УДК 519.85

Ємець О. О., Барболіна Т. М.

КОМБІНАТОРНА ОПТИМІЗАЦІЙНА МОДЕЛЬ УПАКУВАННЯ ПРЯМОКУТНИКІВ З ІМОВІРНІСНИМИ ОБМЕЖЕННЯМИ

Формалізовано допустиме взаємне розташування прямокутників зі стохастичними параметрами в задачі упакування для випадку, коли обмежується зверху ймовірність їх перетину. Побудовано математичну модель однієї задачі упакування прямокутників у напівнескінченну смугу із зазначеними ймовірнісними обмеженнями. Продемонстровано можливість переходу до еквівалентної детермінованої задачі упакування прямокутників.

Ключові слова: дискретна випадкова величина, комбінаторна оптимізація, стохастична оптимізація, упакування прямокутників.

Актуальним напрямом наукових досліджень у галузі оптимізації є вивчення комбінаторних екстремальних задач з різними видами невизначеності, зокрема, інтервальною, стохастичною тощо (див., наприклад, [1; 3; 5–7]). Дослідження методів розв'язування оптимізаційних задач на множинах комбінаторної природи з урахуванням різних видів невизначеності здійснюється, зокрема, і в рамках евклідової комбінаторної оптимізації.

Розглянемо необхідні поняття й означення евклідової комбінаторної оптимізації, спираючись переважно на [9]. Під мультимножиною розуміємо сукупність елементів, серед яких можуть бути й однакові. Евклідовою комбінаторною множиною називають множину, різними елементами якої є різні упорядковані k-вибірки з мультимножини $G=\{g_1,\dots,g_\eta\}$ вигляду

$$\left(g_{i_1},\dots,g_{i_k}\right), \qquad (1)$$

де $g_{i_j}\in G$, $i_j\neq i_t$ $\forall i_j,i_t\in J_\eta$, $\forall j,t\in J_k$ (тут і далі через J_n позначено множину n перших натуральних чисел). Уведення поняття евклідової комбінаторної множини дало змогу виділити з множини задач оптимізації комбінаторного типу так звані евклідові задачі комбінаторної оптимізації, що полягають у знаходженні екстремуму та екстремалі функції кількох змінних на деякій евклідовій комбінаторній множині (або її підмножині).

Апарат евклідової комбінаторної оптимізації успішно використовується для формалізації й розв'язування низки практично значущих задач. Однією з таких задач є задача упакування прямокутників, яка в найпростішому випадку формулюється таким чином. Нехай є деяка напівнескінченна смуга, розділена на смужки однакової ширини h_0. Задано також p прямокутників ширини h_0 з довжинами $a_1,\dots,a_p$. Задача полягає в розташуванні прямокутників без накладань у смузі таким чином, щоб довжина зайнятої частини смуги була мінімальною (під довжиною зайнятої частини смуги розуміють максимальну з довжин зайнятих частин окремих смужок). Необхідність у побудові більш адекватних моделей спонукає дослідників до врахування різних видів невизначеності (інтервальної, нечіткої, стохастичної) вхідних даних (див., наприклад, [2; 4; 8]).

Слід відзначити, що наявність такої невизначеності в задачі упакування прямокутників вимагає формалізації розташування прямокутників у смузі. Одним із можливих підходів до вирішення цієї проблеми може бути використання введеного порядку на множині відповідних величин (нечітких чисел [3], випадкових величин [4], центрованих інтервалів [5]). Проте для задач зі стохастичною невизначеністю доцільно розглянути й інші підходи, зокрема, ідейно близькі до постановок задач з імовірнісними обмеженнями [10]. Для задачі упакування прямокутників імовірнісні обмеження можна тлумачити як визначення верхньої межі ймовірності перетину прямокутників.

