

Тригуб О. С.

АНАЛІЗ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ СІТОК ДО ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

У статті розглядається сукупність різницевих схем для апроксимації параболічних рівнянь. Теоретичне дослідження схем ґрунтується на побудові їх перших диференціальних наближень. Априорні висновки щодо точності схем, що досліджувалися, підтверджено чисельними розрахунками на модельному одновимірному рівнянні параболічного типу. Проведено порівняльний аналіз різницевих схем. Результати розрахунків подано у вигляді зручних для аналізу графіків і таблиць.

Викладення проводиться для одновимірного параболічного рівняння (рівняння конвективної дифузії) з постійними коефіцієнтами

$$\frac{\partial C}{\partial t} + V \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad (1)$$

яке описує зміну по часу t концентрації $C(x, t)$ мігранта, розчиненого в рідині, що фільтрується із швидкістю V при наявності дифузії, що задається коефіцієнтом D .

Чисельне розв'язання рівнянь типу (1) пов'язане з характерними обчислювальними труднощами. Провести достовірні розрахунки за більшістю відомих схем можна, як правило, лише при виконанні досить жорстких обмежень на кроки просторової та часової сіток. При порушенні цих умов у чисельному розв'язку з'являються характерні похибки двох видів: або фронт концентрації занадто згладжений (велика схемна дифузія), або в ньому присутні нефізичні сплески (осциляції).

Розглянемо питання про природу цих похибок за допомогою методу диференціальних наближень, детальний опис якого наведено в роботах [1–3]. Диференціальні наближення схем можна отримати шляхом розкладання в ряд Тейлора значень шуканої функції, які входять в різницеве рівняння, в околі точки (x_i, t^n) з наступним виключенням змішаних просторово-часових похідних шляхом диференціювання та алгебраїчних перетворень.

Розглянемо такі різницеві схеми для апроксимації рівняння (1):

- схема центральної різниці (схема № 1):

$$U_{\bar{i}}^{(k+1)} + VU_{\bar{x}}^{(k+1)} = DU_{\bar{x}\bar{x}}^{(k+1)}; \quad (2)$$

- модифікована схема центральної різниці (схема № 2):

$$U_{\bar{i}}^{(k+1)} + VU_{\bar{x}}^{(k+1)} = \frac{D}{1 + 0.5PeCu} U_{\bar{x}\bar{x}}^{(k+1)},$$

$$Pe = \frac{Vh}{D}, \quad Cu = \frac{V\tau}{h}; \quad (3)$$

- монотонна схема А. А. Самарського (схема № 3):

$$U_{\bar{i}}^{(k+1)} + VU_{\bar{x}}^{(k+1)} = \frac{D}{1 + 0.5Pe} U_{\bar{x}\bar{x}}^{(k+1)}; \quad (4)$$

- модифікована монотонна схема А. А. Самарського: (схема № 4)

$$U_{\bar{i}}^{(k+1)} + VU_{\bar{x}}^{(k+1)} = \frac{D}{1 + 0.5Pe(1 + Cu)} U_{\bar{x}\bar{x}}^{(k+1)}; \quad (5)$$

- схема односторонньої різниці (схема № 5):

$$U_{\bar{i}}^{(k+1)} + VU_{\bar{x}}^{(k+1)} = DU_{\bar{x}\bar{x}}^{(k+1)}; \quad (6)$$

- схема Кранка–Ніколсона (схема № 6):

$$U_{\bar{i}}^{(k+1)} + \frac{V}{2} \left(U_{\bar{x}}^{(k+1)} + U_{\bar{x}}^{(k)} \right) = \frac{D}{2} \left(U_{\bar{x}\bar{x}}^{(k+1)} + U_{\bar{x}\bar{x}}^{(k)} \right); \quad (7)$$

- схема Лакса–Вендроффа (схема № 7):

$$U_{\bar{i}}^{(k+1)} + VU_{\bar{x}}^{(k)} = D(1 + 0.5PeCu)U_{\bar{x}\bar{x}}^{(k)}; \quad (8)$$

- схема лінійного модифікованого методу характеристик (лінійний ММХ) (схема № 8):

$$\frac{U_i^{(k+1)} - U^{(k)}(P)}{\tau} = D \frac{U_{i+1}^{(k+1)} - 2U_i^{(k+1)} + U_{i-1}^{(k+1)}}{h^2}, \quad (9)$$

$$U^{(k)}(P) = \alpha U_{i-m-1}^{(k)} + (1 - \alpha) U_{i-m}^{(k)},$$

$$m = [Cu], \quad \alpha = Cu - m, \quad 0 \leq \alpha \leq 1;$$

- схема квадратичного модифікованого методу характеристик (квадратичний ММХ) (схема № 9):

$$\frac{U_i^{(k+1)} - U^{(k)}(P)}{\tau} = D \frac{U_{i+1}^{(k+1)} - 2U_i^{(k+1)} + U_{i-1}^{(k+1)}}{h^2}, \quad (10)$$

$$U^{(k)}(P) \approx \frac{1}{2}(\alpha^2 + \alpha)U_{i-m-1}^{(k)} + (1 - \alpha^2)U_{i-m}^{(k)} + \frac{1}{2}(\alpha^2 + \alpha)U_{i-m+1}^{(k)},$$

$$m = \begin{cases} [Cu], & \text{якщо } Cu - [Cu] < [Cu] + 1 - Cu, \\ [Cu] + 1, & \text{якщо } Cu - [Cu] \geq [Cu] + 1 - Cu. \end{cases}$$

Основні положення методів характеристик можна знайти в роботах [4–6].

