УДК 621.3:519.673

Олецький О. В.

АЛГОРИТМ ВІДНОВЛЕННЯ ОДНОВИМІРНИХ СИГНАЛІВ НА ОСНОВІ ІНТЕГРАЛЬНОГО РОЗКЛАДУ КАРУНЕНА-ЛОЕВА

Пропонується векторно-матрична обчислювальна схема для вирішення задачі редукції до ідеального приладу, яка базується на квадратурних алгоритмах інтегрального розкладу Карунена-Лоева. Обговорюється зв 'язок між різними параметрами регуляризації, зокрема проблема підбору оптимальної кількості дискрет.

Задача редукції до ідеального приладу, яка розглядається як частковий випадок загальної проблеми інтерпретації експериментальних залежностей [1-5], є важливою науково-технічною проблемою. Задача полягає у відновленні за величиною *u(t),* що спостерігається на виході неідеальної вимірювальної апаратури, істинної величини *y(f),* яка нас цікавить. Математично ця проблема формулюється як задача розв'язання інтегрального рівняння Фредгольма першого роду

$$Ay \equiv \int_a^b K(t,s)y(s)ds = u(t)\,. \qquad (1)$$

Інтегральний оператор *A* у найбільш типовому випадку вважається компактним; достатньою умовою його компактності є обмеженість ядра *K(t,s)* на квадраті *(t,s: a < t < b, a< s < b}.* Тоді обернений оператор не є обмеженим, і задача є некоректною. Відомо багато методів і алгоритмів вирішення цієї задачі, кожний з яких пов'язаний з тією чи іншою регуляризацією, яка залежить від параметрів методу. Серед основних підходів до регуляризації слід виокремити такі:

- перехід від нескінченновимірного простору до скінченновимірного;
- заміна рівняння (1) близьким йому, тобто перехід від рівняння першого роду (1) до близького йому інтегрального рівняння Фредгольма другого роду;
- обмеження кількості високочастотних спектральних складових;
- кількість ітерацій при застосуванні ітеративних методів.

Можна вважати, що оператор *A* є симетричним і невід'ємно визначеним. Якщо це не так, ми можемо перейти від рівняння (1) до симетризованого рівняння

$$A^*Ay = A^*u. \qquad (2)$$

Перспективним підходом до розв'язання рівняння (1) є застосування методу власних функцій, іншими словами - перехід до модельного простору, який визначається власними функціями оператора *A.* Метод грунтується на розкладі *K(t,s)* в ряд

$$K(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k \varphi_k(t)\varphi_k(s), \qquad (3)$$

де $\{\varphi_k(t)\}$ – власні функції оператора, що відповідають власним значенням σ_k, упорядкованим за спаданням. Тоді розклад правої частини за цими ж власними функціями має вигляд

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \varphi_k(t). \qquad (4)$$

Тоді розв'язок рівняння (1) слід шукати у вигляді ряду

$$y(t) = F(t) + G(t), \qquad (5)$$

де

$$F(t) = \sum_{k=1}^{r_0} \frac{\rho_k - w(\varepsilon_k)}{\sigma_k + \alpha_k} \varphi_k(t), \qquad (6)$$

$$G(t) = \sum_{k=r_0+1}^{\infty} \gamma_k \varphi_k(t). \qquad (7)$$

Тут $w(\varepsilon_k)$ – фільтр, який залежить від випадкової похибки ε_k, a_k – параметри регуляризації (застосовується ідея заміни рівняння (1) близьким йому); r_0 – номер члена ряду, який вибирається з умови $\sigma_k = 0$ при $k > r_0$.

Що ж стосується компоненти *G(t),* то вона пов'язана з принципово іншим типом некоректності – неєдиністю розв'язку. Коефіцієнти γ_k можна брати будь-якими з урахуванням того, що ряд (5)-(7) повинен збігатися, і єдиний задовільний спосіб визначити їх - максимальне врахування апріорної інформації про характер підінтегральної функції.

Теоретичні основи методу описані в [3, 6]; по суті, він являє собою застосування розкладу Карунена-Лоева [7]. При цьому спрощуються розрахункові формули; можна чітко виокремити різні ситуації: коли розв'язок є єдиним і стійким, єдиним, але нестійким або ж неєдиним. Детальне обговорення цих питань можна знайти в [8, 9].

