УДК 517.957

Голод П. І., Скрипник Т. В.

АНІЗОТРОПНІ КВАЗІГРАДУЙОВАНІ АЛГЕБРИ ЛІ НА ГІПЕРЕЛІПТИЧНИХ КРИВИХ ТА ІНТЕГРОВНІ ГАМІЛЬТОНОВІ СИСТЕМИ

Побудовано нові квазіградуйовані алгебри матричнозначних функцій на гіпереліптичних кривих і розглянуто можливість їх використання як алгебри прихованих симетрій фазових просторів інтегровних гамільтонових систем. Досліджено центральні розширення цих алгебр.

Вступ

Групи та алгебри Лі відображень компактного многовиду в групу чи алгебру Лі є на сьогодні найбільш опанованим класом нескінченновимірних груп та алгебр Лі. Ці об'єкти в загальному випадку доволі складні і їх вивчення перебуває на початковій стадії. Проте, якщо многовид — одновимірний (дійсний або комплексний), ситуація суттєво спрощується, і теорію відповідних груп та алгебр можна значно розвинути, довівши її в окремих випадках до завершення. Один з таких випадків репрезентують групи петель — групи гладких відображень кола в напівпросту групу G та їх центральні розширення [1]. Алгебри Лі, що їм відповідають, співпадають з градуйованими *афінними алгебрами*, для яких має місце структурна теорія, подібна до теорії Кіллінга—Картана напівпростих скінченновимірних алгебр Лі [2, 3], а також досить добре розроблена теорія представлень [1, 2, 4].

Сфера застосувань груп і алгебр петель та їх узагальнень у фізиці надзвичайно широка. Ми ж зосередимо увагу лише на одному напрямі, пов'язаному з теорією інтегровних гамільтонових систем класичної механіки та двовимірної теорії поля.

Впродовж останніх двох десятиліть було запропоновано декілька математичних схем, які дозволяють, з одного боку, генерувати інтегровні системи як із скінченним, та і нескінченним числом ступенів вільності, з іншого — ефективно розв'язувати відповідні нелінійні рівняння [5]. Слід зауважити, що у більшості досліджених випадків поняття інтегровності звужується до поняття алгебраїчної інтегровності [6]. Проте таке звуження є виправданим, оскільки завдяки цьому виникає можливість застосовувати потужні алгебро-геометричні методи і осмислити задачу класифікації інтегровних систем.

Кожна з існуючих схем має алгебраїчне підгрунтя і оперує з деякою нескінченновимірною алгеброю, що інтерпретується як алгебра симетрії фазового простору досліджуваної гамільтонової системи. Один з найбільш популярних підходів грунтується на представленні нелінійної гамільтонової системи у вигляді рівняння "нульової кривизни":

$$\frac{\partial U(x,t,\lambda)}{\partial t}-\frac{\partial V(x,t,\lambda)}{\partial x}+\left[U(x,t,\lambda),\ V(x,t,\lambda)\right]=0. \quad (1)$$

У цьому рівнянні $U(x, t, \lambda)$ і $V(x, t, \lambda)$ — матричнозначні функції, які розглядаються як елементи простору коприєднаного представлення деякої нескінченновимірної градуйованої або квазіградуйованої алгебри Лі [5]. Залежність матриць U і V від просторово-часових координат є опосередкованою і відбувається через залежність від них *динамічних змінних* — польових величин, які здебільшого мають змістовну фізичну інтерпретацію і входять (разом зі своїми похідними) у матричні елементи матриць U і V. Рівняння (1) повинно виконуватись при всіх допустимих значеннях комплексного параметра λ, який іноді називають *спектральним параметром* (У випадку рівняння Кортевега—де-Вріза дійсна частина λ параметризує спектр одновимірного оператора Шредінгера. В загальному випадку λ має сенс локального параметра алгебраїчної кривої).

Рівняння (1) та пов'язані з ним нелінійні інтегровні системи добре вивчені у випадках, коли матриці U і V є елементами алгебри аналітичних (поліноміальних) петель або, що те саме, алгебри рядів (поліномів) Лорана з коефіцієнтам в напівпростій матричній алгебрі Лі. В цьому випадку λ — локальний параметр на сфері Рімана. Пуассонова структура, яка дає можливість надати рівнянню (1) сенсу гамільтонової системи, є структурою Лі—Пуассона або її редукцією. Вона має алгебраїчну природу і її зручно задавати в термінах класичної r-матриці [5].