Для дослідження точності наведених різницевих схем побудуємо їх перші диференціальні наближення (ПДН) [3] (у роботах [4, 5] замість ПДН вживається термін «modified partial differential equation»). Відзначимо, що основні положення методу диференціального наближення були висвітлені в роботах М. М. Яненко, Ю. І. Шокіна та їх учнів [1] стосовно різницевих схем для гіперболічних рівнянь. При дослідженні різницевих схем для рівняння конвективної дифузії метод диференціального наближення з успіхом використовувався в роботах Ное [2, 3].

У загальному вигляді ПДН різницевої схеми для рівняння (1) може бути записано таким чином:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + V \frac{\partial C}{\partial x} - \left(D - \frac{Vh}{2} \eta_2(Cu, Pe) \right) \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \sum_{q=3}^{\infty} \frac{Vh^{q-1}}{q!} \eta_q(Cu, Pe) \frac{\partial^q C}{\partial x^q} = 0. \quad (11)$$

Відповідно до визначення в роботі [4], різницева схема має p -й порядок точності, якщо $\eta_q = 0$, $q = 1, \dots, p$, але $\eta_{q+1} \neq 0$. Якщо $\eta_2 \neq 0$ (тобто схема має перший порядок точності), то кажуть, що метод має схемну дифузю.

Однією з центральних проблем, які виникають при побудові різницевих схем для рівняння (1), є апроксимація конвективного члена (першої просторової похідної). Наприклад, Г-форма ПДН схеми односторонньої різниці має вигляд:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + V \frac{\partial C}{\partial x} = D \left(1 + \frac{Vh}{2D} \right) \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} - \frac{\tau^2}{6} \frac{\partial^3 C}{\partial t^3} + \frac{\tau^3}{24} \frac{\partial^4 C}{\partial t^4} - \frac{Vh^2}{6} \frac{\partial^3 C}{\partial x^3} + \left(\frac{Vh^3}{24} + \frac{Dh^2}{12} \right) \frac{\partial^4 C}{\partial x^4} + \dots, \quad (12)$$

який свідчить про наявність схемної дифузії, величина якої залежить від безрозмірного па-

раметра $Pe = \frac{Vh}{D}$, який надалі називатимемо числом Пекле. Вплив схемної дифузії проявляється в занадто згладжених обчислених профілях концентрації. При $Pe = 2$ вплив схемної та справжньої дифузії на чисельний розв'язок оцінюється як однаковий, тому для знаходження точних розв'язків за схемою односторонньої різниці потрібне виконання умови $Pe \ll 2$. Ця умова накладає суттєві обмеження на крок просторової сітки, особливо у випадках домінуючої конвекції переносу.

Один із шляхів зменшення впливу схемної дифузії полягає у введенні спеціальних корекцій коефіцієнта дифузії таким чином, щоб частково компенсувати схемну дифузію. Цей прийом дає змогу в деяких випадках підвищити точність різницевої схеми на десятки процентів. Так, аналіз виразу (12) для схеми односторонньої різниці показує доцільність вибору наступної корекції коефіцієнта дифузії:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + V \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{D}{1+0,5Pe} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}.$$

Відповідну до такого скоригованого рівняння переносу різницеву схему називають монотонною схемою (схема А. А. Самарського).

ПДН монотонної схеми має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + V \frac{\partial C}{\partial t} - D \left(1 + \frac{(1+Cu)}{2} \right) \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \\ + \frac{Vh^2}{6} \left(\frac{6Cu}{Pe} - Cu^2 + 1 \right) \frac{\partial^3 C}{\partial x^3} + \\ + \frac{Vh^3}{24} \left(12 \frac{Cu^2}{Pe} - \frac{12Cu}{Pe^2} - 1 - \frac{2}{Pe} - Cu^3 \right) \frac{\partial^4 C}{\partial x^4} + \dots = 0 \end{aligned}$$

Тоді модифіковану монотонну схему можна записати у вигляді (5).

Використовуючи центрально-різницеву апроксимацію конвективного члена рівняння (1), отримують схему центральної різниці (2), ПДН якої має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + V \frac{\partial C}{\partial t} - D \left(1 + \frac{PeCu}{2} \right) \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \\ + \frac{Vh^2}{6} \left(\frac{6Cu}{Pe} - Cu^2 + 1 \right) \frac{\partial^3 C}{\partial x^3} + \\ + \frac{Vh^3}{24} \left(12 \frac{Cu^2}{Pe} - \frac{12Cu}{Pe^2} - \frac{2}{Pe} - Cu^3 \right) \frac{\partial^4 C}{\partial x^4} + \dots = 0. \end{aligned}$$

Принцип максимуму справедливий для цієї схеми лише за умови $Pe \leq 2$, порушення якої веде до появи в чисельному розв'язку нефізич-

них сплесків. При збільшенні різницевого числа Пекле Pe точність схеми погіршується і при $Pe > 4 \div 6$ стає незадовільною.

Аналогічно ситуації з монотонною схемою, для схеми центральної різниці можна побудувати модифіковану схему центральної різниці у вигляді (3).

Доповнимо аналіз ще двома схемами, які досить широко застосовуються на практиці – це схеми Кранка–Ніколсона (7) та Лакса–Вендроффа (8).