Наведемо приклад змістовної інтерпретації задачі упакування прямокутників, у якому доцільним є використання зазначеного підходу. Нехай є деяка система обслуговування, яка містить m пристроїв. Кожний із пристроїв у будь-який момент часу може здійснювати обслуговування одного із p замовлень, причому час виконання замовлень не залежить від обслуговуючого пристрою і є дискретною випадковою величиною з відомим законом розподілу. Задача полягає в розподілі замовлень між пристроями та визначенні часу початку обслуговування кожного замовлення за таких умов:

- імовірність затримки обслуговування (у визначений для початку обслуговування i-го замовлення момент часу обслуговування попереднього замовлення не завершене) не повинна перевищувати наперед задану величину α;
- час виконання всіх замовлень повинен бути мінімально можливим.

Легко бачити, що наведена задача обслуговування замовлень може бути сформульована як задача упакування прямокутників, причому в допустимому розташуванні прямокутників обмежується зверху ймовірність їх накладань. В обчисленні довжини l зайнятої частини смужок також використовуватимемо ймовірнісні обмеження: імовірність того, що кінець останнього прямокутника розташовуватиметься правіше від l, не повинна перевищувати α.

Розглянемо детальніше питання взаємного розташування прямокутників у напівнескінченній смузі Π_0 за такого підходу. Пов'яжемо з лівим нижнім кутом смуги Π_0 початок системи координат, спрямувавши осі Ox_1, Ox_2 уздовж сторін смуги (вісь Ox_1 спрямована вздовж напівнескінченної сторони). Вважатимемо, що сторони прямокутників паралельні осям Ox_1, Ox_2. Тоді розташування прямокутника Π відносно смуги може бути визначене такими параметрами:

- ξ, ν – відповідно абсциса й ордината лівого нижнього кута (полюса) прямокутника в системі координат Ox_1x_2;
- h – ширина (висота) прямокутника;
- d – довжина прямокутника.

Прямокутник із зазначеними параметрами позначатимемо через $\Pi(\xi,\nu,h,d)$. Нехай координати ξ,ν полюса є дійсними числами, а розміри прямокутника – незалежними дискретними випадковими величинами з можливими значеннями h^i та d^j та відповідними ймовірностями p^i, q^j. Тоді прямокутник Π може мати розміри $h^i \times d^j$ з імовірністю $p^i q^j$. Надалі випадкові величини позначатимемо великими латинськими літерами, а їхні значення – відповідними малими латинськими літерами.

Вважаючи, що ширина смуги h_0 є дійсним числом, обчислимо ймовірність того, що прямокутник $\Pi(\xi,\nu,H,D)$ буде повністю розміщуватися у смузі Π_0. Очевидно, необхідною умовою такого розміщення є виконання нерівностей $\xi \geq 0$, $\nu \geq 0$. При цьому висота прямокутника повинна набувати значення не більше $h_0 - \xi$. Таким чином, імовірність r того, що прямокутник $\Pi(\xi,\nu,H,D)$ розміщується у смузі Π_0, визначається таким чином:

$$r = \begin{cases} 0, \text{якщо } \xi < 0 \text{ або } \nu < 0, \\ P(H \leq h_0 - \xi), \text{якщо } \xi \geq 0 \text{ і } \nu \geq 0 \end{cases}$$

(тут і далі через $P(\ )$ позначено ймовірність випадкової події).

Розглянемо тепер взаємне розташування у смузі двох прямокутників $\Pi(\xi,\nu,h_0,D)$ і $\Pi'(\xi',\nu',h_0,D')$. Без обмеження загальності вважатимемо, що $\xi \leq \xi'$. Очевидно, що прямокутники $\Pi(\xi,\nu,h_0,D)$ і $\Pi'(\xi',\nu',h_0,D')$ розміщуються у смузі лише за умови, що $\nu = \nu' = 0$. За цих умов прямокутники перетинатимуться (матимуть спільні внутрішні точки) тоді й лише тоді, коли довжина D прямокутника $\Pi(\xi,\nu,h_0,D)$ набуватиме значення більшого, ніж різниця $\xi' - \xi$. Імовірність такого перетину дорівнює $P(D > \xi' - \xi)$. Імовірність того, що прямокутники матимуть спільні точки сторін, не маючи спільних внутрішніх точок (говоритимемо в цьому випадку, що прямокутники дотикаються), дорівнює $P(D = \xi' - \xi)$. Імовірність неперетину (відсутності спільних точок прямокутників) дорівнює $P(D < \xi' - \xi)$.