Представлення нульової кривизни зі спектральним параметром на еліптичній кривій виникло у зв'язку з інтегруванням рівняння Ландау—Лівшиця [7]. В праці [8] була запропонована квазіградуйована алгебра Лі мероморфних функцій на еліптичній кривій зі значеннями в алгебрі $so(3) \simeq su(2)$, на орбітах якої реалізуються фазові простори ієрархії вищих рівнянь Ландау—Лівшиця. З цією алгеброю та її підалгебрами пов'язані і інші цікаві інтегровні рівняння [9, 10].

Це дослідження має на меті узагальнити конструкцію $so(3)$-алгебри на еліптичній кривій на випадок класичних (матричних) алгебр вищих рангів. Збільшення рангу алгебри веде до зростання роду кривої, на якій вона задана. В результаті ми отримуємо квазіградуйовані алгебри $sl(N)$-, $so(N)$-, $sp(N)$-значних функцій на гіпереліптичній кривій

$$y^2 = \prod_{i=1}^{N}(z - a_i),$$

або, точніше, на її дволистовому накритті.

Градуйовані та квазіградуйовані алгебри на ріманових поверхнях вивчалися багатьма дослідниками. Найбільш вивчені серед них алгебри Кричевера—Новікова (К-Н) [11, 12]. Для їх побудови на рімановій поверхні (алгебраїчній кривій) $\mathcal{R}$ роду g фіксують дві точки $P_\pm \in \mathcal{R}$ і розглядають алгебру $\mathcal{A}$ мероморфних функцій на $\mathcal{R}$, голоморфних поза точками $P_\pm$. Ця алгебра є $\mathbb{Z}$-квазіградуйованою і комутативною. Породжуючі елементи A_i визначаються асимптотиками в околі точок $P_\pm$ і для них має місце співвідношення (для $g \neq 1$)

$$A_i A_j = \sum_{k=0}^{g} l_{i\ j}^{k} A_{i+j+k} + A_{i+j},$$

де l_{ij}^{k} — структурні константи, які в загальному випадку обрахувати важко. Якщо $\mathfrak{g}$ — проста (напівпроста) скінченновимірна компактна алгебра Лі, то можна утворити алгебру $\mathfrak{g}$-значних мероморфних функцій на $\mathcal{R}$ у вигляді тензорного добутку:

$$\mathfrak{g}^{\mathcal{A}} = \mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}.$$

Очевидно $\mathfrak{g}^{\mathcal{A}}$ — нескінченновимірна квазіградуйована алгебра, яка при $g = 0$ перейде в алгебру поліномів Лорана з коефіцієнтами в $\mathfrak{g}$, оскільки $\mathcal{A}\big|_{g=0} \simeq Pol(\lambda, \lambda^{-1})$. Проте алгебри К-Н не знайшли застосування в теорії інтегровних систем. Причиною цього, очевидно, є неможливість узгодженого з квазіградуюванням розбиття таких алгебр у суму двох підалгебр, що є необхідною умовою застосування "схеми Костанта—Адлера".

Алгебри на гіпереліптичних кривих, які ми конструюємо в даній праці, є фактично підалгебрами у відповідних алгебрах К-Н. Проте для багатьох із них виконуються умови схеми Костанта—Адлера, що дає підставу для використання їх в теорії інтегровних гамільтонових систем.

1. Анізотропні квазіградуйовані алгебри класичних серій на гіпереліптичних кривих

Нехай в просторі $\mathbb{C}^N$, координатами якого є змінні $w_1, w_2, \ldots, w_N$, задано систему квадрик:

$$w_i^2 - w_j^2 = a_j - a_i, \tag{2}$$

де a_i — довільні фіксовані комплексні числа. Ранг цієї системи $N-1$, тому вона визначає алгебраїчну криву, вкладену в простір $\mathbb{C}^N$. Якщо покласти

$$w_i^2 = w^2 - a_i, \quad y = \prod_{i=1}^{N} w_i,$$

то в термінах змінних $z = w^2$ та y матимемо плоску гіпереліптичну криву, задану рівнянням

$$y^2 = \prod_{i=1}^{N}(z - a_i). \tag{3}$$

Крива $y^2 = \prod_{i=1}^{N}(w^2 - a_i)$ є її дволистове накриття, змінна w (або z) — локальний параметр відповідної ріманової поверхні.