ПДН схеми Кранка–Ніколсона має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + V \frac{\partial C}{\partial t} - D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{Vh^2}{6} \left(1 + \frac{Cu^2}{2} \right) \frac{\partial^3 C}{\partial x^3} + \\ + \frac{Vh^3}{24} \left(-6 \frac{Cu^2}{Pe} + 2Cu + Cu^3 - \frac{2}{Pe} \right) \frac{\partial^4 C}{\partial x^4} + \dots = 0. \end{aligned}$$

ПДН схеми Лакса–Вендроффа має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + V \frac{\partial C}{\partial t} - D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{Vh^2}{6} \left(1 - 6 \frac{Cu}{Pe} - Cu^2 \right) \frac{\partial^3 C}{\partial x^3} + \\ + \frac{Vh^3}{24} \left(24 \frac{Cu^2}{Pe} + 12 \frac{Cu}{Pe^2} + 3Cu + 3Cu^3 - \frac{2}{Pe} \right) \frac{\partial^4 C}{\partial x^4} + \dots = 0. \end{aligned}$$

Очевидно, що у схем Кранка–Ніколсона та Лакса–Вендроффа схемна дифузія відсутня, але для схеми Кранка–Ніколсона залишається обмеження на просторовий крок сітки, пов'язане з виконанням принципу максимуму, а для схеми Лакса–Вендроффа необхідно додатково виконати умову стійкості схеми. Для обох схем ці вимоги приводять до обмеження $Pe \leq 2$. Враховуючи, що схема Лакса–Вендроффа взагалі є явною різницевою схемою і має характерні для явних схем обмеження, з подальшого дослідження її виключимо.

Для лінійного ММХ його ПДН має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + V \frac{\partial C}{\partial t} - D \left(1 + \frac{Pe\alpha(1-\alpha)}{2Cu} \right) \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \\ + \frac{Vh^2}{6} \frac{\alpha(1-\alpha)(1-2\alpha)}{Cu} \frac{\partial^3 C}{\partial x^3} - \frac{Vh^3}{24} \left(12 \frac{Cu}{Pe^2} + \frac{2}{Pe} + \right. \\ \left. + \frac{\alpha(1-\alpha)(6\alpha^2 - 6\alpha + 1)}{Cu} \right) \frac{\partial^4 C}{\partial x^4} + \dots = 0. \quad (13) \end{aligned}$$

Аналіз співвідношення (13) показує, що лінійний ММХ має схемну дифузію, тобто має перший порядок точності. Схемна дифузія із збільшенням числа Куранта асимптотично наближається до нуля. При цілих значеннях числа Cu схемна дифузія відсутня і метод має третій порядок точності.

ПДН квадратичного ММХ записується у вигляді:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + V \frac{\partial C}{\partial x} - D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{Vh^2}{2} \frac{\alpha(1-\alpha)(1+\alpha)}{Cu} \frac{\partial^3 C}{\partial x^3} - \frac{Vh^3}{24} \left(12 \frac{Cu}{Pe^2} + \frac{2}{Pe} - \frac{3\alpha(1-\alpha)(1+\alpha)}{Cu} \right) \frac{\partial^4 C}{\partial x^4} + \dots = 0. \quad (14)$$

Очевидно, що у квадратичного ММХ схемна дифузія відсутня. Метод має другий порядок точності. Висока точність методу при цілих числах Cu пояснюється тим, що в цьому випадку необхідність в інтерполяції зникає, тому що $P = x_i - Cu$.

Аналізуючи вирази (13, 14) для ПДН лінійного та квадратичного ММХ, підкреслимо найбільш цікаву та практично важливу рису цих методів: при обраному числі Пекле (тобто при фіксованій просторовій дискретизації) точність методів зростає із збільшенням числа Куранта (тобто із збільшенням кроку часової дискретизації). Таке поліпшення точності триває, аж поки починає виявлятися вплив множника η_4 при кое-

фіцієнті $\frac{\partial^4 C}{\partial x^4}$. До складу η_4 входить доданок,

пропорційний різницевому числу Cu , наявність якого і пояснює відносне погіршення точності ММХ при збільшенні кроку часової дискретизації. Різницеві схеми ММХ, які не містять цього доданка, досліджені в роботі [7].

З метою ілюстрації теоретичних результатів було проведено порівняльний аналіз точності розглянутих вище різницевих схем на такій модельній задачі:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + V \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < t < T, \quad (15)$$

$$C(0, t) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} C(x, t) = 0, \quad C(x, 0) = 0,$$

точний розв'язок якої має вигляд:

$$C(x, t) = 0,5 \left\{ \operatorname{erfc} \left[\frac{x - Vt}{2\sqrt{Dt}} \right] + \exp \left(\frac{Vx}{D} \right) \operatorname{erfc} \left[\frac{x + Vt}{2\sqrt{Dt}} \right] \right\}.$$

При чисельному розв'язанні довжина відрізка l обиралася за умови, щоб при $t = T$ сформувався профіль розв'язку, близький до квазістаціонарного. Різницеві числа Пекле і Куранта змінювались при розрахунках у межах $Pe = 0,4 \div 5$, $Cu = 0,4 \div 10$. Результати розрахунків показано на рис. 1–8.

Додатково в діапазоні $Pe = 0,2 \div 3$, $Cu = 0,2 \div 3$ точність чисельного розв'язку оцінювалася за величиною середньоквадратичної похибки, вираженої у відсотках:

$$Z = \frac{1}{\sqrt{l}} \sqrt{\sum_{i=1}^{N-1} h(C(x_i, T) - U_i^{(k+1)})^2} \cdot 100. \quad (16)$$

З метою точнішого порівняння різницевих схем результати обчислювальних експериментів представлено у вигляді табл. 1, в якій у змінних Pe , Cu наведено чисельні значення середньоквадратичної похибки Z . Різницеві схеми в табл. 1 пронумеровані таким чином: 1 – схема центральної різниці; 2 – модифікована схема центральної різниці; 3 – монотонна схема А. А. Самарського; 4 – модифікована монотонна схема А. А. Самарського; 5 – схема односторонньої різниці; 6 – схема Кранка–Ніколсона; 7 – лінійний ММХ; 8 – квадратичний ММХ.

