УДК 513.6

Боднарчук Ю. В.

ПРО СТРУКТУРУ ЗАМКНЕНИХ ПІДГРУП АФІННОЇ ГРУПИ КРЕМОНИ, ЩО МІСТЯТЬ SL_n

Використовуючи зв'язок між замкненими підгрупами і підалгебрами відповідної алгебри Лі, описано ґратку замкнених надгруп SL_n в афінній групі Кремони. Показано, що ґратка надеруп GL_n ізоморфна ґратці піднапіверуп напівeрупи натуральних чисел.

Афінна група Кремони GA_n над полем характеристики 0 визначається як група поліноміальних автоморфізмів афінного простору або як група автоморфізмів алгебри поліномів. її елементи представляються кортежами поліномів:

$$<f_1(x_1, \ldots, x_n), f_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n)>, \quad (1)$$

які задовольняють умові якобіану $\frac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)} =$ = const. Елементи GA_n, для яких вказана константа дорівнює одиниці, утворюють підгрупу SA_n, перетворень афінного простору, що зберігають об'єм. Для елементів виду (1) афінної підгрупи AGL_n маємо $\deg f_i \leq 1$. Підгрупа трикутних перетворень B_n складається з елементів, для яких $f_i = f_i(x_1, \ldots, x_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

В роботі І. Р. Шафаревича [1] показано, що GA_n має структуру нескінченновимірної алгебраїчної групи і, як і у випадку скінченної розмірності, має місце зв'язок між алгебрами Лі та замкненими підгрупами. Зокрема, використовуючи цей зв'язок, там же показано, що GA_n породжується як алгебраїчна група афінною підгрупою та групою трикутних перетворень. В даній роботі шляхом прямих обчислень в алгебрі $ga_n = Lie(GA_n)$ описано гратку підалгебр, що містять $sl_n = Lie(SL_n)$. Це дає опис замкнених надгруп SL_n. Зокрема показано, що підалгебра $agl_n = Lie(AGL_n)$ є максимальною підалгеброю, а сама афінна група є максимальною замкненою підгрупою GA_n в алгебраїчному сенсі (замикання будь-якої надгрупи збігається з GA_n). Це узагальнює наведений вище результат роботи [1]. Зауважимо, що згідно з [2] ga_n є незвідною транзитивною градуйованою алгеброю скінченного зросту Картанівського типу. Перейдемо до опису будови ga_n. Згідно з [1] ga_n є алгеброю Лі векторних полів типу

$$a_1\frac{\partial}{\partial x_1} + a_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + a_n\frac{\partial}{\partial x_n}, \quad \textbf{(2)}$$

де $a_i = a_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ є поліноми, які задовольняють умові $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a_i}{\partial x_i} = \text{const}$.

Елементи, для яких дивергенція тотожна нулю, утворюють ідеал $sa_n = Lie(SA_n)$. Степені поліномів визначають градуювання алгебри

$$ga_n = ga_n^{(-1)} \oplus ga_n^{(0)} \oplus ga_n^{(1)} \oplus (\bigoplus_{k=2}^{\infty} ga_n^{(k)}),$$

при цьому $ga_n^{(-2)} = (0)$, елементи $ga_n^{(-1)}$ мають форму (2), де a_i = const. $ga_n^{(0)} = gl_n = Lie(GL_n)$, а для афінної групи AGL_n маємо $ga_n^{(-1)} \oplus ga_n^{(0)} = agl_n = Lie(AGL_n)$. Тобто κ — однорідна компонента, що складається з елементів, у яких поліноми, присутні в (2), мають степінь κ - 1. Степенем елемента $u \in ga_n$ назвемо найменше число κ — таке, що $u \in \bigoplus_{k=-1}^{k} ga_n^{(i)}$.

Нехай $M \subseteq N$ — деяка піднапівгрупа півгрупи натуральних чисел по додаванню. Легко бачити, що $L(M) = \bigoplus_{k \in M} ga_n^{(k)}$ утворюють підалгебру Лі. Покладемо $L_0(M) = L(M) \cap sa_n$. Елементи (2) трикутного вигляду, для яких $a_i = a_i(x_1, \ldots, x_i)$, утворюють підалгебру $Lie(B_n)$. Визначимо базис ga_n як векторного простору так:

$$\varepsilon^r(k)=x_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}\frac{\partial}{\partial x_r}-$$
$$-\frac{k_r}{k_n+1}x_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_{r-1}^{k_{r-1}}x_r^{k_r-1}x_{r+1}^{k_{r+1}}\dots x_n^{k_n}\frac{\partial}{\partial x_n}; \qquad (3)$$
$$\xi(t)=x_1^{t_1}x_2^{t_2}\dots x_{n-1}^{t_{n-1}}\frac{\partial}{\partial x_n}; \quad \eta=x_n=\frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Очевидно, що елементи базису є однорідними елементами степенів $|k|-1,\ |l|-1, 0$ відповідно, де модуль цілочисельного вектора означає суму його координат.

