(3, 3, 3) > 16$  (2 випадки коли немає  $K_3$  одного з кольорів)

Приклад 2. В опуклому 66-кутнику всі ребра та діагоналі в пофарбували в один з 4-х кольорів. Доведіть, що знайдеться трикутник одного кольору.

**Доведення прикладу 2** ( $R(3, 3, 3, 3) \leq 66$ ).

□ Розглянемо граф відносно конкретної вершини А, з якої виходить 65 ребр. За принципом Діріхле маємо, що принаймні 17 ребр будуть одного кольору, нехай червоного. Якщо хоча б одне ребро на цих 17-ти вершинах червоне, тоді маємо червоний трикутник. В іншому випадку отримуємо 17 вершин та 3 кольори для розфарбування. З прикладу 1 випливає, що на 17-ти вершинах обов'язково утвориться трикутник одного з трьох кольорів, що залишилися. ■

### 3.2 Властивості та теореми багатокольорових чисел Рамсея

**Властивість 4.**

$$1. R(1, m, n) = 1$$

**Властивість 5.** [\[6, ст. 11\]](#)

$$2. R(2, m, n) = R(m, n)$$

### ***Доведення властивості 5.***

□ Маємо 2 варіанти. Перший – повний граф має ребра трьох різних кольорів, тоді маємо 2 вершини з'єднані ребром одного з трьох кольорів. Другий – повний граф не має ребр одного з трьох кольорів, тоді маємо граф, що розфарбовується в 2 кольори або  $R(m, n)$ . Отже, достатньо  $R(m, n)$  вершин. ■

**Теорема 4** (Грінвуд, Глісон, 1955). [\[11, ст. 2\]](#)

$$R(m_1, \dots, m_l) \leq \sum_{c=1}^l R(m_1, \dots, m_c - 1, \dots, m_l).$$

### ***Доведення теореми 4.***

□ Розглянемо граф, що має  $\sum_{c=1}^l R(m_1, \dots, m_c - 1, \dots, m_l)$  вершин, відносно вершини  $A$  і вершин  $U_c$ , які з'єднані з  $A$  ребром кольору  $c$ . З того, що кількість вершин цього графа  $\sum_{c=1}^l R(m_1, \dots, m_c - 1, \dots, m_l) = \sum_{c=1}^l |U_c|$  випливає, що існує такий колір  $c$ , що  $|U_c| \geq R(m_1, \dots, m_c - 1, \dots, m_l)$ , де  $c = 1, \dots, l$ . З вершини  $A$  будуть виходити  $R(m_1, \dots, m_c - 1, \dots, m_l)$ , де  $c = 1, \dots, l$ . При будь-якому значенні  $c$ , будуть всього 2 варіанти. Перший - вершини  $U_c$  з'єднані кольором  $c$  і маємо  $K_{c-1}$  розміру  $m_c - 1$ , яка разом з вершиною утворить  $K_c$  кольору  $c$  і розміру  $m_c$ . Другий – утворюється кліка будь-якого іншого кольору  $f$  розміру  $m_f$ , де  $f = 1, \dots, l$ , і  $f \neq c$ . ■

**Теорема 5.** [\[6, ст. 11\]](#)

Для будь-яких натуральних чисел  $m_1, \dots, m_k$  завжди знайдеться  $R(m_1, \dots, m_k)$ .

### ***Доведення теореми 5.***

□ Доведемо за методом математичної індукції. Припустимо, що будь-якого набору натуральних чисел  $(m_1, \dots, m_k)$ , таких що виконується і рівність  $m_1 + m_2 + \dots + m_k = s$  і твердження теореми.

База індукції:

$$\sum_{c=1}^k m_c = s, \text{ де } m_c = 1.$$

З цього випливає, що  $s = k$ .

Індукційний крок:

Нехай твердження виконується для всіх наборів  $(m_1, \dots, m_k)$  таких, що  $m_1 + m_2 + \dots + m_k \leq s$ . Доведемо твердження для набору  $(m_1, \dots, m_k)$  такого, що  $m_1 + m_2 + \dots + m_k = s + 1$ . За індуктивним припущенням маємо, що твердження виконується для таких наборів чисел  $(m_1, \dots, m_{c-1}, \dots, m_k)$ , де  $c = 1, \dots, k$ . Отже, з теореми 4 маємо, що для будь-яких натуральних чисел  $m_1, \dots, m_k$  завжди знайдеться  $R(m_1, \dots, m_k)$ . ■

### 3.3 Теорема Шура

**Теорема 6** (Теорема Шура; Ісай Шур, 1917). [\[6, ст. 65\]](#)

Для довільного розфарбування натуральних чисел  $n$  (де  $n \geq 4$ ) в скінчену кількість  $k$  (де  $k \geq 2$ ) кольорів існує однокольоровий розв'язок для  $x + y = z$ , де  $x, y, z$  не обов'язково мають бути різними.