Таблиця 1. Середньоквадратична похибка різницевих схем для параболічного рівняння, %

Схе- ма	Cu	Pe					
		0,2	0,4	0,8	1,0	2,0	3,0
1	0,2	0,13	0,26	0,52	0,66	1,40	2,22
2		0,09	0,16	0,31	0,40	0,99	1,77
3		0,18	0,43	1,08	1,45	3,38	5,19
4		0,11	0,29	0,89	1,25	3,20	5,06
5		0,67	1,30	2,42	2,93	5,10	6,86
6		0,04	0,05	0,10	0,14	0,51	1,10
7		0,45	0,88	1,69	2,08	3,79	5,27
8		0,07	0,09	0,14	0,17	0,46	0,95
1	0,4	0,25	0,49	0,97	1,20	2,34	3,45
2		0,14	0,26	0,52	0,67	1,52	2,54
3		0,30	0,66	1,49	1,94	4,11	6,04
4		0,16	0,41	1,15	1,59	3,83	5,84
5		0,78	1,49	2,75	3,32	5,66	7,53
6		0,04	0,05	0,10	0,15	0,53	1,15
7		0,33	0,65	1,28	1,59	3,01	4,30
8		0,09	0,12	0,16	0,18	0,36	0,74
1	0,8	0,48	0,94	1,79	2,19	3,97	5,50
2		0,25	0,47	0,96	1,23	2,71	4,24
3		0,53	1,09	2,26	2,83	5,43	7,53
4		0,27	0,66	1,71	2,29	5,03	7,26
5		0,99	1,87	3,39	4,04	6,73	8,72
6		0,04	0,05	0,12	0,18	0,64	1,38
7		0,14	0,22	0,40	0,52	1,22	2,04
8		0,14	0,19	0,18	0,14	0,37	0,99
1	1,0	0,60	1,16	2,17	2,64	4,70	6,38
2		0,30	0,58	1,20	1,54	3,33	5,09
3		0,64	1,31	2,62	3,25	6,03	8,21
4		0,33	0,79	2,00	2,64	5,60	7,92
5		1,10	2,06	3,68	4,40	7,24	9,29
6		0,04	0,05	0,14	0,20	0,72	1,56
7		0,15	0,19	0,13	0,09	0,54	1,27
8		0,15	0,19	0,13	0,09	0,54	1,27

Схе- ма	Cu	Pe					
		0,2	0,4	0,8	1,0	2,0	3,0
1	2.0	1.15	2.15	3.85	4.60	7.52	9.81
2		0.57	1.16	2.47	3.15	6.21	8.74
3		1.19	2.28	4.21	5.07	8.43	10.99
4		0.64	1.48	3.39	4.31	7.99	10.72
5		1.61	2.93	5.07	5.97	9.28	11.71
6		0.04	0.08	0.25	0.39	1.47	3.09
7		0.24	0.29	0.23	0.18	0.61	1.36
8		0.24	0.29	0.23	0.18	0.61	1.36
1	3.0	1.66	3.03	5.21	6.13	9.68	12.13
2		0.85	1.79	3.76	4.70	8.57	11.35
3		1.70	3.14	5.50	6.50	10.36	12.92
4		0.95	2.18	4.64	5.74	9.96	12.70
5		2.09	3.72	6.21	7.23	11.00	13.42
6		0.05	0.13	0.47	0.72	2.75	5.51
7		0.31	0.36	0.30	0.27	0.69	1.50
8		0.31	0.36	0.30	0.27	0.69	1.50

Виконані дослідження дають підставу зроби такі висновки:

1. Методи характеристик (ММХ) мають суттєву перевагу порівняно з іншими схемами, розглянутими вище. Вони поступаються кращим з розглянутих схем лише при малих числах Куранта, наприклад, лінійний ММХ при малих числах Куранта близький за точністю до явної різницевої схеми односторонньої різниці 1-го

порядку точності. Водночас методи ММХ значно переважають інші схеми при $Cu > 1$, наприклад, квадратичний ММХ має схожу точність зі схемами Лакса-Вендроффа та Кранка-Ніколсона 2-го порядку точності, але при цьому квадратичний ММХ вільний від обмежень, властивих цим схемам і пов'язаних з виконанням принципу максимуму та стійкістю схеми.

2. Досліджені схеми можна впорядкувати за точністю таким чином: 8-7-6-2-4-1-3-5, де перша схема в ланцюжку (схема 8) має найвищу точність. Отримані експериментальні оцінки схем фактично збігаються з апіорними висновками, зробленими на основі аналізу схем за допомогою методу диференціальних наближень. Модифікація монотонної схеми виграшу в точності порівняно з монотонною схемою не дає. Водночас модифікована схема центральної різниці має точність на 25–30 % вищу, ніж схема центральної різниці.

3. Лінійний ММХ має схемну дифузію. Квадратичний ММХ вільний від схемної дифузії. Методи мають відповідно 1-й та 2-й порядок точності. При цілих числах Куранта обидва методи мають 3-й порядок точності. Квадратичний ММХ демонструє задовільну точність у ширшому діапазоні різницевих чисел Пекле та Куранта, ніж лінійний ММХ.

