УДК 519.86

Ляшенко О. І.

ДИНАМІЧНА РІВНОВАГА ВИРОБНИЦТВА І ЦІН ПРОДУКЦІЇ У ВІДКРИТІЙ ЕКОНОМІЦІ

Дослідження відкритої ринкової економіки, що розширюється, здійснюється шляхом модифікації, абстрактної моделі Дж. фон Неймана. Показано, що темп збалансованого зростання виробництва (відповідно темп падіння цін у ринковій економіці) виражається через число Фробеніуса продуктивної нерозкладної матриці. Обсяги виробництва і ціни продукції виражаються відповідно через правий і лівий власні вектори.

Модель "витрати—випуск" В. Леонтьєва є основою багатьох лінійних моделей виробничого сектора економіки [1]. Вона, як відомо, базується на понятті "чиста галузь", що деякою мірою є економічною абстракцією. Передбачається, що весь виробничий сектор народного господарства розділений на N чистих галузей (технологічних галузей) і кожна з галузей випускає лише певний продукт, причому різні галузі випускають різні продукти. У процесі виробництва кожна з галузей використовує, по суті, продукцію всіх галузей.

Обсяги продукції i-ї галузі, необхідні для виробництва одиниці j-го продукту, $a_{ij} \geq 0$ (коефіцієнти прямих витрат) досить повно характеризують технологію виробництва за даний період, задаючи одночасно обсяг і структуру витрат, необхідних для випуску одиниці кожного продукту.

Невід'ємна матриця A прямих витрат (технологічна матриця) описує технологію при роботі всіх галузей з одиничною інтенсивністю. Якщо в даний період кожна з N галузей виробляє обсяги $x_1, x_2, ..., x_N$ (x_j — інтенсивність роботи j-ї галузі) валового випуску відповідно, то вектор інтенсивностей x звичайно називають вектором валового випуску.

Частина валового випуску використовується на виробничі потреби економіки, що описуються вектором виробничих витрат Ax. Вектор $x - Ax = y$ описує кінцеве споживання. Лінійна система рівнянь виду $x = Ax + y$, як відомо, й описує модель "витрати—випуск" В. Леонтьєва [2].

Надалі будемо припускати невід'ємну матрицю A продуктивною і нерозкладною [3].

У багатьох випадках для моделі Леонтьєва розглядають також двоїсту модель, що записується в термінах цін. Нехай $p = (p_1, p_2, ..., p_N)$ — вектор цін, $r = (r_1, r_2, ..., r_N)$ — вектор невиробничих витрат. Тоді, беручи до уваги зміст коефіцієнтів a_{ij} прямих витрат і постулюючи правило нульового прибутку для кожної галузі (виторг галузі за відрахуванням вартості випуску за цінами реалізації дорівнює її витратам) можемо записати балансове співвідношення для цін у вигляді

$$p = pA + r.$$

Для відкритої ринкової економіки країни, що веде значну торгівлю з зовнішнім світом, співвідношення моделі Леонтьєва перетворяться і матимуть вигляд

$$i + x = Ax + \bar{y} + g + e,$$

де i, $\bar{y}$, g, e — вектори імпорту, особистого споживання, державних витрат і експорту відповідно.

При цьому вектор $y = \bar{y} + g + e - i$ може мати як додатні, так і від'ємні компоненти. У останньому випадку відповідна галузь характерна тим, що її вироблена продукція не покриває кінцеве споживання, більше того, вона не покриває і виробничі витрати цієї продукції. Подібні галузі є лише допоміжними, тому що потреби у відповідній продукції покриваються не за рахунок внутрішнього виробництва, а переважно за рахунок імпорту. Прикладом таких галузей в економіці України є видобуток нафти, газу, золота, виробництво комп'ютерної та електронної техніки тощо.

