УДК 539.3

Лавренюк В. І, Терещенко В. М.

ОДИН СПОСІБ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗВ'ЯЗАНОЇ КВАЗІСТАТИЧНОЇ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ КУСКОВО-ОДНОРІДНОГО ТІЛА

У даній роботі розглядається один підхід розділення системи рівнянь зв 'язаної квазістатичної задачі термопружності у кусково-однорідному тілі відносно ентропії та переміщень для застосування методу граничних елементів (МГЕ) до їїрозв 'язання.

У роботі [1] розглядається постановка та розв'язок незв'язаної задачі термопружності кусково-однорідних тіл за допомогою методу граничних елементів [4]. Побудувати розв'язок у цьому випадку вдалось за рахунок роздільності системи визначальних рівнянь нестаціонарної термопружності відносно температури та переміщень. У даній роботі застосовується підхід, запропонований Біо [5] при розв'язанні зв'язаної задачі термопружності для однорідного ізотропного тіла, який дає змогу розділити систему визначальних рівнянь для кусково-однорідного тіла відносно ентропії та переміщень.

Постановка задачі. Для постановки зв'язаної квазістатичної задачі термопружності скористаємось системою рівнянь [2]:

$$(\lambda_0 + \mu_0)u(x,t)_{j,ji} + \mu_0\Delta u(x,t)_i + X_i(x,t) - \\ - \gamma_0\theta(x,t)_{,i} = 0, \quad x \in D_0, \tag{1}$$

$$(\lambda_p + \mu_p)u(x,t)_{j,ji} + \mu_p\Delta u(x,t)_{i,jj} + X_i(x,t) - \\ - \gamma_p\theta(x,t)_{,i} = 0, \quad x \in D_p, \tag{2}$$

$$\theta(x,t)_{,ii} - \frac{1}{\alpha_0}\dot{\theta}(x,t) - \eta_0 T_0\Omega_1 = -\frac{w_0}{\lambda_{t0}}, \quad x \in D_0, \tag{3}$$

$$\theta(x,t)_{,ii} - \frac{1}{\alpha_p}\dot{\theta}(x,t) - \eta_p \mathrm{T}_0\dot{u}(x,t)_{k,k} = -\frac{w_p}{\lambda_{tp}}, x \in D_p. \tag{4}$$

Запишемо умови на границях контурів спряження областей:

$$u(x_p,t)_i = u(x_0,t)_i, \quad x_0, x_p \in \Gamma_p \ (p = 1, 2, \dots, P), \tag{5}$$

$$\sigma(x_p,t)_{ij}n(x_p)_j = \sigma(x_0,t)_{ij}n(x_0)_j, \quad x_0, x_p \in \Gamma_p, \tag{6}$$

$$\theta(x_p,t) = \theta(x_0,t), \quad x_0, x_p \in \Gamma_p, \tag{7}$$

$$\frac{\lambda_{tp}\partial\theta(x_p,t)}{n(x_p)} = \frac{\lambda_{t0}\partial\theta(x_0,t)}{n(x_0)}, \quad x_0, x_p \in \Gamma_p. \tag{8}$$

Граничні умови:

$$\sigma(x,t)_{ij}n(x)_j = q(x,t)_i, \quad x \in \Gamma$$

або

$$u_i(x,t) = \psi_i(x,t), \qquad x \in \Gamma, \tag{9}$$

$$\theta(x,t) = T_\Gamma(x,t), \qquad x \in \Gamma,$$

або

$$\frac{\partial\theta(x,t)}{n(x)} = \varphi(x,t), \quad x \in \Gamma. \tag{10}$$

Початкові умови:

$$u(x,t_0)_i = 0, \quad \theta(x,t_0) = 0, \quad x \in D. \tag{11}$$

Запишемо співвідношення, які зв'язують ентропію та температуру:

$$S = \gamma u_k(x,t)_{,k} + \frac{c_\varepsilon\theta(x,t)}{T_0}. \tag{12}$$

Відносно 0 співвідношення (12) набуде вигляду

$$\theta = \frac{T_0 S}{c_\varepsilon} - \frac{T_0\gamma u_k(x,t)_{,k}}{c_\varepsilon}. \tag{13}$$