#### *Доведення теореми 6.*

□ Розглянемо  $n = R(3, \dots, 3)$ . Для даного розфарбування чисел  $n$  в один з  $k$  кольорів, в графі  $K_n$  кожне ребро  $(i, j)$  фарбується в  $|i - j|$  колір. Маємо однокольоровий трикутник  $\{i_1, i_2, i_3\}$ , де  $i_1 < i_2 < i_3$ . Отже,  $x = i_2 - i_1, y = i_3 - i_2, z = i_3 - i_1$ . Перевіримо:  $x + y = z \Leftrightarrow i_2 - i_1 + i_3 - i_2 = i_3 - i_1 \Leftrightarrow i_3 - i_1 = i_3 - i_1$ . ■

## 4 Висновки

В розділі 2 моєї курсової роботи були розглянуті основні означення та положення теорії Рамсея (2.1), означення чисел Рамсея, теорема про існування чисел Рамсея, візуалізація їх верхніх границь та їх властивості,  $R(m, n) = R(n, m)$  і  $R(2, n) = n$  були доведені (2.2). Також були розглянуті точні значення та інтервали значень чисел Рамсея, знайдено та доведено низку точних значень та верхніх границь чисел Рамсея ( $R(3, 3) = 6$ ,  $R(4, 3) = 9$ ,  $R(4, 4) = 18$ ,  $R(5, 3) = 14$ ,  $R(5, 5) \leq 62$ ), доведення яких базувалося на принципі Діріхле, який теж був розглянутий (2.3). Також були розібрані та доведені верхня ( $R(m, n) \leq R(m-1, n) + R(m, n-1)$ ) та нижня ( $R(k, k) \geq 2^{\frac{k}{2}}$ , для  $k \geq 3$ .) оцінки чисел Рамсея, разом з їхніми наслідками ( $R(m, n) \leq \binom{n+m-2}{m-1}$  та  $R(m, n) \leq R(m-1, n) + R(m, n-1)$ , якщо  $R(m-1, n)$  та  $R(m, n-1)$  – існують і є парними) (2.4).

В розділі 3 розглянуто багатокольорові числа Рамсея, доведено одне з двох відомих точних значень, а саме  $R(3, 3, 3) = 17$ , та доведено нерівність  $R(3, 3, 3, 3) \leq 66$  (3.1). Розглянуті властивості багатокольорових чисел, з яких  $R(2, m, n) = R(m, n)$  була доведена. Були доведені теорема, що полягає в нерівності  $R(m_1, \dots, m_l) \leq \sum_{c=1}^l R(m_1, \dots, m_c - 1, \dots, m_l)$ , теорема про існування  $R(m_1, \dots, m_k)$  для будь-яких  $m_1, \dots, m_k$  натуральних чисел (3.2) та доведені властивості теорема Шура (3.3).

## 5 Список літератури

1. Горбачов Н. В., збірник олімпіадних задач з математики – М.: МЦНМО, 2004 р., - 560 ст.
2. Журнал "Scientific American", № 9, вересень 1990, с. 70–76
3. Radziszowski, Stanisław, "Small Ramsey Numbers". Dynamic Surveys. Electronic Journal of Combinatorics, 2011
4. Rittaud, Benoît; Heeffner, Albrecht, "The pigeonhole principle, two centuries before Dirichlet", лютий 2013
5. Lane Barton IV, "Ramsey Theory", 13 травня 2016
6. James Odziemiec Dickson, "An Introduction to Ramsey Theory on Graphs", 2 травня 2011
7. Eduard Bosch, Jan-Hendrik Evertse, "Ramsey theory and applications", 8 червня 2018
8. Kristina Buschur, "INTRODUCTION TO RAMSEY THEORY", 2011
9. P. Erdos, "Some remarks on the theory of graphs", Bulletin of the American Mathematical Society, 1947
10. F. P. Ramsey, "On a problem of formal logic", Proceedings of the London Mathematical Society, 1930
11. E. Greenwood and A. M. Gleason, "Combinatorial Relations and Chromatic Graphs", Canadian Journal of Mathematics, 1955
12. Michael Codish, Michael Frank, Avraham Itzhakov, Alice Miller, "Computing the Ramsey Number  $R(4,3,3)$  using Abstraction and Symmetry breaking", 2016
13. P. Erdos, G. Szekeres, "A combinatorial problem in geometry", Compositio Mathematica, Tome 2, 1935