Всі галузі відкритої економіки розділимо на дві групи. До першої віднесемо галузі, для яких компоненти вектора y строго додатні, до другої — галузі, для яких компоненти вектора y недодатні. Тоді

$$y = \left(y_1^1, y_2^1, ..., y_n^1, -y_1^2, -y_2^2, ..., -y_m^2\right),$$

$$y^1 = \left(y_1^1, y_2^1, ..., y_n^1\right) > 0,$$

$$y^2 = \left(y_1^2, y_2^2, ..., y_m^2\right) \geq 0.$$

Позначимо також

$$x^1 = \left(x_1^1, x_2^1, ..., x_n^1\right),$$

$$x^2 = \left(x_1^2, x_2^2, ..., x_m^2\right),$$

$$A_{11} = \left(a_{ij}^{11}\right)_1^n, \quad A_{12} = \left(a_{ij}^{12}\right)_{i,j=1}^{n,m},$$

$$A_{21} = \left(a_{ij}^{21}\right)_{i,j=1}^{m,n}, \quad A_{22} = \left(a_{ij}^{22}\right)_1^m.$$

Тоді модель "витрати—випуск" В. Леонтьєва для відкритої економіки набуває вигляду

$$x^1 = A_{11}x^1 + A_{12}x^2 + y^1,$$

$$x^2 = A_{21}x^1 + A_{22}x^2 + y^2.$$

Аналогічно, увівши вектори цін

$$p^1 = \left(p_1^1, p_2^1, ..., p_n^1\right),$$

$$p^2 = \left(p_1^2, p_2^2, ..., p_m^2\right)$$

і вектори невиробничих витрат

$$r^1 = \left(r_1^1, r_2^1, ..., r_n^1\right),$$

$$r^2 = \left(r_1^2, r_2^2, ..., r_m^2\right),$$

двоїсту модель можна також записати у вигляді системи

$$p^1 = p^1A_{11} + p^2A_{12} + r^1,$$

$$p^2 = p^1A_{21} + p^2A_{22} + r^2.$$

Подальше дослідження відкритої економіки, що розширюється, здійснимо шляхом модифікації абстрактної моделі Дж. фон Неймана [4].

Через $x_t = \left(x_t^1, x_t^2\right)$ позначимо вектор інтенсивностей, що описує функціонування виробничої системи в період $[t-1, t]$, а через $p_{t-1} = \left(p_{t-1}^1, p_{t-1}^2\right)$ позначимо вектор цін у цей же період. Розглядається T періодів часу.

Припущення 1. *Продукція основної групи галузей попереднього періоду забезпечує матеріальні витрати цієї продукції даного періоду.* Це припущення про замкнутість виробництва основної групи галузей математично записується серією нерівностей

$$x_{t-1}^1 \geq A_{11}x_t^1 + A_{12}x_t^2, \quad t = 1, 2, ..., T.$$

Припущення 2. *Продукція допоміжної групи галузей даного періоду не може відтворити матеріальні витрати цієї продукції даного року.* Це припущення про розімкнутість виробництва допоміжної групи галузей записується такою серією нерівностей:

$$x_t^2 \leq A_{21}x_t^1 + A_{22}x_t^2, \quad t = 1, 2, ..., T.$$

Припущення 3. *Кожна з галузей основної групи не дає додатного прибутку.* Це припущення про безприбутковість основного виробництва записується серією нерівностей:

$$p_{t+1}^1 \leq p_t^1A_{11} + p_t^2A_{21}, \quad t = 1, 2, ..., T.$$

Припущення 4. *Кожна з галузей допоміжної групи дає прибуток.* Це припущення про прибутковість допоміжного виробництва записується серією нерівностей:

$$p_t^2 \geq p_t^1 A_{21} + p_t^2 A_{22}, \ t = 1, 2, \ldots, T.$$

Послідовність x_t, $t = 0, 1, 2, \ldots, T$ описує *траєкторію інтенсивностей*, а послідовність p_t, $t = 0, 1, 2, \ldots, T$ — *траєкторію цін.*

Наступні два припущення постулюють один факт — загальна маса грошей не змінюється і постійно перебуває в обігу.

Припущення 5. *Вартісний баланс продукції основної і допоміжної груп галузей у кожний період виконується.* Це припущення записується серією рівностей:

$$p_t^1 x_{t-1}^1 + p_t^2 x_t^2 = p_t A x_t, \ t = 1, 2, \ldots, T.$$

Припущення 6. *Грошова маса незмінна в кожному періоді.* Це припущення записується так:

$$p_{t+1}^1 x_t^1 + p_t^2 x_t^2 = p_t A x_t, \ t = 1, 2, \ldots, T.$$

Таким чином, динамічна модель відкритої ринкової економіки описується припущеннями 1—6.