При застосуванні методу власних функцій з'являється можливість здійснювати більш якісну, ніж при застосуванні інших методів, фільтрацію правої частини. Крім того, розщеплення оператора A на окремі спектральні складові дає змогу розв'язувати інтегральне рівняння (1) і шукати параметри регуляризації для кожної складової незалежно від інших.

Але, незважаючи на теоретичну привабливість підходу, метод власних функцій для розв'язання задачі редукції на основі інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду не набув значного поширення. Практичне застосування методу значною мірою стримувалося недостатнім розвитком зручних обчислювальних алгоритмів, а також відсутністю задовільних підходів до вибору параметрів регуляризації на його основі.

В [10-12] запропонована обчислювальна методика подання одновимірних неперервних сигналів на основі отримання спектральних коефіцієнтів інтегрального розкладу Карунена-Лоева (базова квадратурна схема, що включає до свого складу два алгоритми: прямий квадратурний та двоїстий квадратурний). Алгоритми були представлені у векторно-матричній формі, зручній для програмування на основі сучасних інструментальних середовищ, зокрема в пакеті Matlab.

Схожість математичних постановок задач робить можливим застосування цієї обчислювальної схеми до знаходження розв'язку інтегрального рівняння (1). Дійсно, розв'язок можна отримати на основі перетворення

$$y = uM_{A,r}, \tag{8}$$

де $M_{A,r} = B^{\frac{1}{2}}\Psi\left(\Lambda + \Gamma I\right)^{-1}\Psi' B^{-\frac{1}{2}}$ – матриця, яка залежить від параметрів регуляризації A та r (y та u розглядаються як вектор-рядки, тому множення на матрицю перетворення здійснюється справа); I – одинична матриця; $W = \mathrm{diag}\{\alpha_k\}$, α_k – параметри регуляризації; Ψ – матриця, утворена з вектор-стовпців матриці $\Psi^{(on)}$; остання отримується в результаті розв'язання опорної алгебраїчної задачі на власні значення

$$L\Psi^{(on)} = \Psi^{(on)}\Lambda. \tag{9}$$

Далі вибираються r стовпців, що відповідають r найбільшим власним значенням, упорядкованим за спаданням. При цьому опорна задача розв'язується відносно опорної матриці

$$L = B^{\frac{1}{2}} Z B^{\frac{1}{2}}, \tag{10}$$

$B = \mathrm{diag}(\beta_k)$; β_k – коефіцієнти квадратурної формули, яка використовується для апроксимації інтегралів; за таку формулу можна прийняти, наприклад, формулу Сімпсона; *u, y* і Z є дискретизована права частина, підінтегральна функція та ядро відповідно.

Слід зазначити, що при застосуванні традиційних підходів всі α_k є рівними між собою, що відповідає сталому параметру регуляризації. З іншого боку, очевидно, що застосування змінного параметра регуляризації дає змогу істотно підвищити якість розв'язку. Зокрема, при $\sigma_k > 1$ інтегральний оператор не посилює похибки відповідних компонент, а, навпаки - послаблює, і тому за вказаних умов можна просто покласти $a_k = 0$. Але при прямуванні a_k до нуля a_k повинні зростати. Параметри регуляризації a_k повинні також зростати зі збільшенням дисперсії шуму.

Для знаходження параметрів регуляризації для кожної спектральної складової окремо може бути сформульована задача оптимізації, подібно до того, як це робиться при класичному підході [1, 2, 5]. Може бути використана апріорна інформація про спектральні характеристики шуму. Безумовно, ці інтуїтивні положення вимагають уточнення і деталізації.

Ефективність використання схеми (8)-(10), очевидно, значно посилиться, якщо провести апріорну фільтрацію правої частини відповідно до формули (6). У найпростішому випадку можна просто «зрізати» складові, яких немає в розкладі ядра, оскільки в точній правій частині таких складових бути не може; вони з'являються лише під впливом шуму. Іншими словами, при $\sigma_k = 0$ коефіцієнти p_k також треба покласти нульовими. Для інших спектральних складових апріорна фільтрація повинна бути тоншою.

Експериментальні дослідження свідчать про те, що при малих значеннях a_k, хоча відновлений сигнал і спотворюється високочастотним високоамплітудним шумом, його тренд у цілому зберігає свою форму. Це наводить на думку про можливість апостеріорної фільтрації, тобто згладження розв'язку уже після відновлення сигналу. Це питання майже не досліджувалося та заслуговує окремого розгляду.

