Руслан Костянтинович Чорней, канд.фіз.-мат.н., кафедра математики НаУКМА

З В І Т
за проєктом дослідницьких грантів
для науково-педагогічних працівників НаУКМА
від Благодійного Фонду «ПОВІР У СЕБЕ»

Назва дослідження: **««Локальне керування в мережах»**

У період з 8 січня по 31 грудня 2018 року було:

1) досліджено існування та єдиність рівноважних за Нешем станів в стохастичних іграх накопичення капіталу для систем, структура яких описується графом локальних взаємодій для симетричного випадку.

Основний результат для симетричних ігор.

Нехай n — горизонт гри. Нехай $f^1(x) := a(x)$ для всіх $x \in X$. Тоді

$$v^1(x) := \max_{a \in A(x)} u(a) = u\left(f^1(x)\right)$$

для всіх $x \in X$. Очевидно, $v^1 \in B_0(X)$. Якщо $v^0(x) := 0$ для всіх $x \in X$, то

$$\overline{f}^1(x) = SNEG(v^0, x).$$

Іншими словами, $\overline{f}^1(x)$ — симетрична нешівська рівновага в однокроковій грі, v^1 — рівноважна виплата кожному гравцю і $v^1 = T_{f^1} v^0$. Використання леми 2 дає підпослідовності $\overline{f}^2, \ldots, \overline{f}^n \in \overline{F}$ і $v^2, \ldots, v^n \in B_0(X)$, які означимо так:

$$\overline{f}^k(x) := SNEG(v^{k-1}, x) \text{ і } \quad v^k(x) := (T_{f^k} v^{k-1})(x), \tag{1}$$

де $x \in X$ і $k = 2, \ldots, n$. Далі розглянемо n-крокові марковські стратегії δ_i^n для гравців $i \in V$, які означимо як

$$\delta_i^n = (f^{1*}, f^{2*}, \ldots, f^{n*}) := (f^{n}, f_1^{n-}, \ldots, f^{1}), \qquad (2)$$

де $f^k \in A$ відповідає $\overline{f}^k \in \overline{F}$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Теорема 1. *Кожна n-крокова стохастична гра накопичення капіталу з ненульовою сумою, що задовольняє припущення 1–3, має нерандомізовану нешівську рівновагу* $\delta^n = (\delta_i^n, i \in V)$ *з* δ_i^n, *визначеним співвідношеннями* (3) *і* (4), $i \in V$. *Рівноважна виплата в n-кроковій грі для кожного гравця* $i \in V$ *дорівнює* $v^n \in B_0(X)$ *і не залежить від i. Крім того, для всіх* $x \in X$ *виконується*

$$v^n(x) \;;:?\; v^{n-1}(x) \text{ і } f^n(x) \;:(\; f^{n-1}(x).$$

Теорема 2. *Будь-яка стохастична гра накопичення капіталу на графі* $\Gamma = (V, B)$ *з ненульовою сумою і необмеженим горизонтом, що задовольняє припущення 1–3, має нерандомізовану стаціонарну рівновагу за Нешем* $\overline{f}^* \in \overline{F}$. *Крім того, для будь-якого* $x \in X$ *матимемо*

$$v^*(x) := \lim_{n \to \infty} v^n(x) = R_i(x, \overline{f}^*)$$

і

$$f^* = \lim_{n\to\infty} f^n(x).$$

Нехай

$$J_k(v)(x) := \int_{(0;\infty)} v(x^1)\lambda_k(dx^1 | x),$$

де $v \in B_0(X)$.

Теорема 3. *Нехай виконуються припущення 1–3 і, крім того,* $X = [0; x_0]$, *функції* $x \to a(x)$ *і* $x \to J_k(v)(x)$ *неперервні для всіх* k *і всі неперервні функції* $v \in B_0(X)$. *Тоді*

$$v^n(x) \to v^*(x) \text{ і } f^n(x) \to f^*(x) \text{ при } n \to \infty$$

рівномірно по $x \in X$.