Приклад. Розглянемо розміщення прямокутників $\Pi_1(\xi_1,\nu_1,h_1,D_1)$, $\Pi_2(\xi_2,\nu_2,h_2,D_2)$ у напівнескінченній смузі Π_0 шириною $h_0 = 2$, якщо $\nu_1 = \nu_2 = 0$, $h_1 = h_2 = h_0 = 2$, $\xi_1 = 2$, $\xi_2 = 7$, D_1, D_2 – дискретні випадкові величини, що задані рядами розподілу відповідно до таблиці.

Таблиця. **Ряди розподілу випадкових величин прикладу**

	Π_2				Π_2	
Значення D_i	3	4	5	8	3	8
Імовірності D_i	0,2	0,4	0,3	0,1	0,9	0,1

Оскільки $\xi_2 - \xi_1 = 5$, то прямокутники $\Pi_1(\xi_1,\nu_1,h_1,D_1)$ і $\Pi_2(\xi_2,\nu_2,h_2,D_2)$ не перетинатимуться, якщо випадкова величина D_1 набуватиме значень 3 або 4, тобто ймовірність неперетину $p_1 = P(D_1 < 5) = P(D_1 = 3) + P(D_1 = 4) = 0,6$. Якщо випадкова величина D_1 набуватиме значення 5, то прямокутники матимуть спільну сторону, отже, імовірність дотику дорівнює $p_2 = P(D_1 = 5) = 0,3$. Імовірність перетину дорівнює $P(D_1 > 5) = P(D_1 = 8) = 0,6 = 1 - p_1 - p_2$.

Розглянемо тепер обчислення ймовірностей різних способів взаємного розташування прямокутників $\Pi(\xi,\nu,H,D)$ і $\Pi'(\xi',\nu',H',D')$ у загальному випадку (як і вище, вважаємо, що $\xi \le \xi'$). Прямокутники перетинатимуться тоді й лише тоді, коли виконуються такі умови:

- випадкова величина D набуває значення більше, ніж $\xi'-\xi$;
- випадкова величина H набуває значення більше, ніж $\nu'-\nu$ (якщо $\nu \le \nu'$), або випадкова величина H' набуває значення більше, ніж $\nu-\nu'$ (якщо $\nu'<\nu$).

Отже, імовірність p перетину дорівнює

$$p=\begin{cases} P(D>\xi'-\xi)\cdot P(H>\nu'-\nu), \text{якщо } \nu\le\nu', \\ P(D>\xi'-\xi)\cdot P(H'>\nu-\nu'), \text{якщо } \nu'<\nu. \end{cases}$$

Прямокутники не перетинатимуться тоді й лише тоді, коли $D<\xi'-\xi$, або $H<\nu'-\nu$, або $H'<\nu-\nu'$ (останні дві події є несумісними, оскільки величини D і H не можуть набувати від'ємних значень). Таким чином, імовірність неперетину $q=P(D<\xi'-\xi)+P(H<\nu'-\nu)+P(H'<\nu-\nu')$.

В усіх інших випадках прямокутники дотикатимуться. Імовірність цього

$$d=\begin{cases} 1-P(D>\xi'-\xi)\cdot P(H>\nu'-\nu)-P(D<\xi'-\xi)- \\ \quad -P(H<\nu'-\nu), \text{якщо } \nu\le\nu', \\ 1-P(D>\xi'-\xi)\cdot P(H'>\nu-\nu')-P(D<\xi'-\xi)- \\ \quad -P(H'<\nu-\nu'), \text{якщо } \nu'<\nu. \end{cases}$$

Повернемося до побудови математичної моделі задачі упакування прямокутників з імовірнісними обмеженнями. Як і вище, вважаємо, що ширина h_0 смужок (а тоді й ширина смуги в цілому) є дійсним числом. Довжини прямокутників $A_1,\ldots,A_p$ є дискретними випадковими величинами. Нехай кількість смужок, на які розділена задана смуга, дорівнює m. Очевидно, що в оптимальному розв'язку в кожній смужці стоїть від 1 до $n=p-(m-1)$ прямокутників. Як буде показано нижче, можна вважати, що в кожній смужці стоїть рівно n прямокутників.