Нехай $\mathfrak{g}$ означає одну з класичних комплексних алгебр Лі $gl(N)$, $sl(N)$, $so(N)$, або $sp(N)$. Нехай E_{ij} — матриця $N \times N$, в якій на перетині i-го рядка і j-го стовпця стоїть одиниця, а решта матричних елементів дорівнюють нулю. Очевидно, матриці E_{ij} формують базис в алгебрі $gl(N)$. Комутаційні співвідношення в цьому базисі мають вигляд:

$$[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk} E_{il} - \delta_{il} E_{kj}. \tag{4}$$

Покладемо $X_{ij} = E_{ij} - E_{ji}$. Тоді матриці X_{ij} формуватимуть базис алгебри $so(N)$. Відповідні комутаційні співвідношення мають вигляд:

$$[X_{ij},\ X_{kl}] = \delta_{jk}X_{il} - \delta_{il}X_{kj} + \delta_{jl}X_{ki} - \delta_{ik}X_{jl}\ . \quad (5)$$

Алгебру $sp(N)$ реалізуємо як підалгебру в $gl(2N)$. Виберемо базис в $sp(N)$, елементами якого є матриці

$$Y_{ij} = E_{ij} - \varepsilon_i\varepsilon_j E_{-i\,-j}\,,$$

де індекси i та j пробігають множину $I = \{-N, -N+1, ..., -1, 1, ..., N\}$, а $\varepsilon_i = \operatorname{sign} i$. Комутаційні співвідношення в цьому базисі мають вигляд

$$[Y_{ij},\ Y_{kl}] = \delta_{jk}Y_{il} - \delta_{il}Y_{kj} + \varepsilon_i\varepsilon_j\left(\delta_{j-l}Y_{k-i} - \delta_{k-i}Y_{j-l}\right). \quad (6)$$

Надалі ми вживатимемо позначення X_{ij} для базисних елементів усіх трьох класичних алгебр $gl(N)$, $so(N)$ та $sp(N)$.

Розглянемо алгебру $\mathcal{A}$ мероморфних функцій на накритті кривої (3), породжену функціями w_i. Це $\mathbb{Z}$-квазіградуйована комутативна алгебра, яка містить "парну" підалгебру, породжену функціями $w_i\,w_j$. Утворимо тензорний добуток алгебр $\mathfrak{g}\otimes\mathcal{A}$ і виділимо в ньому підалгебру $\widetilde{\mathfrak{g}}^{even}$, породжену $X_{ij}^{2n+2} \equiv X_{ij}\cdot z^n w_i w_j$, де ми покладаємо, що у випадку алгебри $sp(N)$ $w_{-i} \equiv w_i$.

Нехай $\widetilde{\mathfrak{g}}^{even} = \sum\limits_m \oplus\, \mathfrak{g}^m$,

$$\mathfrak{g}^{2n+2} = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\left\{X_{ij}\cdot z^n w_i w_j\right\} \quad n\in\mathbb{Z}\,.$$

Тоді має місце наступне твердження:

Твердження 1.

(i) $\widetilde{\mathfrak{g}}^{even}$ *— квазіградуйована алгебра Лі.*

(ii) $\widetilde{\mathfrak{g}}^{even}$ *як лінійний простір допускає розклад в суму двох підалгебр, узгоджений з квазіградуюванням.*

Доведення: Справедливість наведених тверджень випливає з явного обрахунку комутаційних співвідношень. Справді, пряме обчислення показує, що комутаційні співвідношення між елементами X_{ij}^n будуть мати вигляд:

$$[X_{ij}^{2n},\ X_{kl}^{2m}] = \delta_{jk}X_{il}^{2(n+m)} - \delta_{il}X_{kj}^{2(n+m)} - a_j\delta_{jk}X_{il}^{2(n+m)-2} + a_i\delta_{il}X_{kj}^{2(n+m)-2} \quad (8)$$

— для алгебри $\widetilde{gl}^{even}(N)$;

$$[X_{ij}^{2n},X_{kl}^{2m}] = \delta_{kj}X_{il}^{2(n+m)} - \delta_{il}X_{kj}^{2(n+m)} + \delta_{jl}X_{ki}^{2(n+m)} - \delta_{ik}X_{jl}^{2(n+m)} - a_j\delta_{kj}X_{il}^{2(n+m)-2} + a_i\delta_{il}X_{kj}^{2(n+m)-2} - a_j\delta_{jl}X_{ki}^{2(n+m)-2} + a_i\delta_{ik}X_{jl}^{2(n+m)-2} \quad (9)$$