2) було побудовано ітераційні методи знаходження рівноважних за Нешем станів в стохастичних іграх накопичення капіталу для систем, структура яких описується графом локальних взаємодій для симетричного випадку.

Основний результат для симетричних ігор.

Нехай n — горизонт гри. Нехай $f^1(x) := a(x)$ для всіх $x \in X$. Тоді

$$v^1(x) := \max_{a \in A(x)} u(a) = u\left(f^1(x)\right)$$

для всіх $x \in X$. Очевидно, $v^1 \in B_0(X)$. Якщо $v^0(x) := 0$ для всіх $x \in X$, то $\bar{f}^1(x) = SNEG(v^0, x)$.

Іншими словами, $\bar{f}^1(x)$ — симетрична нешівська рівновага в однокроковій грі, v^1 — рівноважна виплата кожному гравцю і $v^1 = T_{f^1} v^0$. Використання леми 2 дає підпослідовності $\bar{f}^2, \ldots, \bar{f}^n \in \bar{F}$ і $v^2, \ldots, v^n \in B_0(X)$, які означимо так:

$$\bar{f}^k(x) := SNEG(v^{k-1}, x) \text{ і } v^k(x) := (T_{f^k} v^{k-1})(x), \tag{3}$$

де $x \in X$ і $k = 2, \ldots, n$. Далі розглянемо n-крокові марковські стратегії π_i для гравців $i \in V$, які означимо як

$$\pi_i = (f^{1*}, f^{2*}, \ldots, f^{n*}) := (f^n, f^{n-1}, \ldots, f^1), \tag{4}$$

де $f^k \in A$ відповідає $\bar{f}^k \in \bar{F}$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Теорема 4. *Кожна n-крокова стохастична гра накопичення капіталу з ненульовою сумою, що задовольняє припущення 1–3, має нерандомізовану нешівську рівновагу $\delta^n = (\delta^n_i, i \in V)$ з δ^n_i, визначеним співвідношеннями* (3) *і* (4), $i \in V$. *Рівноважна виплата в n-кроковій грі для кожного гравця $i \in V$ дорівнює $v^n \in B_0(X)$ і не залежить від i. Крім того, для всіх $x \in X$ виконується*

$$v^n(x) \geqslant v^{n-1}(x) \text{ і } f^n(x) \leqslant f^{n-1}(x).$$

Теорема 5. *Будь-яка стохастична гра накопичення капіталу на графі $\Gamma = (V, B)$ з ненульовою сумою і необмеженим горизонтом, що задовольняє припущення 1–3, має нерандомізовану стаціонарну рівновагу за Нешем $\overline{f}^* \in \overline{F}$. Крім того, для будь-якого $x \in X$ матимемо*

$$v^*(x) := \lim_{n\to\infty} v^n(x) = R_i(x, \overline{f}^*)$$

і

$$f^* = \lim_{n\to\infty} f^n(x).$$

Нехай

$$J_k(v)(x) := \int_{(0;\infty)} v(x^1)\lambda_k(dx^1|x),$$

де $v \in B_0(X)$.

Теорема 6. *Нехай виконуються припущення 1–3 і, крім того, $X = [0; x_0]$, функції $x \to a(x)$ і $x \to J_k(v)(x)$ неперервні для всіх k і всі неперервні функції $v \in B_0(X)$. Тоді*

$$v^n(x) \to v^*(x) \text{ і } f^n(x) \to f^*(x) \text{ при } n \to \infty$$

рівномірно по $x \in X$.

3) досліджено існування та єдиність рівноважних за Нешем станів в стохастичних іграх накопичення капіталу для систем, структура яких описується графом локальних взаємодій для несиметричного випадку.

Основний результат для несиметричних ігор.