Траєкторію інтенсивностей $\{x_t\}$ прийнято називати *стаціонарною*, якщо існує таке число $\nu > 0$, що $x_t = \nu^t x$, $t = 0, 1, \ldots, T$. Аналогічно траєкторію цін $\{p_t\}$ називають *стаціонарною*, якщо існує таке число $\mu > 0$, що $p_t = \mu^{-t} p$, $t = 0, 1, \ldots, T$.

Для стаціонарних траєкторій співвідношення динамічної моделі набувають відповідно виду чотирьох нерівностей:

$$\nu(A_{11}x^1 + A_{12}x^2) \leq x^1,$$

$$\mu(p^1 A_{11} + p^2 A_{21}) \geq p^1,$$

$$A_{21}x^1 + A_{22}x^2 \geq x^2,$$

$$p^1 A_{12} + p^2 A_{22} \leq p^2$$

та двох рівностей:

$$\nu^{-1} p^1 x^1 + p^2 x^2 = pAx,$$

$$\mu^{-1} p^1 x^1 + p^2 x^2 = pAx.$$

Модель знаходиться в стані *динамічної рівноваги*, що описується ***параметрами*** (ν, μ, x, p), якщо для ν, $\mu > 0$ при $x, p \geq 0$ $(x, p \neq 0)$ виконуються вищенаведені рівності та нерівності.

Число pAx — це вартість витрат у стані рівноваги моделі, складовими якої є вектори *інтенсивностей x* і *цін p*. Природно вважати, що $pAx > 0$. Тоді в силу того, що $p^1x^1 > 0$, $p^2x^2 > 0$, матимемо $\mu = \nu = \alpha > 0$.

Трійка (α, x, p), де число $\alpha > 0$, вектори $x^1, x^2, p^1, p^2 \geq 0$ $(x^1, x^2, p^1, p^2 \neq 0)$ такі, що

$$\alpha\left(A_{11}x^1 + A_{12}x^2\right) \leq x^1, \ \alpha\left(p^1 A_{11} + p^2 A_{21}\right) \geq p^1,$$

$$\left(A_{21}x^1 + A_{22}x^2\right) \geq x^2, \ \left(p^1 A_{12} + p^2 A_{22}\right) \leq p^2,$$

$$\frac{1}{\alpha} p^1 x^1 + p^2 x^2 = pAx > 0,$$

є *невиродженим станом рівноваги*. Якщо вектор x бере участь у невиродженому стані рівноваги, то промінь $z = \gamma x$ при $\gamma > 0$ буде *променем Неймана.*

Нас цікавить питання існування розв'язку вищенаведеної системи, іншими словами, існування невиродженого стану рівноваги динамічної моделі.

Позначимо $\lambda = \dfrac{1}{\alpha}$ і перепишемо цю систему у вигляді такої системи:

$$A_{11}x^1 + A_{12}x^2 \leq \lambda x^1, \ p^1 A_{11} + p^2 A_{21} \geq \lambda p^1,$$

$$A_{21}x^1 + A_{22}x^2 \leq x^2, \ p^1 A_{12} + p^2 A_{22} \geq p^2,$$

$$p^1\left[\lambda x^1 - A_{11}x^1 - A_{12}x^2\right] +$$

$$+ p^2\left[x^2 - A_{21}x^1 - A_{22}x^2\right] =$$

$$= \left[\lambda p^1 - p^1 A_{11} - p^2 A_{21}\right] x^1 +$$

$$+ \left[x^2 - p^1 A_{12} - p^2 A_{22}\right] x^2 = 0$$

Надалі розглядається випадок економіки, що *розширюється*, $\alpha > 1$, *чому відповідає* $0 < \lambda < 1$. Нехай I_2 — одинична діагональна матриця порядку m. Тоді матриця $I_2 - A_{22}$ в силу продуктивності і нерозкладності матриці A_{22} буде додатно обернена, тобто $(I_2 - A_{22})^{-1} > 0$. Тому з вищенаведених нерівностей отримаємо

$$0 \leq x^2 \leq (I_2 - A_{22})^{-1} A_{21} x^1, \ p^2 \geq p^1 A_{12}(I_2 - A_{22})^{-1}.$$

Позначимо через $A_1 = A_{11} + A_{12}(I_2 - A_{22})^{-1} A_{21}$ додатну матрицю, що автоматично є і нерозкладною. В силу продуктивності і нерозкладності кліткової матриці A буде $(I - A)^{-1} > 0$, звідки відповідно до правила обернення кліткової матриці [3], зокрема, маємо $(I_1 - A_1)^{-1} > 0$, що означає продуктивність матриці A_1.