— для алгебри $\widetilde{so}^{even}(N)$;

$$[X_{ij}^{2n},\ X_{kl}^{2m}] = \delta_{kj}X_{il}^{2(n+m)} - \delta_{il}X_{kj}^{2(n+m)} + \varepsilon_i\varepsilon_j\left(\delta_{j-l}X_{k-i}^{2(n+m)} - \delta_{i-k}X_{j-l}^{2(n+m)}\right) - a_j\delta_{kj}X_{il}^{2(n+m)-2} + a_i\delta_{il}X_{kj}^{2(n+m)-2} + \varepsilon_i\varepsilon_j\left(a_i\delta_{i-k}X_{j-l}^{2(n+m)-2} - a_j\delta_{j-l}X_{k-i}^{2(n+m)-2}\right) \quad (10)$$

— для алгебри $\widetilde{sp}^{even}(N)$.

Звідки очевидно, що простір $\widetilde{\mathfrak{g}}^{even} = \sum\limits_m \oplus\, \mathfrak{g}^m$ утворює алгебру Лі. З комутаційних співвідношень випливає також, що означені вище алгебри є Z-квазіградуйованими. Це й доводить пункт (i) твердження.

Доведення пункту (ii) базується на тому, що для підпросторів $\mathfrak{g}^{2n}$ алгебр $\widetilde{sl}^{even}(N)$, $\widetilde{so}^{even}(N)$, $\widetilde{sp}^{even}(N)$ виконуються комутаційні співвідношення:

$$[\mathfrak{g}^{2n},\ \mathfrak{g}^{2m}] \subseteq \mathfrak{g}^{2(n+m)} \oplus \mathfrak{g}^{2(n+m)-2}\,. \quad (11)$$

З наведених співвідношень випливає, що алгебри $\widetilde{gl}^{even}(N)$, $\widetilde{so}^{even}(N)$, $\widetilde{sp}^{even}(N)$ допускають розбиття у суму двох підалгебр:

$$\widetilde{\mathfrak{g}}^{even} = \widetilde{\mathfrak{g}}_+^{even} + \widetilde{\mathfrak{g}}_-^{even}\,, \quad (12)$$

де $\widetilde{\mathfrak{g}}_+^{even} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\widetilde{\mathfrak{g}}^{2n}$, $\widetilde{\mathfrak{g}}_-^{even} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\widetilde{\mathfrak{g}}^{-2n}$ і це узгоджується з квазіградуюванням.

Твердження доведено.

Зауваження: Алгебру $\widetilde{sl}^{even}(N)$ можна отримати як алгебру, породжену "кореневими" елементами. Для цього покладемо:

$$e_{ij}^{2n} = X_{ij}^{2n}, \qquad f_{ij}^{2n} = e_{ji}^{2n}, \qquad i<j\,.$$

Тоді легко показати, що

$$[e_{ij}^{2n},f_{ij}^{2n}] = w^{2(n+m)}\left(w^4 - (a_i + a_j)w^2 + a_i a_j\right)H_{ij}\,, \quad (13)$$

де $H_{ij} = E_{ii} - E_{jj}$. Елементи e_{ij}^{2n}, f_{ij}^{2n}, $H_{ij}^{2n} = w^{2n}H_{ij}$ формують базис алгебри $\widetilde{sl}(N)$.

Для алгебри $\widetilde{sl}^{even}(N)$ відповідне співвідношення має вигляд:

$$[\mathfrak{g}^{2n},\ \mathfrak{g}^{2m}] \subseteq \mathfrak{g}^{2(n+m)} \oplus \mathfrak{g}^{2(n+m)-2} \oplus \mathfrak{g}^{2(n-m)-4}. \quad (14)$$

Звідки видно, що для алгебри $\widetilde{sl}^{even}(N)$ розбиття в суму двох підалгебр, узгоджене з квазіградуюванням можливе тоді, і тільки тоді, коли лише одне із чисел a_i відмінне від нуля.