Важливим є питання про зв'язок між основними параметрами регуляризації. Схема використовує три вищеперелічені підходи до регуляризації (перехід до скінченновимірного простору, перехід до рівняння другого роду і усікнення високочастотних складових). Відповідно до цього конкретний вигляд схеми (8)-(10) визначається такими параметрами:

- сімейство параметрів {ос*}, які утворюють діагональну матрицю *А;*

— кількість спектральних коефіцієнтів r

- кількість дискрет *n*.

При розгляді схеми (8)-(10) аналіз останнього параметра заслуговує на особливу увагу. Дійсно, некоректність задачі (1) приводить до того, що вибір оптимальної кількості дискрет стає важливою проблемою. Апроксимація рівняння (1) на основі його дискретизації і використання квадратурних формул для обчислення інтегралів фактично являє собою перехід до скінченновимірного простору, в якому дискретний аналог рівняння (1) є системою лінійних алгебраїчних рівнянь і може являти собою цілком коректну задачу. Тоді, з одного боку, надмірне зменшення кількості дискрет призводить до втрати точності. З іншого боку, збільшення кількості дискрет наближає задачу до нескінченновимірної, у зв'язку з чим у ряді випадків похибка розв'язку не зменшується, як можна було б сподіватися, а, навпаки, різко зростає.

У той же час квадратурні алгоритми інтегрального перетворення Карунена-Лоева спеціально розроблялися для зменшення кількості початкових дискрет без суттєвої втрати точності. Це видається дуже важливим при вирішенні вказаної проблеми - підбору параметрів регуляризації, оптимальних з точки зору якості відновлення сигналів, зокрема підбору оптимальної кількості дискрет, оскільки можна сподіватися на більш якісну апроксимацію рівняння (1) без втрати стійкості розв'язку. Зокрема, видається доцільним дослідити зв'язок між кількістю початкових дискрет і поведінкою спектральних коефіцієнтів інтегрального розкладу Карунена-Лоева, зокрема швидкістю їх спадання, що в свою чергу пов'язано з параметром *г*.

1. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач.-М.: Наука, 1986-288 с.
2. *Морозов В. А.* Регулярные методы решения некорректно поставленных задач.- М.: Наука, 1987.- 240 с.
3. *Верлань А. Ф., Сизиков В. С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие-К.: Наукова думка, 1986.-544 с.
4. *Верлань А. Ф., Абдусатаров Б. Б., Игнатченко А. А., Максіімович Н. А.* Методы и устройства интерпретации экспериментальных зависимостей при исследовании и контроле энергетических процессов- К.: Наукова думка, 1993-208с.
5. *Пытьев Ю. П.* Математические методы интерпретации эксперимента.-М.: Высшая школа, 1989.-351 с.
6. *Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А., Михлі4н С. Г., Раковщик Л. С., Стеценко В. Я.* Интегральные уравнения-М.: Наука, 1968.-448 с.
7. *Фукунага К.* Введение в статистическую теорию распознавания образов-М.: Наука, 1979.-368 с.
8. *Олецький О. В.* Про застосування інтегрального розкладу Карунена-Лоева для вирішення інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду // Збірник наукових праць. Інститут проблем моделювання в енергетиці.-К.-2000-С. 35-40.
9. *Олецький О. В.* Адаптивна регуляризація розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма першого роду на основі розкладу Карунена-Лоева // Наукові записки НаУКМА.-Т. 18. Комп'ютерні науки-2000-С. 37-39.
10. *Олецкий А. В.* Параметризация непрерывных диагностических сигналов на основе интегрального преобразования Карунена-Лоэва / Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата технических наук.-К.- 1991.- 17 с.
11. *Верлань А. Ф., Игнатченко А. А., Олецкий А. В.* Построение математических моделей непрерывных сигналов на основе интегрального преобразования Карунена-Лоэва // Электронное моделирование.- 1992.-№2-С. 3-7.
12. *Олецкий А. В.* О применении интегрального разложения Карунена-Лоэва при моделировании динамических систем // УСиМ.-1999.-№2.-С. 12-15.

O. V. Oletskyy

THE ALGORITHM FOR RESTORING ONE-DIMENSIONAL SIGNALS ON THE BASE OF THE CONTINUOUS KARHUNEN-LOEVE EXPANSION

The numerical computational scheme based on the continuous Karhunen-Loeve expansion is suggested. The scheme is represented as a set ofsimple operations with vectors and matrixes. The relations between different parameters ofregularization and ofchoosing the optimal number ofinitial discretes are regarded.