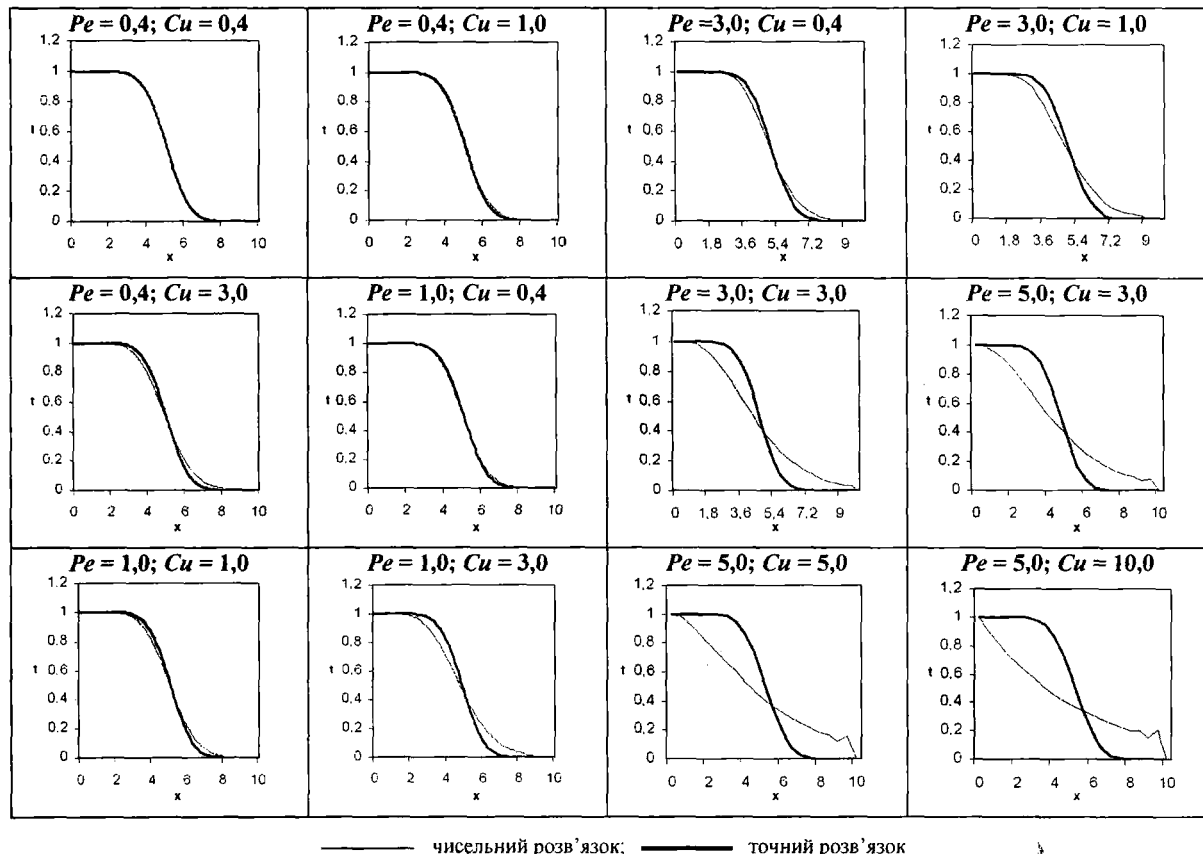
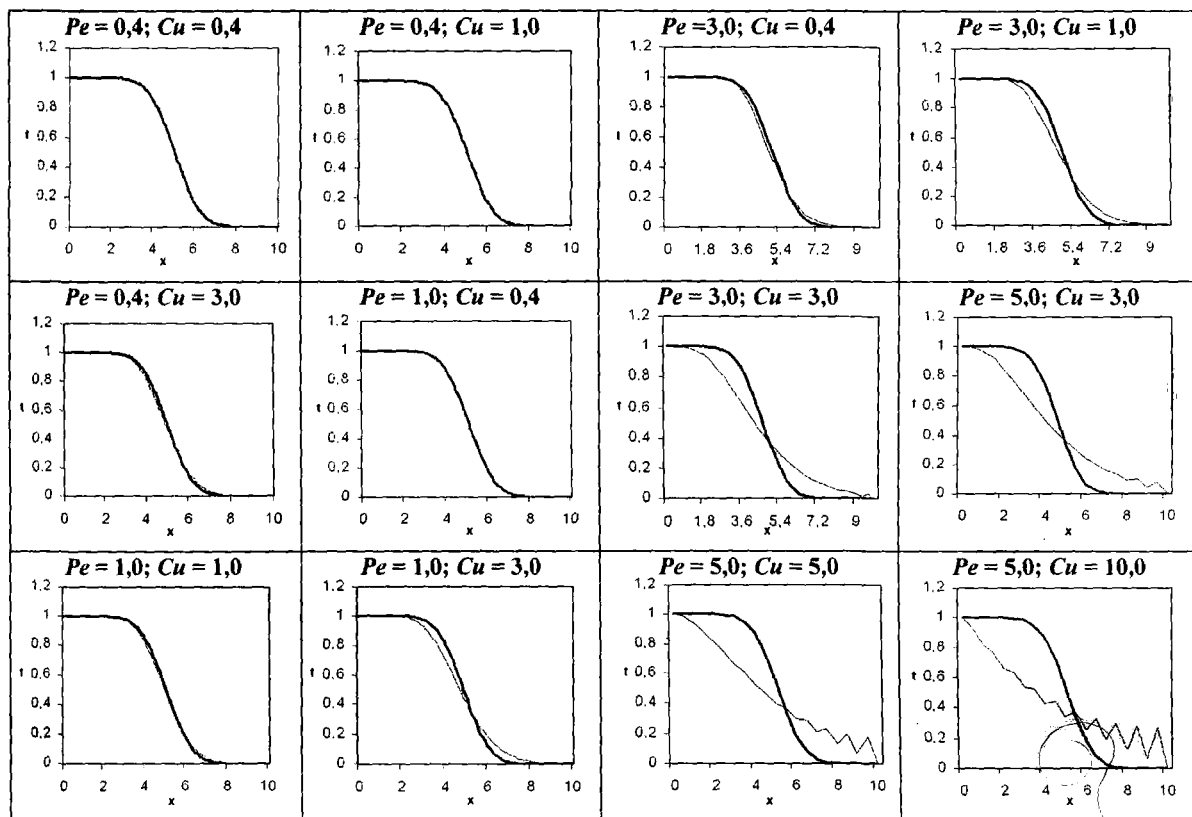
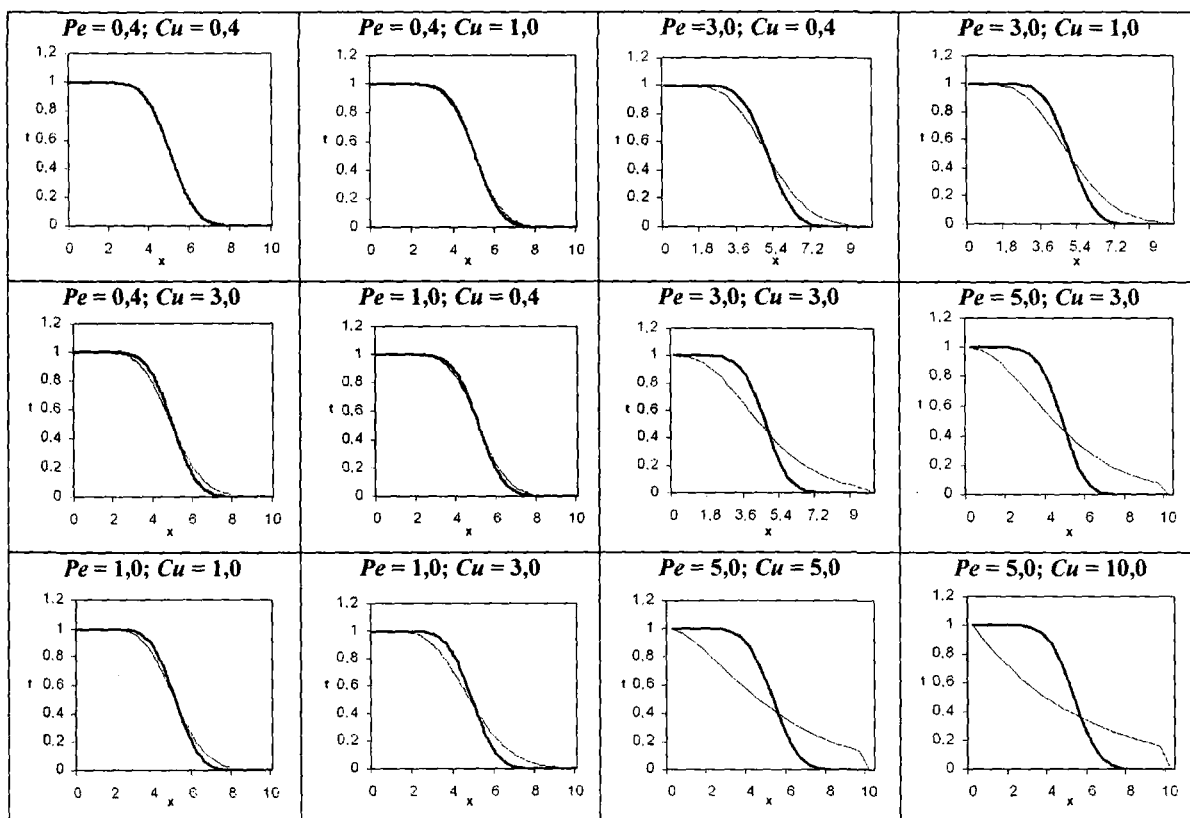