Підставивши (13) у рівняння (1)–(11), отримаємо таку систему рівнянь:

$$\left(\mu_0 + \lambda_0 + \frac{\gamma_0^2 T_0}{c_{\varepsilon 0}}\right)u_{l,li} + \mu_0\Delta u_i + X_i - \frac{\gamma_0 T_0}{c_{\varepsilon 0}}S_{,i} = 0, \tag{14}$$

$$\left(\mu_p + \lambda_p + \frac{\gamma_p^2 T_0}{c_{\varepsilon p}}\right)u_{l,li} + \mu_p\Delta u_i + X_i - \frac{\gamma_p T_0}{c_{\varepsilon p}}S_{,i} = 0, \tag{15}$$

$$S_{,ll} - \gamma_0\varepsilon_{kk,ll} - \frac{1}{\alpha_0}\dot{S} = -\frac{c_{\varepsilon 0}w}{T_0\lambda_{t0}}, \tag{16}$$

$$S_{,ll} - \gamma_p\varepsilon_{kk,ll} - \frac{1}{\alpha_p}\dot{S} = -\frac{c_{\varepsilon 0}w}{T_0\lambda_{tp}}. \tag{17}$$

Співвідношення (7), (8), (10), (11) відносно ентропії набудуть вигляду

$$\frac{1}{c_{\varepsilon 0}}(S - \gamma_0\varepsilon_{kk}) = \frac{1}{c_{\varepsilon p}}(S - \gamma_0\varepsilon_{kk}), \quad x_0, x_p \in \Gamma_p, \tag{7'}$$

$$\frac{\lambda_{tp}}{c_{\varepsilon p}}\frac{\partial S(x_p,t)}{\partial n(x_p)} - \frac{\gamma_p}{c_{\varepsilon p}}\frac{\partial\varepsilon_{kk}(x_p,t)}{\partial n(x_p)} = \\ = \frac{\lambda_{t0}}{c_{\varepsilon 0}}\frac{\partial S(x_0,t)}{\partial n(x_0)} - \frac{\gamma_0}{c_{\varepsilon 0}}\frac{\partial\varepsilon_{kk}(x_0,t)}{\partial n(x_0)}, \quad x_0, x_p \in \Gamma_p, \tag{8'}$$

$$S(x,t) = \frac{c_{\varepsilon 0}T_\Gamma(x,t)}{T_0} + \gamma_0\Psi_k(x,t)_{,k}, \quad x \in \Gamma, \tag{10'}$$

$$u(x,t_0)_i = 0, \quad S(x,t_0) = 0, \quad x \in D. \tag{11'}$$

Поклавши $\beta_q = \dfrac{\gamma_q T_0}{c_{\varepsilon q}}$, $\lambda'_q = \lambda_q + \gamma_q\beta_q$, $q = 0, p$,

рівняння (14), (15) продиференціюємо по x і просумуємо по індексу i, в результаті чого матимемо

$$\varepsilon_{kk,ll} = \frac{\beta_0}{\lambda'_0 + 2\mu_0}S_{,ll} - \frac{X_{i,i}}{\lambda'_0 + 2\mu_0}, \quad x \in D_0; \tag{18}$$

$$\varepsilon_{kk,ll} = \frac{\beta_p}{\lambda'_p + 2\mu_p}S_{,ll} - \frac{X_{i,i}}{\lambda'_p + 2\mu_p}, \quad x \in D_p. \tag{19}$$

Підставивши (18), (19) у (16), (17), матимемо систему рівнянь, яка розділяється відносно функцій u_i та S:

$$(\lambda'_0 + \mu_0)\, u_{l,li} + \mu_0\Delta u_i + X_i - \beta_0 S_{,i} = 0, \quad x \in D_0, \tag{14'}$$

$$(\lambda'_p + \mu_p)\, u_{l,li} + \mu_p\Delta u_i + X_i - \beta_p S_{,i} = 0, \quad x \in D_p, \tag{15'}$$

$$k_0 S_{,ll} - \frac{1}{\alpha_0}\dot{S} = -\frac{w}{\alpha_0 T_0} - \frac{\gamma_0 X_{i,i}}{\lambda'_0 + 2\mu_0}, \quad x \in D_0, \tag{16'}$$

$$k_p S_{,ll} - \frac{1}{\alpha_p}\dot{S} = -\frac{w}{\alpha_p T_0} - \frac{\gamma_p X_{i,i}}{\lambda'_p + 2\mu_p}, \quad x \in D_p, \tag{17'}$$

де $k_q = \dfrac{\lambda'_q + 2\mu_q}{\lambda'_q + 2\mu_q}$, $q = 0, p$.