Нехай початок системи координат збігається з лівим нижнім кутом смуги, $\Pi_{ij}(\xi_{ij},\nu_{ij},h_{ij},X_{ij})$ – прямокутник, який стоїть в i-й смужці ($i\in J_m$) на j-му ($j\in J_n$) від початку місці (нагадаємо, що через $J_s=\{1,\ldots,s\}$). Можливі значення випадкової величини X_{ij} позначатимемо x_{ij}^k, а відповідні ймовірності – p_{ij}^k. Координати полюсів прямокутників, як і вище, вважатимемо дійсними числами. Оскільки всі смужки і прямокутники однакової ширини h_0, то $h_{ij}=h_0$, $\nu_{ij}=(i-1)h_0$ $\forall i\in J_m,\ j\in J_n$ (при цьому, очевидно, прямокутники, які стоять у різних смужках, або не перетинаються, або дотикаються). Допустимим є таке розміщення прямокутників, що для всіх $i\in J_m,\ j\in J_n$ виконується умова:

$$P\left(X_{ij}>\xi_{i,j+1}-\xi_{ij}\right)\le\alpha. \tag{2}$$

Оскільки $P\left(X_{ij}>z\right)=\sum_{x_{ij}^k>z}p_{ij}^k=1-\sum_{x_{ij}^l\le z}p_{ij}^l$, то умова (2) може бути записана як $1-\sum_{l=1}^{s}p_{ij}^l\le\alpha$, де s – найбільше число таке, що $x_{ij}^s\le\xi_{i,j+1}-\xi_{ij}$.

З іншого боку, для мінімізації довжини зайнятої частини смужок абсциса $\xi_{i,j+1}$ наступного у смужці прямокутника повинна бути найменшим числом, для якого має місце умова (2). Таким чином, величину $\xi_{i,j+1}$ слід обирати як суму ξ_{ij} і такого значення x_{ij}^s випадкової величини X_{ij}, що для відповідних імовірностей мають місце нерівності

$$\sum_{l=1}^{s-1}p_{ij}^l<1-\alpha,\ \sum_{l=1}^{s}p_{ij}^l\ge1-\alpha. \tag{3}$$

Таким чином, довжина зайнятої частини i-ї смужки дорівнює $\xi_{i,n+1}$, де $\xi_{i,n+1}$ – абсциса кінця останнього у смужці прямокутника, визначена відповідно до описаного вище правила.

Для формалізації обмежень на можливі довжини прямокутників використаємо апарат евклідової комбінаторної оптимізації. Покажемо спочатку, як у кожній смужці розміщувати рівно n прямокутників. Для цього введемо в розгляд $mn-p$ прямокутників з шириною h_0 і довжиною A_0, де A_0 є дискретною випадковою величиною з єдиним значенням $A_0^1=0$ і відповідною ймовірністю, рівною 1. Якщо в деякій смужці стоїть менше ніж n прямокутників, то поставимо в неї стільки прямокутників довжини A_0, щоб їхня загальна кількість у смужці дорівнювала n. Таке доповнення не впливає на довжину зайнятої частини смужки. Справді, якщо $X_{ij}=A_0$, то $P\left(X_{ij}>\xi_{i,j+1}-\xi_{ij}\right)=0\le\alpha$ для будь-яких $\xi_{i,j+1}\ge\xi_{ij}$. Таким чином, $\xi_{i,j+1}$ покладається рівним ξ_{ij}, тобто довжина зайнятої частини смуги не змінюється з додаванням прямокутника з довжиною A_0.

Розглянемо мультимножину $G=\left\{\underbrace{A_0,\ldots,A_0}_{mn-p},A_1,\ldots,A_p\right\}$ і множину переставлень $E_k(G)$ ($k=mn$) з елементів мультимножини G (під множиною переставлень розуміють множину всіх k-вибірок вигляду (1) з мультимножини G за умови $\eta = k$). Тоді кожному розміщенню прямокутників у смузі взаємно однозначно відповідає вектор

$$x = \left(X_{11},\ldots,X_{1n},X_{21},\ldots,X_{m1},\ldots,X_{mn}\right), \quad (4)$$

який можна розглядати як елемент множини переставлень $E_k\left(G\right)$ ($x \in E_k\left(G\right)$).