2. *Пуассонові структури і гамільтонові рівняння в просторі* $\left(\tilde{\mathfrak{g}}^{even}\right)^*$

В цьому пункті ми означимо простір лінійних форм (функціоналів) на алгебрі $\tilde{\mathfrak{g}}^{even}$ і структуру Лі—Пуассона на ньому. Будемо розглядати $\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathcal{A}}$ як алгебру $\mathfrak{g}$-значних функцій на кривій (3), залежних від локального параметра $z = w^2$. Елементи підалгебри $\tilde{\mathfrak{g}}^{even}$ — це функції $X(z)$, що мають вигляд:

$$X(z) = \sum_{n,ij} x_n^{ij} X_{ij}^{2n}(z), \qquad i,j = 1,2...,N,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Означимо на $\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathcal{A}}$ ad-інваріантну білінійну форму:

$$\langle \hat{\mu}(z),\, X(z) \rangle = C(N) \operatorname{res}|_{z=0} y^{-1} \operatorname{Tr} \hat{\mu}(z) X(z). \quad (15)$$

$C(N)$ — стала, що залежить від алгебри $\mathfrak{g}$ і вибирається з міркувань зручності. Базис в $\left(\tilde{\mathfrak{g}}^{even}\right)^*$, дуальний стосовно форми (15) до базису $X_{ij}^{2n} \in \tilde{\mathfrak{g}}^{even}$, формують об'єкти

$$\frac{z^{-n} y}{w_i w_j} X_{ji} \sim \left(X_{ij}^{2n}\right)^*.$$

Якщо означити підпростори

$$\mathfrak{g}_{2n+1} = \operatorname{span}_{\mathbb{C}} \left\{ \frac{z^n y}{w_i w_j} X_{ij} \right\}, \text{ то}$$

$$\left(\tilde{\mathfrak{g}}^{even}\right)^* \simeq \sum_n \oplus\, \mathfrak{g}_{2n+1} = \tilde{\mathfrak{g}}^{odd}. \qquad (17)$$

Очевидно, що $\tilde{\mathfrak{g}}^{odd}$ є $\mathbb{Z}$-квазіградуйованим модулем стосовно коприєднаної дії алгебри $\tilde{\mathfrak{g}}^{even}$:

$$\operatorname{ad}^*_{X(z)} \cdot \hat{\mu}(z) = \left[\hat{\mu}(z), X(z)\right] \qquad (18)$$

і підпростором в алгебрі $\tilde{\mathfrak{g}}^{\mathcal{A}}$. Для алгебри $\tilde{so}(N)$ можна показати, що:

$$\left[\tilde{\mathfrak{g}}^{odd}, \tilde{\mathfrak{g}}^{odd}\right] \subseteq \tilde{\mathfrak{g}}^{even}.$$

Тоді приєднавши $\tilde{\mathfrak{g}}^{odd}$ до алгебри $\tilde{\mathfrak{g}}^{even}$, отримаємо нову квазіградуйовану алгебру

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{g}}^{even} \oplus \tilde{\mathfrak{g}}^{odd} \subset \tilde{\mathfrak{g}}^{\mathcal{A}},$$

яка є безпосереднім узагальненням алгебри прихованої симетрії рівняння Ландау—Лівшиця [8].

В просторі гладких функцій на $\tilde{\mathfrak{g}}^{odd}$ означимо стандартну дужку Лі—Пуассона:

$$\{f_1(\hat{\mu}), f_2(\hat{\mu})\}_0 = \sum_{\substack{n,m \\ i,j,l,s}} \left\langle \hat{\mu}(z), \left[X_{ij}^{-2n+2}, X_{ls}^{-2m+2}\right] \right\rangle_0 \frac{\partial f_1}{\partial \mu_{ij}^n} \frac{\partial f_2}{\partial \mu_{ls}^m}, \qquad (19)$$

де $\mu_{ij}^n = \left\langle \hat{\mu}(z), X_{ij}^{-2n+2} \right\rangle_0$ — координати елемента $\hat{\mu}(z) \in \tilde{\mathfrak{g}}^{odd}$. Легко перевірити, що функції

$$I_p(z) = \operatorname{Tr} \hat{\mu}^p(z) = \sum_n h_n^p\left(\mu_{ij}^s\right) z^n$$

є інваріантами коприєднаної дії (18), а відповідні коефіцієнтні функції $h_n^p\left(\mu_{ij}^s\right)$ — ануляторами дужки (19).

В просторі $\tilde{\mathfrak{g}}^{odd}$ можна означити низку дужок Лі—Пуассона, якщо взяти до уваги існування ad-інваріантних білінійних форм

$$\langle \hat{\mu}(z), X(z) \rangle_k = C(N) \operatorname{res}|_{z=0} z^{-k} y^{-1} \operatorname{Tr} \hat{\mu}(z) X(z).$$

Ці дужки будуть мати вигляд:

$$\{f_1(\hat{\mu}),\ f_2(\hat{\mu})\}_k = \sum_{\substack{n,m \\ i,j,l,s}} \left\langle \hat{\mu}(z), \left[X_{ij}^{-2n+2k+2},\ X_{ls}^{-2m+2k+2}\right] \right\rangle_k \frac{\partial f_1}{\partial \mu_{ij}^n} \frac{\partial f_2}{\partial \mu_{ls}^m}. \qquad (20)$$

Легко перевірити, що функції $h_n^p\left(\mu_{ij}^s\right)$ залишаються ануляторами будь-якої з дужок (20).