Маємо такі формули множення елементів базису:

$$[\varepsilon^r(k),\ \varepsilon^s(l)] = (\frac{k_n l_s}{l_n+1}-k_s)\varepsilon^r(k+l-1_s)-$$
$$-(\frac{l_n k_r}{k_n+1}-l_r)\varepsilon^s(k+l-1_r); \qquad (4)$$
$$[\varepsilon^r(k),\ \xi(t)] = -k_n\varepsilon^r(k+t-1_n) \quad (k_n\neq 0); \qquad (5)$$
$$[\varepsilon^r(k),\ \xi(t)] = (k_r+t_r)\xi(k+t-1_r) \quad (k_n=0); \qquad (6)$$
$$[\varepsilon^r(k),\ \eta] = -k_n\varepsilon^r(k); \qquad (7)$$
$$[\xi(t),\ \xi(s)] = 0; \qquad (8)$$
$$[\xi(t),\ \eta] = \xi(t), \qquad (9)$$

де l_r є позначення для вектора, у якого *k-та* координата дорівнює 1, а решта нульові. Зокрема елементи $\varepsilon^r(1_s)$, $r = 1, 2, \dots, n-1$, $s = 1, 2, \dots, n$ породжують підалгебру sl_n, а при $r = s$ маємо елементи базису алгебри Лі n-1-вимірного тору. Додавши до згаданих елементів елемент η, отримаємо алгебру Лі n-вимірного тору.

Лема 1. Маємо кореневий розклад $sa_n=\bigoplus_l W_\lambda$, в якому $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1})$ пробігає всю гратку Z^n, $W_\lambda=<\varepsilon^r(k+1_r),\xi(t)|k_n-k_i+\delta_{i,r}=\lambda_i,\ t_i=-(\lambda_i+1)\geq 0,\ i,r=\overline{1,n}>$ ($\delta_{i,r}$ — символ Кронекера).

Зауважимо, що кореневі простори є нескінченновимірними і якщо для деякого i, $\lambda_i+1>0$, то W_λ не містить елементів типу $\xi(t)$.

Д о в е д е н н я зводиться до безпосередніх обчислень за формулами (4) — (9).

Неважко переконатись, що елементи $ad\varepsilon^r(1_s)$ переставляють кореневі простори в цілому і зберігають градуювання.

Уточнимо будову кореневих підпросторів наступним чином. Для даного $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1})\in Z^{n-1}$ і числа $1\leq r\leq n-1$, будь-які два розв'язки системи лінійних рівнянь $k_n-k_i+\delta_{i,r}=\lambda,\ i=\overline{1,n-1}$, відрізняються на сталий вектор $\Delta(a)=(a, a, \dots, a)$.

Можливі випадки:

а) існує єдина максимальна додатна координата вектора λ (її номер позначимо через *s);*

б) максимальних додатних координат декілька або їх не існує зовсім.

У випадку а) покладемо $k_n^*=k_n^*(r)=\lambda_s-\delta_{r,s}$, $k_i=$ $=k_n^*-\lambda_i$, тоді для кожного r вектор $k^*(r)+1_r$ задовольняє відповідній системі лінійних рівнянь. Нехай $\lambda^+=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_{n-1},0)$ вектор розмірності *n*, тоді вектор k^*+1_r можна подати у вигляді:

$$k^*+1_r=\Delta(\lambda_s)-\delta_{r,s}\Delta(1)-\lambda^++1_r.$$

Оскільки його остання координата набуває найменшого можливого значення $\lambda_{ss}-\delta_{r,s}$, то відповідний кореневий підпростір W_λ породжується елементами базису виду $e^r(k^*+1_r+\Delta(a))$, $a\in N$, $r = 1, 2, \dots, n-1$, до яких треба додати елемент $\xi(-(\lambda_1+1),-(\lambda_2+1),\dots,-(\lambda_{n-1}+1))$, якщо $\lambda_i+1\leq 0$ для всіх *i*.