Таким чином, математичну модель сформульованої задачі упакування прямокутників з імовірнісними обмеженнями можна записати таким чином: знайти пару $\left\langle F\left(x^*\right),x^*\right\rangle$ таку, що

$$F\left(x^*\right) = \min_{x\in E_k(G)} \max_{1\le i\le m} \xi_{i,n+1};\ x^* = \operatorname{argmin}_{x\in E_k(G)} \max_{1\le i\le m} \xi_{i,n+1}, \quad (5)$$

якщо

$$\xi_{i,j+1} = \xi_{ij} + x_{ij}^s \quad \forall i \in J_m, \forall j \in J_n, \quad (6)$$

де значення s визначається з умови (3).

Зауваження. Якщо покласти $\alpha = 0$, то можна говорити про жорстку постановку задачі упакування прямокутників зі стохастичними параметрами, у яких обмеження задачі повинні задовольнятися при всіх реалізаціях випадкових параметрів. Для розглянутої задачі упакування прямокутників це означає, що за жодних можливих значень дискретних випадкових величин прямокутники не перетинаються.

Запропонований підхід дає змогу перейти від задачі зі стохастичними параметрами до еквівалентної детермінованої. Для цього разом із мультимножиною G розглянемо мультимножину $\bar{G} = \left\{\underbrace{0,\ldots,0}_{mn-p},\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_p\right\}$, де величини $\bar{a}_i$ $(i \in J_p)$ дорівнюють тим можливим значенням a_i^s відповідних випадкових величин A_i, для яких виконується умова (3). Нехай також

$$y = \left(y_{11},\ldots,y_{1n},y_{21},\ldots,y_{m1},\ldots,y_{mn}\right) \in E_k\left(\bar{G}\right).$$

Оскільки довжини прямокутників є дійсними числами, то зайнята частина смуги визначається як $\sum_{j=1}^{n} y_{ij}$. З правил вибору величин ξ_{ij} в (5) та формування мультимножини $\bar{G}$ випливає, що $\xi_{i,n+1} = \sum_{j=1}^{n} y_{ij}$. Таким чином, задача (5), за умов (3), (6), еквівалентна задачі пошуку пари $\left\langle F\left(x^*\right),x^*\right\rangle$ такої, що

$$F\left(x^*\right) = \min_{x\in E_k(\bar{G})} \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} y_{ij};\ x^* = \operatorname{argmin}_{x\in E_k(\bar{G})} \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} y_{ij}.$$

Ця задача є евклідовою задачею комбінаторної оптимізації на множині переставлень, і для її розв'язування можуть використовуватися відомі методи, зокрема метод гілок і меж.

Таким чином, у статті побудовано математичну модель однієї задачі упакування прямокутників зі стохастичними параметрами, яка ідейно близька до постановок задач стохастичного програмування з імовірнісними обмеженнями. Актуальним залишається питання про пошук ефективних методів розв'язування таких задач, виділення частинних випадків, що розв'язуються за допомогою поліноміальних алгоритмів.