Простір ефективних стратегій гравця i, $i \in V$, є простором стратегій, що в кожному стані системи зосереджений у двох сусідніх точках множини керуючих впливів, що задовольняють умову Ліпшиця, і їх очікувані значення неспадні:

$$EPS_i(N,n) = \Big\{ f: X(N,n) \to \mathrm{P}\Big(\Big\{\frac{k}{N^n} \,\Big|\, k \in \mathrm{N} \wedge k \le N^n C_i\Big\}\Big) \,\Big|\, \forall x \in X(N,n)$$

$$f(x) = \alpha_x \sigma[a_x] + (1-\alpha_x)\sigma\Big[a_x + \frac{1}{N^n}\Big]$$

$$\text{для деяких } 0 \le \alpha_x \le 1 \text{ і}$$

$$a_x \in A_i(N,n)(x) \setminus \Big\{\frac{N^n U_i(x)}{N^n}\Big\} \text{ і}$$

$$0 \le \frac{\mathrm{E}\tilde{f}(x') - \mathrm{E}\tilde{f}(x'')}{x' - x''} \le 1 \;\forall x' \ne x'' \in X(N,n) \Big\},$$

де $\sigma[a]$ — імовірнісна міра, сконцентрована в єдиному атомі a, якщо для $x \in \mathrm{N}$ і для всіх f $\tilde{f}(x)$ визначає випадкову величину з розподілом, що описується функцією $f(x)$.

Відповідний простір цінових функцій визначимо так:

$$VF_i = \Big\{ v: X(N,n) \to [0;\infty) \,\Big|\, 0 \le v \le \frac{u_i\big(C_i(N,n)\big)}{1-\beta_i} \wedge v \text{ неспадна} \Big\},$$

де $C_i(N,n) = \dfrac{N^n C_i}{N^n}$.

Теорема 7. *Для довільного* $n \in \mathrm{N}$ *керований процес з локально взаємодіючими координатами* $\big(\xi(N,n), \delta(N,n)\big)$ *має стаціонарну рівновагу, яка є елементом простору* $\times_{i \in V} EPS_i(N,n)$. *Мало того, їй відповідатиме цінова функція*

$$(R_i, i \in V) \in \times_{i \in V} VF_i(N,n).$$

Теорема 8. *Керований процес з локально взаємодіючими компонентами* (ξ, δ) *має стаціонарну рівновагу за Нешем, яка є елементом добутку просторів* $\times_{i \in V} EPS_i$. *Мало того, їй відповідатиме цінова функція*

$$(R_i, i \in V) \in \times_{i \in V} VF_i.$$

4) побудовано ітераційні методи знаходження рівноважних за Нешем станів в стохастичних іграх накопичення капіталу для систем, структура яких описується графом локальних взаємодій для несиметричного випадку.

Основний результат для несиметричних ігор.

Для знаходження рівноваги за Нешем в грі зі скінченним горизонтом застосуємо зворотню індукцію.

Нехай n — горизонт гри. Покладемо $\pi_i^1(x) := K_i(x)$ для всіх $x \in X$ і $i \in V$. Тоді

$$v_i^1(x) = \max_{a_i\in A_i(x)} u_i\Big(x, a_i, \sum_{j\in N(i)} a_j\Big) = u_i\Big(x, K_i(x), \sum_{j\in N(i)} K_j(x)\Big).$$

Якщо $v_i^0(x) := 0$ для всіх $x \in X$ і $i \in V$, то $\pi^1(x)$ — рівновага за Нешем в однокроковій грі, v^1 — ціна гри для кожного гравця і $v_i^1 = T_{\pi^1} v_i^0$.

Аналогічно визначимо $\pi^2,\dots,\pi^n \in LS_D$ і $v^2,\dots,v^n \in B(X)$: $v_i^k(x) := (T_{\pi^k} v_i^{k-1})(x)$, $k = 2,\dots,n$. Тоді оптимальною n-кроковою марковською стратегією для гравця i буде стратегія $\pi_i^{(n)} = (\pi_i^n, \pi_i^{n-1}, \dots, \pi_i^1)$.