Рис. 1. Результати розрахунків за схемою центральної різниці



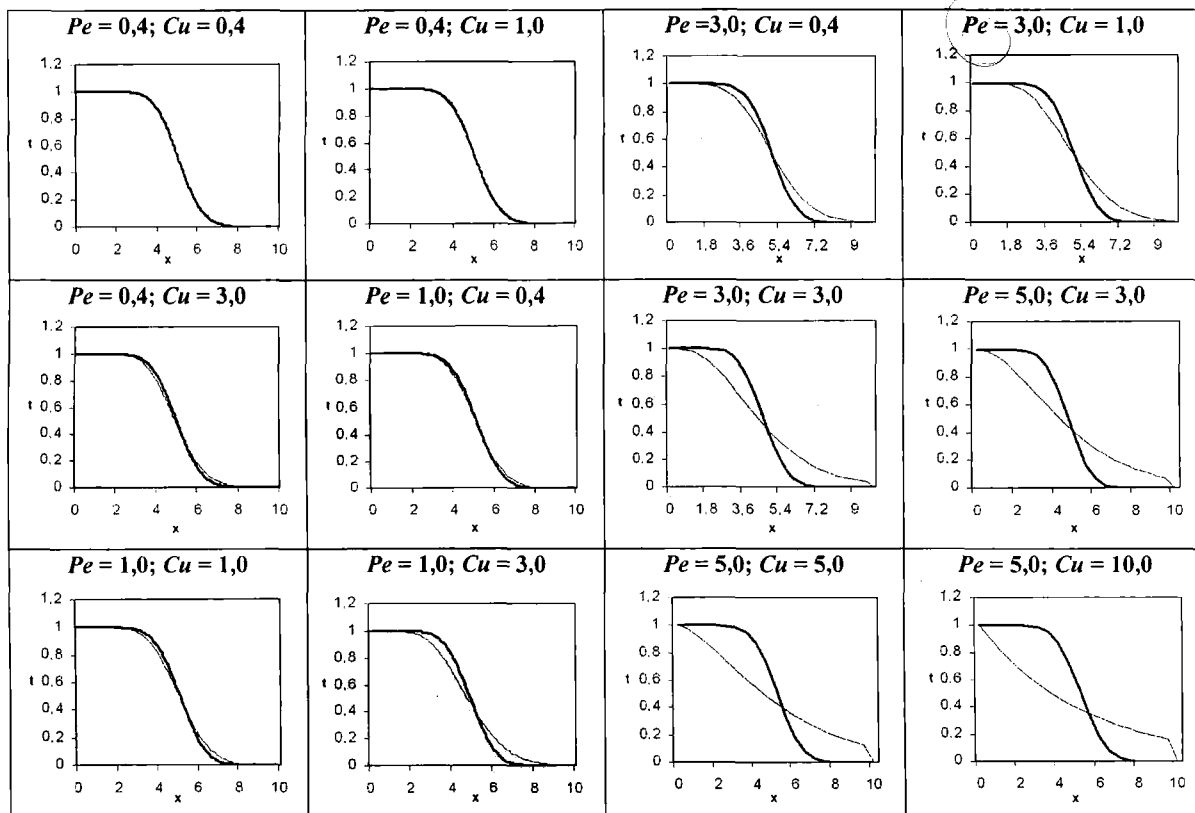
— чисельний розв'язок; — точний розв'язок