У випадку б) будова кореневого простору простіша: він породжується елементами

$$e^r(k^0+1_r+\Delta(a)),\ a\in N,\ r=1,2,\dots,n-1,$$

де k^0 — вектор, остання координата якого дорівнює $k_n^0=\max(\max_i(\lambda_i),0)$, а решта $k_i^0=k_n^0-\lambda_i$, до яких, можливо, треба додати елемент типу $\xi(t)$, визначений у випадку а).

Лема 2. Нехай L є підалгеброю, що містить sl_n, тоді для будь-якого $k>0$ маємо імплікацію $L\cap ga_n^{(k)}\neq\varnothing\Rightarrow ga_n^{(k)}\subset L$.

Д о в е д е н н я. Нехай $L=\bigoplus L_\lambda$ — кореневий розклад ($\lambda\in Z^{(n-1)}$, $L_\lambda\subseteq W_\lambda$) і $\overset{\lambda}{\lambda}=(\lambda_1,\dots,\lambda_{1n-1})$ — будь-який корінь алгебри L і u є L_λ. Згідно з наведеним вище описом коренів $u=u_1+\xi$, де u_1 є лінійною комбінацією елементів типу (10) або (11), ξ — пропорційний деякому базисному елементу типу $\xi(t)$ (можливо, дорівнює нулю). Скористаємось формулою (5) при $t=1_s$. Дія $ad\xi(1_s)$ на елементи базису $\varepsilon^r(k)$, у яких $k_n\neq 0$, приводить до зменшення координати k_n на одиницю. При цьому k_s збільшується на одиницю. Якщо $k_n=0$, то, згідно з (6), $ad\xi(1_s)$ переводить $\varepsilon^r(k)$ в елементи базису типу $\xi(t)$.

Враховуючи (8), можна підібрати такий степінь *l*, що елемент $(ad\xi(1_s))^l u$ буде базисним елементом типу $\xi(t)\in ga_n^{(m)}$, $m=\deg u$. Покажемо тепер, що $ga_n^{(m)}\subset L$. Оскільки $\xi(t),\ \varepsilon^r(1_n)\in L$, то $[\xi(t),\varepsilon^r(1_n)]=$ $=\varepsilon^r(t_1,t_2,\dots,t_{n-1},0)\in L$. Згідно з формулою (4) маємо $[\varepsilon^r(1_n),\varepsilon^{rr}(k)]=\varepsilon^r(k-1_r+1_n)$. Застосувавши останню формулу t_r разів, отримаємо елемент

$$(ad\varepsilon^r(1_n))^{t_r}\varepsilon^{rr}(t)=$$
$$=\varepsilon^r(t_1,t_2,\dots,t_{r-1},0,t_{r+1},\dots,t_{n-1},t_r)\in L\cap ga_n^{(m)}.$$

Для будь-якого $s\neq r$ можна отримати елемент

$$[\varepsilon^r(t_1,t_2,\dots,t_{r-1},0,t_{r+1},\dots,t_{n-1},t_r),\varepsilon^s(1_r)]=$$
$$=-t_r\varepsilon^{rr}(t_1,t_2,\dots,t_{s-1},t_s-1,t_{s+1},\dots,t_{r-1},0,t_{r+1},\dots,$$
$$t_{n-1},t_r).$$

Продовжуючи цю процедуру відповідну кількість разів, одержуємо елемент $\varepsilon^r(0, ..., 0, m+1) = \varepsilon^r((m+1)1_n)$, а також елементи

$$[\varepsilon^r((m+1)1_n), \varepsilon^s(1_r)] = \varepsilon^s((m+1)1_n)$$

для всіх *s*. Скориставшись формулою (5), для довільних *r, s* маємо

$$[\varepsilon^r((m+1)1_n), \xi(1_s)] = -(m+1)\varepsilon^r(m1_n + 1_s).$$

Очевидно, що ітеруючи цю процедуру множення на елементи $\xi(1_s)$, $s = 1, 2, ..., n-1$, ми можемо одержати будь-який базисний елемент типу $\varepsilon^r(k)$, $|k| = m+1$. Решта базисних елементів типу $\xi(t)$, $|t| = m+1$, також лежать в підалгебрі *L*. Це випливає з формули (6). Дійсно, як випливає з попереднього, всі елементи $\varepsilon^r(t_1, t_2, ..., t_{n-1}, 0)$, $\sum t_i = m+1$, разом з елементом $\xi(1_r)$ належать *L*, отже, лему доведено.