Рівняння (16')–(17') перепишемо у такому вигляді:

$$S_{,ll} - \frac{1}{A_0}\dot{S} = -\frac{\tilde{w}_0}{k_0},\ x \in D_0, \qquad (16'')$$

$$S_{,ll} - \frac{1}{A_p}\dot{S} = -\frac{\tilde{w}_p}{k_p},\ x \in D_p, \qquad (17'')$$

де $A_q = \alpha_q k_q,\ \tilde{w}_q = \frac{w}{\alpha_q T_0} - \frac{\gamma_q X_{i,i}}{\lambda'_q + 2\mu_q},\ q = 0, p.$

Побудова розв'язку задачі. Для розв'язання системи рівнянь (14'), (15'), (16"), (17") застосуємо метод граничних інтегральних рівнянь [4], згідно з яким, з урахуванням граничних (10') та початкових (11') умов, матимемо систему інтегральних зображень відносно шуканих функцій:

$$S(x,t) = A_0 \int_{t_0}^{t}\int_{\Gamma_p} G\frac{\partial S}{\partial n}d\gamma dt' - \frac{A_0 c_{\varepsilon 0}}{T_0}\int_{t_0}^{t}\int_{\Gamma} T_\Gamma \frac{\partial G}{\partial n}d\gamma dt' -$$

$$-A_0\gamma_0\int_{t_0}^{t}\int_{\Gamma}\psi_{k,k}\frac{\partial G}{\partial n}d\gamma dt' - \alpha_0\int_{t_0}^{t}\int_{D\backslash D_p}\tilde{w}_0 G ds dt' -$$

$$-A_0\int_{t_0}^{t}\int_{\Gamma_p} S\frac{\partial G}{\partial n}d\gamma dt',\ x \in D\setminus D_p,\ t \ge t_0. \qquad (20)$$

$$S(x,t) = A_p\int_{t_0}^{t}\int_{\Gamma_p} S\frac{\partial G}{\partial n}d\gamma dt' - A_p\int_{t_0}^{t}\int_{\Gamma_p} G\frac{\partial S}{\partial n}d\gamma dt' -$$

$$-\alpha_p\int_{t_0}^{t}\int_{D_p}\tilde{w}_p G ds dt',\ x \in D_p,\ t \ge t_0, \qquad (21)$$

де G – функція Гріна задачі, відповідної до (16"), (17") для області D [3].

У випадку рівних коефіцієнтів Пуассона матриці і включень, а саме: $\nu_p = \nu_0$, $\forall p = 1, 2, \ldots, P$, інтегральне зображення для переміщень буде єдиним для всієї розглядуваної кусково-однорідної області аналогічно зображенню, виведеному у роботі [1], і матиме вигляд:

$$u_k(x,t) = \int_D X_i G_k^i d\Omega - \frac{E_p - E_0}{E_p}\int_{D_p} X_i G_k^i d\Omega -$$

$$-\beta_0\int_D S_{,i}G_k^i d\Omega - (\beta_p - \beta_0)\int_{D_p} S_{,i}G_k^i d\Omega +$$

$$+\frac{E_p - E_0}{E_p}\beta_p\int_{D_p} S_{,i}G_k^i d\Omega - (\beta_p - \beta_0)\int_{\Gamma_p} S n_i G_k^i d\gamma +$$

$$+\beta_0\int_\Gamma S n_i G_k^i d\gamma - \frac{E_p - E_0}{E_p}\int_{\Gamma_p}\sigma_{ij} n_i G_k^i d\gamma +$$

$$+\int_\Gamma q_i G_k^i d\gamma,\ x \in D, \qquad (22)$$

де G_k^i є функції Гріна відповідної задачі термопружності для області D; E_q – модуль пружності для відповідної області (q = 0, p); $\sigma_{ij} = \lambda_p u_{l,l}\delta_{ij} + \mu_p(u_{i,j} + u_{j,i})$.

На основі зображень (20)–(22) будується система граничних інтегральних рівнянь відносно невідомих ентропії, переміщень чи напружень методом граничних елементів [4].

1. *Лавренюк В. 1., Терещенко В. М.* Напружений стан кусково-однорідпих тіл під дією нестаціонарних полів // Математнчні методи і фізико-механічиі поля.- 1997.- Том 40.- № 1.- 11 с.
2. *Новацкий В.* Теория упругости.- М.: Мир, 1975- 872 с.
3. *Терещенко В. М.* Функції Гріна квазістатичної задачі термопружності // Вычисл. и прикл. математика.- 1993.-Вып. 7.
4. *Бреббия К, Телпес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов.-М.: Мир, 1987-524 с.
5. *BiotM. A.* Mechanics ofIncremental Deforniation- NY: Wiley, 1965.

V. L Lavrenyuk, V. M. Tereschenko

ONE METHOD OF SOLUTION OF THE CONNECTED QUAZISTATICAL PROBLEM OF THERMOELASTICITY IN NON-HOMOGENEOUS SOLID

In this article is considered one method of division equations system of the connected quazistatical problem of thermoelasticity in non-homogeneous solid relatively entropy and displacement for application of the boundary element method (BEM) to it 's solution.