Рис. 2. Результати розрахунків за схемою модифікованої центральної різниці



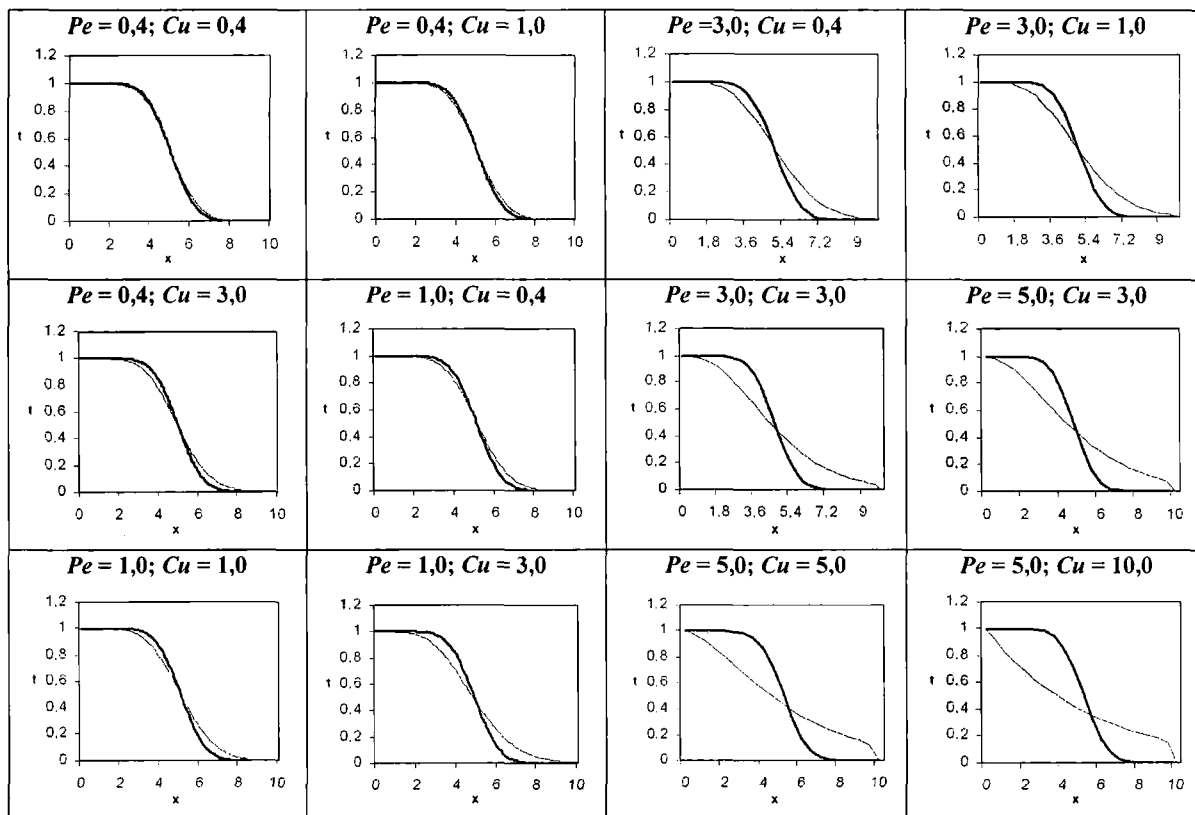
— чисельний розв'язок; — точний розв'язок