Теорема 1. Нехай *L* — підалгебра Лі така, що $sl_n < L < ga_n$, тоді або $L = asl_n$, або $L = agl_n$, або існує піднапівгрупа $M \subseteq N$ така, що $L = L(M)$ або $L = L_0(M)$.

Доведення. Нехай $L \cap ga_n^{(-1)} \neq \varnothing$, тоді можливі випадки:

а) *L* містить нелінійний елемент, ступінь градуювання якого більший за 0;

б) I є підалгеброю agl_n. За лемою 2 всі елементи степеня -1 належать *L*.

У випадку а) до будь-якого нелінійного елемента можна застосувати *adh*, $h \in ga_n^{(-1)}$ відповідну кількість разів і отримати елемент з $ga_n^{(1)}$. Як випливає з леми 2, всі елементи базису (2) з цього шару $ga_n^{(1)}$ також належать до *L*. Перемножаючи елементи цього шару, очевидно, можна отримати елементи з будь-якого наперед заданого $ga_n^{(k)}$. Знову застосовуючи лему 2, отримаємо, що і весь цей шар належить до *L*. Отже, якщо $\eta \in L$, то $L = ga_n = L(N)$, в протилежному випадку $L = sa_n = L_0(N)$.

У випадку б) маємо: якщо $\eta \in L$, то $L = agl_n$, інакше $L = asl_n$. Нехай $L \cap ga_n^{(-1)} = \varnothing$. Степені елементів, що належать до *L*, утворюють піднапівгрупу $M \subseteq N$. Застосовуючи лему 2, маємо $L = L(M)$ при $\eta \in L$ і $L = L_0(M)$ в протилежному випадку. Теорему доведено.

Наслідок 1. Ґратка підалгебр Лі *L* таких, що $gl_n < L \leq ga_n^0$, ізоморфна ґратці піднапівгруп напівгрупи натуральних чисел по додаванню.

В роботі [1] доведено, що підалгебра ga_n породжується своїми підалгебрами agl_n і $Lie(B_n)$. Має місце більш сильне твердження.

Наслідок 2. Алгебра agl_n (asl_n) є максимальною підалгеброю в ga_n (sa_n). Поповнимо напівгрупу натуральних чисел ще одним нулем $\overline{N} = N \cup \{\overline{0}\}$, причому $\forall n\ (n \in N)\ n + \overline{0} = n$, $0 + \overline{0} = 0$.

Наслідок 3. Ґратка підалгебр Лі *L* таких, що $sl_n < L \leq ga_n^0$, ізоморфна ґратці піднапівгруп напівгрупи $\overline{N}$.

Дійсно, кожна піднапівгрупа $\overline{N}$ є або піднапівгрупою $M \subseteq N$, або має вигляд $M \cup \{\overline{0}\}$ В першому випадку їй відповідає алгебра $L_0(M)$, в другому — $L(M)$.

Перехід від алгебр Лі до відповідних груп здійснюється на основі наступної теореми.

Теорема 2. (І. Р. Шафаревич, [1]) Нехай *G* — зв'язна афінна нескінченновимірна алгебраїчна група над полем *к* характеристики 0, H — її замкнена підгрупа і $f: H \to G$ — занурення. Якщо $(df)_e : T_{e,H} \to T_{e,G}$ є ізоморфізмом, то і f — ізоморфізм (тобто H = *G*).

Тут через *T* позначено відповідний дотичний простір. Зазначимо, що згідно з означенням нескінченновимірної алгебри, даним в [$GA_n = \bigcup_k D_k$ є індуктивною границею скінченновимірних многовидів, а топологія Зрисського, визначена на них, індукує відповідну топологію на GA_n. Відомо, що група GA_n може бути розкладена в добуток афінної групи і групи $GA_n^{(1)}$, для елементів якої в формі (1) маємо $f_i = x_i + h_i(x_1, x_2, ..., x_n)$, $\deg h_i > 1$.