Для нескінченного горизонту дисконтованої стохастичної гри матимемо:

$$\begin{aligned} v_i(x) &= \lim_{n\to\infty} v_i^n(s) = \lim_{n\to\infty} (T_{\pi^n} v_i^{n-1})(x) \\ &= u_i\Big(x, \pi_i(x), \sum_{j\in N(i)} \pi_j(x)\Big) + \beta_i \int_X v_i(x^1)\, dF\Big(x^1 \,|\, x - \sum_{i\in V} \pi_i(x)\Big) \\ &= \max_{a_i\in[0;A_i(x)]} \Big\{ u_i\Big(x, a_i, \sum_{j\in N(i)} \pi_j(x)\Big) \\ &\quad + \beta_i \int_X v_i(x^1)\, dF\Big(x^1 \,|\, x - a_i - \sum_{j\in V\setminus\{i\}} \pi_j\Big)\Big\}, \quad i \in V. \end{aligned}$$

Оптимальну стратегію знайдемо методом послідовних наближень.

5) отримано нові методи обробки і розпізнавання зображень із застосуванням теорії полів Гіббса і їх теоретичне обґрунтування, підготовлено теоретичну частину рукопису статті

Основний результат.

Теорема 9. *Будь-яке випадкове поле* Π *гіббсовське з деяким потенціалом. Як потенціал* V *можна взяти* $V_\emptyset = 0$*, а для* $A \neq \emptyset$

$$V_A(x) = -\sum_{B\subset A} (-1)^{|A-B|} \ln \Pi\left(x^{B}\right).$$

При цьому для довільного $A \subset S$ і всіх $a \in A$ виконується

$$V_A(x) = -\sum_{B \subset A} (-1)^{|A-B|} \ln \Pi\left(X_a = x_a^B \mid X_s = x_s^B, s \neq a\right).$$

Якщо $x_a = o_a$ для деякого $a \in A$, то $V_A(x) = 0$.

Теорема 10. *Нехай на S задана довільна система околів ∂. Тоді виконуються такі твердження.*

1. Випадкове поле є марковським відносно ∂ тоді і тільки тоді, коли воно є гіббсовським полем найближчої взаємодії для ∂.

2. Для марковського випадкового поля Π з системою околів ∂ виконується

$$\Pi(X_s = x_s, s \in A \mid X_s = x_s, s \in S \setminus A) = \\ = \Pi(X_s = x_s, s \in A \mid X_s = x_s, s \in \partial(A)),$$

де A — довільна підмножина з S.

6) отримано методи обробки і розпізнавання зображень із застосуванням методу Гіббса та імітації відпалу.

Основний результат.

Теорема 11. *Нехай Π гіббсовське поле з енергетичною функцією H. Тоді*

$$\lim_{\beta \to \infty} \Pi^\beta(x) = \begin{cases} 1/|M| & \text{при } x \in M; \\ 0 & \text{інакше.} \end{cases}$$

Для $x \in M$ функція $\beta \mapsto \Pi^\beta(x)$ монотонно зростає, а для $x \notin M$ вона з деякого моменту стає спадною.

Якщо $\beta \to 0$, то гіббсовські поля Π^β сходяться до рівномірного розподілу на всьому X.

Теорема 12. *Нехай $\left(\beta(n)\right)_{n \geq 1}$ — схема охолодження, яка зростає до нескінченності так, що, починаючи з деякого моменту,*

$$\beta(n) \leq \frac{1}{\sigma\Delta} \ln n.$$

Тоді

$$\lim_{n \to \infty} \nu P_1 \ldots P_n(x) = \begin{cases} |M|^{-1} & \text{при } x \in M; \\ 0 & \text{інакше.} \end{cases}$$

При цьому збіжність рівномірна за всіма початковими розподілами ν. Таким самий результат справджується і для випадкових схем сканування за умови, що розподіл сканування G строго додатній.

7) отримано якісні і кількісні методи дослідження NK-автоматів Кауфмана із застосуванням теорії марковських процесів прийняття рішень спеціального типу. Підготовлено рукопис статті.

Основний результат.