Розглянемо в просторі $\tilde{\mathfrak{g}}^{odd}$ підпростір

$$M^K = \left\{ \hat{\mu}(z) \in \tilde{\mathfrak{g}}^{odd};\ \hat{\mu}(z) = \sum_{n=1}^{K} \mu_{ij}^n \frac{z^n y}{w_i w_j} X_{ij}^* \right\}.$$

Очевидно, цей підпростір є інваріантним стосовно коприєднаної дії підалгебри $\tilde{\mathfrak{g}}_-^{even}$.

Крім того, елементи $\hat{\mu}(z) \in M^K$ будуть ненульовими функціоналами на $\tilde{\mathfrak{g}}_+^{even}$, якщо спарювання здійснювати за допомогою дужки $\langle \hat{\mu}(z),\ X(z) \rangle_K$. Тобто, простір M^K є інваріантним підпростором в $\left(\tilde{\mathfrak{g}}^{even}\right)^*$ стосовно коприєднаної дії алгебри $\tilde{\mathfrak{g}}_+^{even}$ і пуассоновим многовидом стосовно дужок (19) і (20) при $k = K$.

Теорема. *Функції* $h_n^p\left(\mu_{ij}^s\right)$, *звужені на многовид* M^K, *попарно комутують стосовно дужок (19) і (20) при* $k = K$.

Доведення. Справді, оскільки алгебра $\widetilde{\mathfrak{g}}^{even}$ допускає розклад у суму двох підалгебр $\widetilde{\mathfrak{g}}_{-}^{even}$ та $\widetilde{\mathfrak{g}}_{+}^{even}$, то те ж саме справедливо для алгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}^{even}$, реалізованої як алгебра координатних функцій на $\widetilde{\mathfrak{g}}^{even}*$ відносно дужки Лі—Пуассона. Як випливає зі схеми Костанта—Адлера [6], інваріантні функції залишаються комутативними і після обмеження їх на підалгебри Лі лінійних функцій на $\widetilde{\mathfrak{g}}^{even}*$. Ці підалгебри ізоморфні алгебрам $\widetilde{\mathfrak{g}}_{-}^{even}$ та $\widetilde{\mathfrak{g}}_{+}^{even}$ відповідно. Для доведення теореми лишилося зауважити, що алгебра лінійних функцій $\hat{\mu}(z) \in M^K$ відносно дужок (19) і (20) (при $k = K$) утворює фактор-алгебру алгебр $\widetilde{\mathfrak{g}}_{-}^{even}$ і $\widetilde{\mathfrak{g}}_{+}^{even}$ відповідно, та що проекція на фактор-алгебру є канонічним гомоморфізмом.

Зауваження: Функції $h_n^p(\mu_{ij}^s)\big|_{M^K}$ попарно комутують стосовно звуженої дужки Лі—Пуассона, але тепер не всі вони є ануляторами. Зокрема, функції $h_n^p(\mu_{ij}^s)$ при $n = 1, 2..., (p-1)K$ породжують нетривіальні гамільтонові потоки на орбітах коприєднаної дії підалгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}_{-}^{even}$. Решта функцій фіксують орбіту в M^K. Доведення цього твердження аналогічне доведенню теореми 1 в праці [13].

Якщо $h_n^p(\mu_{ij}^s)$ — один з нетривіальних гамільтоніанів, то відповідне інтегровне гамільтонове рівняння буде мати вигляд:

$$\frac{d\mu_{ij}^s}{d\tau_n^p} = \left\{\mu_{ij}^s, h_n^p(\mu)\right\}, \tag{21}$$

або у формі Ейлера—Арнольда (Лакса):

$$\frac{d\mu}{d\tau_n^p} = \left[\mu(z), \nabla h_n^p\right], \text{ де } \nabla h_n^p = \sum \frac{\partial h_n^p}{\partial \mu_{ij}^k} X_{ij}^{-2k+2}.$$

Оскільки потоки, що породжуються гамільтоніанами $h_n^p(\mu)$ та $h_n^s(\mu)$ комутують, то справедливим є рівняння нульової кривизни:

$$\frac{d\nabla h_n^s}{d\tau_n^p} + \frac{d\nabla h_n^p}{d\tau_n^s} - \left[\nabla h_n^s, \nabla h_n^p\right] = 0,$$

яке дає еволюційні рівняння на матричнозначну функцію $\mu(z,x,t)$, як функцію параметрів $x = \tau_s$, $t = \tau_p$.