Список літератури

1. Емец О. А. О комбинаторной оптимизации в условиях неопределенности / О. А. Емец, А. А. Роскладка // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 5. – С. 35–44.
2. Ємець О. О. Побудова математичної моделі однієї комбінаторної задачі упакування прямокутників з нечіткими розмірами / О. О. Ємець, Ол-ра О. Ємець // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2008. – № 6. – С. 25–33.
3. Ємець О. О. Розв'язування задач комбінаторної оптимізації на нечітких множинах : монографія / О. О. Ємець, Ол-ра О. Ємець. – Полтава : ПУЕТ, 2011. – 239 с. – Режим доступу: http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/352.
4. Ємець О. О. Формалізація взаємного розташування прямокутників з випадковими параметрами / О. О. Ємець, Т. М. Барболіна // Problems of decision making under uncertainties (PDMU-2014) : abstracts of XXIV International Conference, September 1–5, 2014, Cesky Rudolec, Czech Republic / Taras Shevchenko National University of Kyiv, University of Defence, Brno etc. – К. : ТВіМС, 2014. – С. 124–125.
5. Сергиенко И. В. Задачи оптимизации с интервальной неопределенностью: метод ветвей и границ / И. В. Сергиенко, О. А. Емец, А. О. Емец // Кибернетика и системный анализ. – 2013. – № 5. – С. 38–50.
6. Сергиенко И. В. Об одной нечеткой задаче многопараметрического выбора оптимальных решений / И. В. Сергиенко, И. Н. Парасюк, М. Ф. Каспшицкая // Кибернетика и системный анализ. – 2003. – № 2. – С. 3–15.
7. Сергиенко И. В. Применение методов стохастической оптимизации для исследования трансформационных процессов в экономике / И. В. Сергиенко, М. В. Михалевич // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2004. – № 4. – С. 7–29.
8. Стоян Ю. Г. Комбинаторная оптимизационная задача размещения прямоугольников с учетом погрешностей исходных данных / Ю. Г. Стоян, Т. Е. Романова, Л. Г. Евсеева // Доповіді НАН України. – 1997. – № 7. – С. 56–60.
9. Стоян Ю. Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець. – К. : Інститут системних досліджень освіти, 1993. – 188 с. – Режим доступу: http://dspace.puet.edu.ua/handle/123456789/487.
10. Юдин Д. Б. Математические методы управления в условиях неполной информации / Д. Б. Юдин. – М. : Сов. радио, 1974. – 400 с.

O. Iemets, T. Barbolina

COMBINATORIAL OPTIMIZATION MODEL OF RECTANGLES' PACKING UNDER PROBABILISTIC CONSTRAINTS

Authors formalize admissible arrangement of rectangles with stochastic parameters for the problem of packing if probability of rectangles' intersection is bounded above. A mathematical model of one problem of rectangles' in a semi infinite breadth with such probabilistic constraints was constructed. We also demonstrate possibility of conversion to deterministic problem of rectangles' packing.

Keywords: discrete random variable, combinatorial optimization, stochastic optimization, packing of rectangles.

Матеріал надійшов 12.11.2014

УДК 519.163

Євтушенко О. Я.

ЗАСТОСУВАННЯ ТРІАНГУЛЯЦІЇ ДЕЛОНЕ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЕВКЛІДОВОЇ ЗАДАЧІ ШТЕЙНЕРА

Евклідову задачу Штейнера сформульовано як задачу декомпозиції. Описано та проаналізовано застосування тріангуляції Делоне у відомих евристичних алгоритмах для розв'язання евклідової задачі Штейнера. Проведено обчислювальне дослідження та аналіз для оцінки графа Делоне як основи для пошуку дерева Штейнера.

Ключові слова: евклідова задача Штейнера, дерево Штейнера, тріангуляція Делоне, повне дерево Штейнера.

Вступ

Нехай X – множина точок на евклідовій площині. Евклідова задача Штейнера полягає у визначенні множини точок Штейнера S ($X \cap S = \varnothing$) таких, що довжина остового дерева на $X \cup S$ є мінімальною. Дерево на множині $X \cup S$ називається мінімальним деревом Штейнера (МДШ). При цьому множину X називають множиною термінальних точок.

Евклідова задача Штейнера є NP-складною [6], тому одним з головних напрямів досліджень задачі Штейнера є створення і вивчення евристичних алгоритмів для наближення розв'язання цієї задачі.

Одним з базових методів, що використовують в евристичних алгоритмах для побудови дерева Штейнера, є тріангуляція Делоне. Сама по собі тріангуляція Делоне не дозволяє локалізувати точки Штейнера чи дати відповідь на запитання, скільки точок Штейнера у МДШ для цієї множини X. Але тріангуляція Делоне ділить площину на трикутники, в яких розташовані точки Штейнера, а також містить мінімальне