Розглянуто такі властивості NK-автомата:

- кількість атракторів;
- медіанне значення довжини атрактора;
- розміри басейнів, які утворюють навколо себе динамічні атрактори;
- стабільність до мінімальних збурень, тобто одноразової зміни значення значення одного з булевих елементів на протилежне;
- стабільність до структурних змін в автоматі, тобто до змін у логічних функціях;
- досяжність між різними атракторами, тобто кількість інших атракторів до яких система може перейти після з кожного з атракторів після усіх можливих мінімальних збурень;
- внутрішня гомогенність функції P — частка серед $2K$ значень функції, яка дорівнює нулю (або одиниці, залежно від того, яких значень більше половини);
- середня внутрішня гомогенність усіх функцій з K входами (P_K).

В роботі отримано такі результати:

- встановлено пряму залежність між N і K та кількістю атракторів в NK-автоматі;
- кількість і потужність атракторів зростає значно повільніше ніж кількість станів у автоматі зі зростанням N;
- стабільність до зовнішніх збурень спадає зі зростанням ;
- виявлено логарифмічне зростання кількості та потужності атракторів при зростанні за фіксованого значення N;
- виявоена обернена залежність між кількістю і потужністю автоматів;
- доведено зменшення впливу сили зовнішнього збурення на стабільність до нього зі зростанням при фіксованому значенні N;
- доведено, що при додаванні до автомата булевого елемента-дубля кількість та потужність атракторів не змінюється, але зростає стабільність автомата до зовнішніх збурень;
- встановлено, що реакція автомата на додавання булевого елемента-дубля збігається з біологічною інтерпретацією моделі: гени-дублі в живих клітинах не впливають на кількість та якість можливих патернів поведінки клітини, але збільшують її стабільність до зовнішніх збурень.

8) отримано методи знаходження оптимальних стратегій в задачах соціальної інженерії з використанням теорії випадкових полів. Підготовлено практичну частину рукопису статті та подано її до друку в журнал,

що індексується в Scopus.

Було розв'язано такі проблеми.

Проблема 1. Оцінка стратегій

За заданим умовним розподілом $H^i\left(\zeta_i^t = z_i \mid \zeta_{N(i)}^{t-1} = z_{V_i}; x^t\right) = H^i\left(z_i \mid z_{N(i)}; x^t\right)$ для $i = 1,\dots,N$ і вектором впливу x^t для періодів $t = 0,\dots,l-1$, знайти розподіли $P(\zeta_i^l)$, $i = 1,\dots,N$, для випадкових величин ζ_i^l, тобто оцінити громадську думку в кінцевий момент часу l.

Проблема 2. Інтерпретація результатів

Ураховуючи знання умовного розподілу $H^i\left(z_i \mid z_{N(i)}; x\right)$ для $i = 1,\dots,N$, вектору впливу x^t і розподілу $P(\zeta_i^l)$, $i \in V_E$ для всіх $i = 1,\dots,N$, визначити значення $P(\zeta_i^l)$ для $i \in V - V_E$.

Проблема 3. Аналіз чутливості

Ураховуючи умовний розподіл $H^i\left(z_i \mid z_{N(i)}; x\right)$ для $i = 1,\dots,N$ і вектор впливу x^t для періодів $t = 0,\dots,l-1$, оцінити похідні $P(\zeta_i^l)$ для всіх $i = 1,\dots,N$, як функції від $x^0,\dots,x^l$.

Публікації

1/ Опубліковано 1 статтю і подано до друку 3 рукописи статей в журнали, що індексуються в Scopus.

Chornei R. (2019) On the Nash Equilibrium in Stochastic Games of Capital Accumulation on a Graph. In: Chertov O., Mylovanov T., Kondratenko Y., Kacprzyk J., Kreinovich V., Stefanuk V. (eds) Recent Developments in Data Science and Intelligent Analysis of Information. ICDSIAI 2018. Advances in Intelligent Systems and Computing, vol 836. Springer, Cham. — P. 125–133.
DOI - https://doi.org/10.1007/978-3-319-97885-7_13

2/ Підготовлено рукопис дисертації на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук.

3/ Подано до друку рукопис навчального посібника «Теорія ймовірностей і випадкові процеси».

4/ Зроблено доповіді на двох міжнародних конференціях.

- International Conference on Data Science and Intelligent Analysis of Information'2018.
- 7th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA-2018).