3. Центральне розширення алгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}^{even}$

Нехай $B(X,Y) = C(N)\operatorname{Tr} X \cdot Y$ — форма Кіллінга—Картана однієї з класичних алгебр $\mathfrak{g} \simeq gl(N)$, $so(N)$, або $sp(N)$. Означимо на $\widetilde{\mathfrak{g}}^{even}$ білінійну функцію

$$\chi(X(z), Y(z)) = \oint_\gamma B\left(X(z), \frac{dY(z)}{dz}\right) dz, \tag{22}$$

де контур γ в комплексній площині параметра z охоплює точку $z = 0$; в усьому іншому вибраний довільно.

Твердження 2. *(i) Білінійна форма $\chi(X(z), Y(z))$ є кососиметричною і задовольняє умові коциклічності, а тому визначає центральне розширення алгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}^{even}$:*

$$\widetilde{\mathfrak{g}}^{even} \to \widetilde{\mathfrak{g}}^{even} \oplus \mathbb{C}\cdot$$

(ii) Коцикл $\chi(X(z), Y(z))$ — локальний і його значення на базисних векторах обраховується за формулою:

$$\begin{aligned} \chi_{ij;\,kl}^{2n;\,2m} &\equiv \chi\left(X_{ij}^{2n}, X_{kl}^{2m}\right) = \\ &= B\left(X_{ij}, X_{kl}\right) \oint_\gamma w_i w_j z^{m-1} d(w_k w_l z^{n-1}) = \\ &= B\left(X_{ij}, X_{kl}\right) \chi^{2m,\,2n}\left(a_i, a_j\right), \end{aligned} \tag{23}$$

де

$$\chi^{2m.2n}\left(a_i, a_j\right) = \oint w_i w_j z^{m-1} d\left(w_i w_j z^{n-1}\right) =$$
$$= n\,\delta_{m+n,\,0} - (n-1/2)\left(a_i + a_j\right)\delta_{m+n-1,\,0} + (n-1)a_i a_j \delta_{m+n-2,\,0}.$$

Доведення. Коциклічність форми $\chi(X(w), Y(w))$ означає виконання умови

$$\chi([X(w), Y(w)], Z(w)) + \chi([Y(w), Z(w)], X(w)) + \chi([Z(w), X(w)], Y(w)) = 0,$$

що є наслідком тотожності Якобі в алгебрі $\widetilde{\mathfrak{g}}^{even}$, Ad - інваріантності форми Кіллінга—Картана в $\mathfrak{g}$ та кососиметричності оператора диференціювання. Кососиметричність оператора диференціювання (а отже і білінійної форми $\chi(X(z), Y(z))$) легко встановити, інтегруючи частинами інтеграл у формулі (23), але для цього необхідно довести однозначність підінтегральної функції. При довільних значеннях індексів i, j, k, l підінтегральна функція не є однозначною ($w_i = \pm\sqrt{z^2 - a_i}$). Проте підрахунок значень форми Кіллінга—Картана на векторах X_{ij} показує, що вираз (23) відмінний від нуля лише при $i = l$, $j = k$ (або при $i = k$, $j = l$). Справді:

$$B\left(X_{ij}, X_{kl}\right) = C\,\delta_{il}\delta_{jk} \text{ — для } gl(N),$$
$$B\left(X_{ij}, X_{kl}\right) = C\left(\delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jl}\right) \text{ — для } so(N), \tag{24}$$
$$B\left(X_{ij}, X_{kl}\right) = C\left(\delta_{il}\delta_{jk} - \varepsilon_i\varepsilon_j\delta_{i,-k}\delta_{j,-l}\right) \text{ — для } sp(N).$$

Взявши до уваги ці обчислення, знайдемо:

$$\chi^{2m,2n}\left(a_i, a_j\right) = \oint w_i w_j z^{m-1} d\left(w_i w_j z^{n-1}\right) =$$
$$= (n-1)\oint w_i^2 w_j^2 z^{m+n-3} dz + \oint\left(w_i^2 + w_j^2\right) z^{m+n-2} dz. \tag{25}$$

Звідки видно, що підінтегральні функції в (23) однозначні. Це й доводить пункт (i).