Аналізуючи вищенаведену систему нерівностей, дійдемо висновку [5], що найбільше λ при $p^2 = p^1 A_{12}(I_2 - A_{22})^{-1}$ визначається зі співвідношення $p^1 A_1 = \lambda p^1$, а найменше λ при $x^2 = (I_2 - A_{22})^{-1} A_{21} x^1$ визначається зі співвідношення $A_1 x^1 = \lambda x^1$, де $x^1 > 0$, $p^1 > 0$. Обидві ці умови автоматично виконуються, якщо $\bar{\lambda}$ — число Фробеніуса матриці A_1, тобто $\bar{\lambda} = \lambda(A_1)$. При цьому $x^1(A_1)$ — правий фробеніусів вектор, а $p^1(A_1)$ — лівий фробеніусів вектор матриці.

Таким чином, невироджений стан рівноваги динамічної моделі відкритої економіки, що розширюється, існує і єдиний. При цьому $\bar{\lambda} = \lambda(A_1)$.

$$\bar{x}^1 = x^1(A_1), \quad \bar{x}^2 = (I_2 - A_{22})^{-1} A_{21} x^1(A_1),$$

$$\bar{p}^1 = p^1(A_1), \quad \bar{p}^2 = p^1(A_1) A_{12} (I_2 - A_{22})^{-1}.$$

Підставляючи це в пряму та двоїсту моделі Леонтьєва, отримаємо:

$$\bar{y}^1 = (1-\bar{\lambda})\bar{x}^1 > 0, \quad \bar{r}^1 = (1-\bar{\lambda})\bar{p}^1 > 0,$$

$$\bar{y}^2 = 0, \qquad \bar{r}^2 = 0,$$

що означає по суті замкнутість економіки. Допоміжна група галузей виробляє свою продукцію, що забезпечує лише виробничі потреби основної групи галузей. Умовно чиста продукція допоміжної групи галузей дорівнює нулю і кінцеве споживання її теж нульове. Допоміжні галузі стають невід'ємною частиною основного виробництва і можуть бути виключені з розгляду.

Як приклад, розглядалась структура економіки України, що склалася за 1995 р. З 18 виділених галузей до основної групи входили 11 галузей (електроенергетика, вугільна, машинобудування, лісна, харчова, будівництво, сільське господарство, транспорт і зв'язок, торгівля і громадське харчування, інші галузі, інші види діяльності), а до допоміжної групи входили 7 галузей (нафтогазова, паливо інших видів, чорна металургія, хімічна і нафтохімічна, будівельні матеріали, легка). Розрахунки за технологічною матрицею A розмірності 18×18 та за матрицею A_1 розмірності 11×11 показали, що $\lambda(A) = 0{,}64$, $\lambda(A_1) = 0{,}58$, що відповідають збалансованим темпам росту $\alpha(A) = 1{,}56$ (56 % річного приросту), $\alpha(A_1) = 1{,}72$ (72 % річного приросту).

На закінчення відзначимо, що величину збалансованого темпу $\alpha(A_1)$ розвитку відкритої ринкової економіки варто розглядати лише як граничну та гіпотетичну, тому що вона отримана без урахування обмежень на виробничі потужності, без урахування можливостей зовнішньої торгівлі, а також без урахування структури державного та особистого споживання продукції.

1. *Гранберг А. Г.* Моделирование социалистической экономики.— М.: Экономика, 1988.— 487 с.

2. *Леонтьев В. В.* Межотраслевая экономика.— М.: ОАО Издательство «Экономика», 1997.— 479 с.

3. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц.— М.: Наука, 1967.— 576 с.

4. *Никайдо Х.* Выпуклые структуры и математическая экономика.— М.: Мир, 1972.— 517 с.

5. *Ашманов С. Ф.* Введение в математическую экономику.— М.: Наука, 1984.— 294 с.

Lyashenko O. I.

DYNAMIC EQUILIBRIUM OF PRODUCTION AND PRODUCT PRICES IN THE OPEN ECONOMY

The investigation of extending open market economics is carried out by updating abstract model by J. von Neuman. It is shown, that the rate of the balanced production growth (rate of landslide of prices in market economy accordingly) is expressed through Frobenius numbers of a productive indecomposable matrix. The volumes of production and prices are expressed through the right and left eigenvectors accordingly.