Більше того, маємо нескінченний спадний ланцюг нормальних дільників стабілізатора (0, 0, ..., 0) є A_n в групі GA_n (який позначається $GA_n^{(0)}$):

$$GA_n^{(1)} \supset GA_n^{(1)} \supset GA_n^{(2)} \supset ...$$
$$... \supset GA_n^{(m)} \supset GA_n^{(m+1)} \supset ... \supset (e),$$

де для елементів $GA_n^{(m)}$ у формі (1) маємо $f_i = x_i + h_i(x_1, x_2, ..., x_n)$, $\deg h_i > m$, $i = 1, 2, ..., n$. Легко переконатись, що має місце розклад в напівпрямий добуток $GA_n^{(0)} = GL_n \cdot GA_n^{(1)}$, а решта факторів вказаного нормального ряду є адитивними групами скінченновимірних векторних просторів. Введемо в розгляд канонічні епіморфізми

$$\varphi_k : GA_n^{(0)} \to GA_n^{(0)} / GA_n^{(k)}.$$

Завважимо, що $\mathrm{Im}\varphi_k$, $к = 1, 2...$ є скінченновимірними алгебраїчними групами. Нехай

$$T^{(m)}(t) = \langle x_1, x_2, ..., x_n + tx_1^{m+1} \rangle, t \in K,$$

— однопараметрична підгрупа, $T^{(m)}(t) \approx K^+$, якій, очевидно, відповідає комутативна алгебра Лі, породжена елементом $\xi(m+1, 0, ..., 0)$. Для довільної піднапівгрупи напівгрупи $M \subseteq N$ і довільного *к* введемо в розгляд групи

$$\overline{G}_k(M) = \langle \varphi_k(g) | (T^{(m)}(t))^A, A \in GL_n, m \in M \rangle$$

і покладемо $G(M) = \bigcap_k \varphi_k^{-1}(\overline{G}_k(M))$.

Лема 3. 1° групи *G(M)* є замкненими зв'язними нескінченновимірними алгебраїчними групами; 2° $Lie(G(M)) = L(M)$.

Доведення. В теорії скінченновимірних алгебраїчних груп добре відома (див., наприклад, [2], с 112) теорема про те, що група, породжена довільною сукупністю незвідних алгебраїчних підгруп, є незвідною алгебраїчною підгрупою. Оскільки всі групи $(T^{(m}\backslash t))^A$, $A \in GL_n$, ізоморфні як многовиди A^1, то з неї випливає незвідність і замкненість $\overline{G}_k(M)$ в $GA_n^{(0)} / GA_n^{(k)}$. Тоді $G(M)$ буде замкненою як перетин прообразів замкнених підгруп. Для доведення зв'язності $G(M)$ можна скористатись доведенням леми 4 з [1], де кожний елемент з $GA_n^{(1)}$ зв'язується з одиничним елементом неперервною кривою. Згідно з твердженням 3 з цієї ж роботи $G\{M)$ буде навіть незвідною. Для доведення 2° достатньо зауважити, що згідно з лемою 2 до алгебри $Lie(G(M))$ будуть належати не тільки елементи $\xi(m+1, 0, ..., 0)$, а і всі елементи базису (3), що належать $GA_n^{(m)}$, $m \in M$. Отже, $Lie(G(M)) \supseteq L(M)$. З іншого боку, оскільки алгебрами $L\{M)$ вичерпуються всі надалгебри gl_n, то маємо рівність 2°.

Теорема 3. Будь-яка замкнена надгрупа SL_n в афінній групі Кремони розкладається в добуток

$$\Omega \cdot SL_n \cdot K^+ \cdot G(M) \text{ або } \Omega \cdot SL_n \cdot G(M),$$

де Ω або збігається з K^*, або є її скінченною підгрупою, а M— піднапівгрупа N.

Доведення. Будь-яка підгрупа GA_n є підмноговид в прямому добутку многовидів $K \times SL_n \times K \times GA_n^{(1)}$. Як випливає з лем 2, 3 і теорем 1, 2, групами $SL_n \cdot K^+ \cdot G(M)$ і $SL_n \cdot G(M)$ вичерпуються всі зв'язні замкнені надгрупи. Оскільки всі замкнені власні підгрупи K^* вичерпуються скінченними підгрупами (група коренів з одиниці), а K^+ не містить скінченних (замкнених) підгруп, то теорему доведено.

1. *Щафаревич И. Р.* О некоторых бесконечномерных группах // Изв. АН СССР, сер. Математическая, т. 45, 1981, № 1, с. 214—226.

2. *Винберг Э. Б., Онищик А. Л.* Семинар по группам Ли и алгебраическим группам.— М: Наука, 1988.— 343 с.

Bodnarchuk Yu. V.

ON THE STRUCTURE OF CLOSED SUBGROUPS OF THE AFFINE CREMONA GROUP, WHICH CONTAIN SL_n

By using the connection between closed subgroups and subalgebras of the correspondent Lie algebras the structure of the closed supergroups of SL_n in the affine Cremona group is described. It is shown, that the structure of supergroups of GL_n is isomorphic to the structure of semigroups of the additive semigroup of natural numbers.