Формула (25) дає явний вигляд коциклу на базисних векторах. Елементарне обчислення інтегралів у виразі (25) дає

$$\chi^{2m,2n}\left(a_i, a_j\right) = n\delta_{m+n,\,0} - \left(n-\frac{1}{2}\right)\left(a_i + a_j\right)\delta_{m+n+1,\,0} + \\ +\left(n-1\right)a_i a_j \delta_{m+n+3,\,0}\,.$$

Ця формула разом з (24) дають явний вигляд коциклів для відповідних алгебр. Локальність одержаного коциклу очевидна.

Твердження доведено.

Висновок

Отримані в даній статті результати суттєво розширюють можливості використання квазіградуйованих алгебр для конструювання нових інтегровних систем. Щодо перспективи отримання нових інтегровних рівнянь, які б мали важливі фізичні застосування, то такими мали б бути рівняння для опису динаміки намагнічування в анізотропних магнетиках з високими спінами. Такі рівняння мають бути пов'язані з алгеброю $\widetilde{su}(N)$. Інший напрям застосування отриманих результатів — конформна теорія поля на ріманових поверхнях. Для цієї мети доцільно дослідити алгебри дифеоморфізмів (голоморфних ізоморфізмів) означених вище алгебр. Цим проблемам ми сподіваємося присвятити окрему публікацію.

Ця робота підтримана грантами CRDF-UP1-2115 та INTAS-97-1312.

Автори висловлють подяку грантодавцям.

1. *Пресли Э., Сигал Г.* Группы петель.— М.: Мир, 1990.
2. *Кац В. Г.* Бесконечномерные алгебры Ли.— М.: Мир, 1993.
3. *Голод П. І., Клімик А. У.* Математичні основи теорії симетрій.— Київ: Наукова думка, 1992.
4. *Неретин Ю. А.* Представление алгебр Вирасоро и афинных алгебр // В сб. "Современные проблемы математики. Фундаментальные направления". (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР).— М., 1988.— Т. 22.— С. 163—225.
5. *Тахтаджан Л. А., Фаддеев Л. Д.* Гамильтонов подход в теории солитонов.— М.: Наука, 1986.
6. *Adler M., van Moerbeke P.* Kowalewski's asymptotic method, Kac-Moody Lie algebras and regularization // Comm. Math. Phys.—1982.— Vol. 83.— P. 83.
7. *Sklyanin E. K.* On complete integrability of the Landau-Lifshitz equation // Preprint LOMI E-3—79.— Leningrad, 1979.
8. *Голод П. І.* Гамільтонові системи, пов'язані з анізотропними афінними алгебрами Лі і вищі рівняння Ландау-Ліфшиця // Доп. АН УРСР.— 1984.— Сер. А.— № 5.— С. 5.
9. *Голод П. И.* Скрытая симметрия уравнений Ландау-Лифшица, иерархия высших уравнений и двойственное уравнение для асимметрического кирального поля // Теор. мат. физ.— 1987.— Т. 70.— № 1.— С. 18.
10. *Голод П. И.* Двумерное обобщение интегрируемого уравнения Стеклова в задаче о движении твердого тела в жидкости // ДАН СССР.— 1987.— Т. 292.— № 5.— С. 1087.
11. *Кричевер И. М., Новиков С. П.* Алгебры типа Вирасоро, римановы поверхности и структуры теории солитонов // Функц. анализ и его приложения.— 1987.— Т. 21.— Вып. 2.— С. 46.
12. *Шейман О. К.* Эллиптические афинные алгебры Ли // Функц. анализ и его приложения.— 1990.— Т. 24.— Вып. 3.— С. 51.
13. *Holod P., Kisilevich A., Kondratyuk S.* An Orbit Structure for Integrable Equations of Homogeneous Hierarchies // Proceeding of the Second International Conference "Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics".— Kiev, 1997.— P. 343—352.

Holod P. I., Skrypnyk T. V.

ANISOTROPIC QUASIGRADUATED LIE ALGEBRAS ON HYPERELLIPTIC CURVES AND INTEGRABLE HAMMILTONIAN SYSTEMS

New quasigraduated algebras of matrix-value function on hyperelliptic curves are constructed. The possibility of their usage as algebras of symmetry for phase space of integrable hammiltonian systems is considered. The central extensions of these algebras are investigated.