Рис. 3. Результати розрахунків за монотонною схемою А. А. Самарського



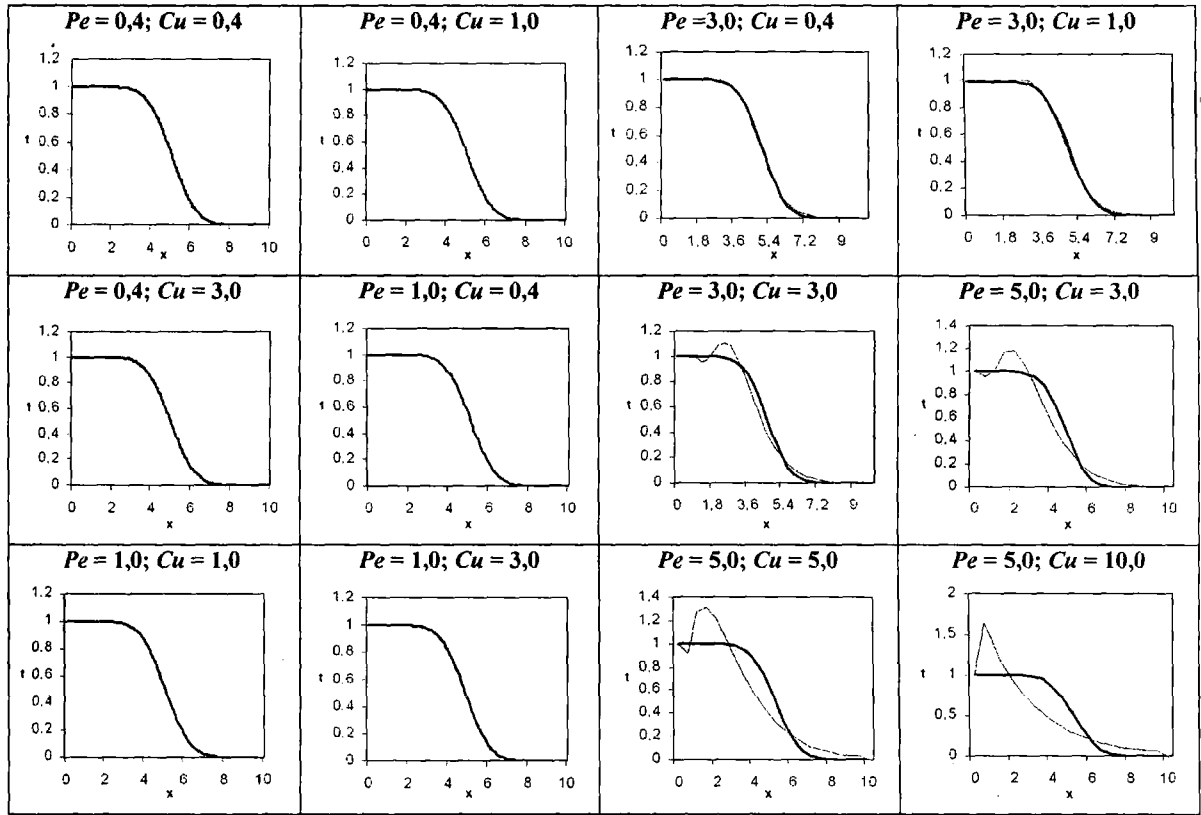
— чисельний розв'язок; — точний розв'язок

Рис. 4. Результати розрахунків за модифікованою монотонною схемою А. А. Самарського



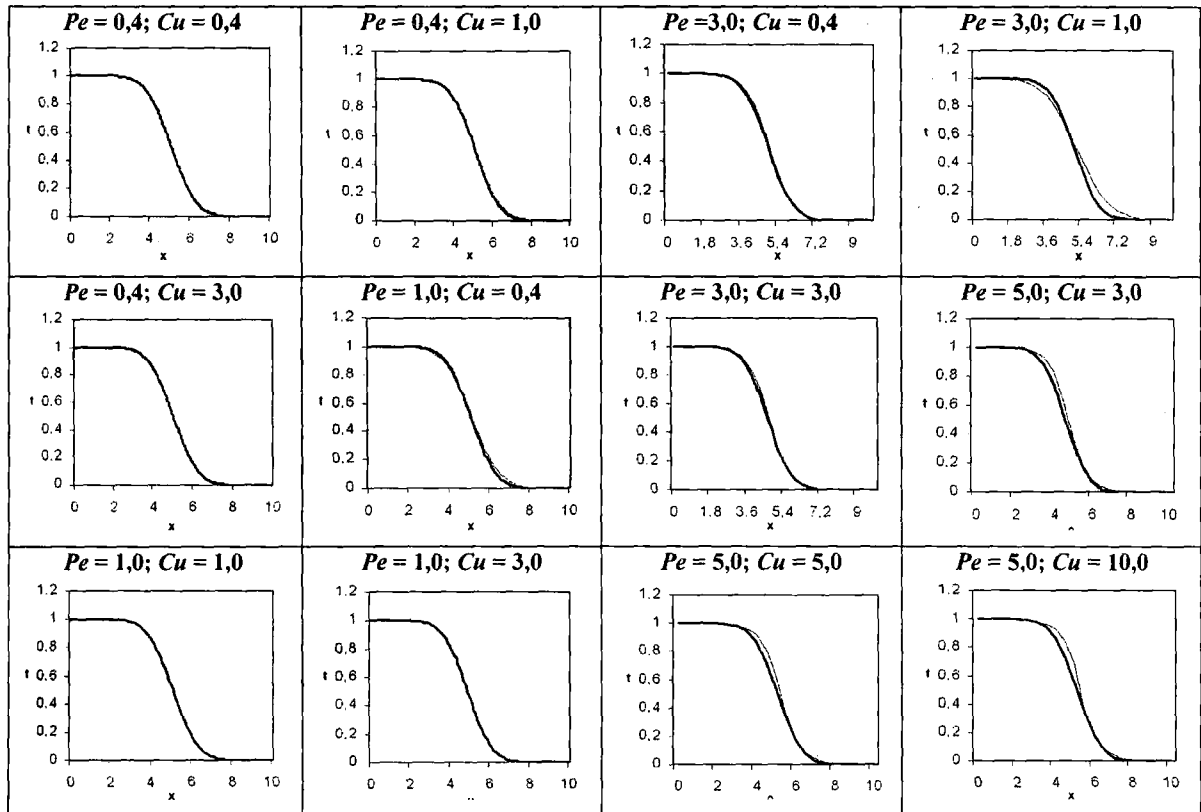
— чисельний розв'язок; — точний розв'язок

Рис. 5. Результати розрахунків за схемою односторонньої різниці



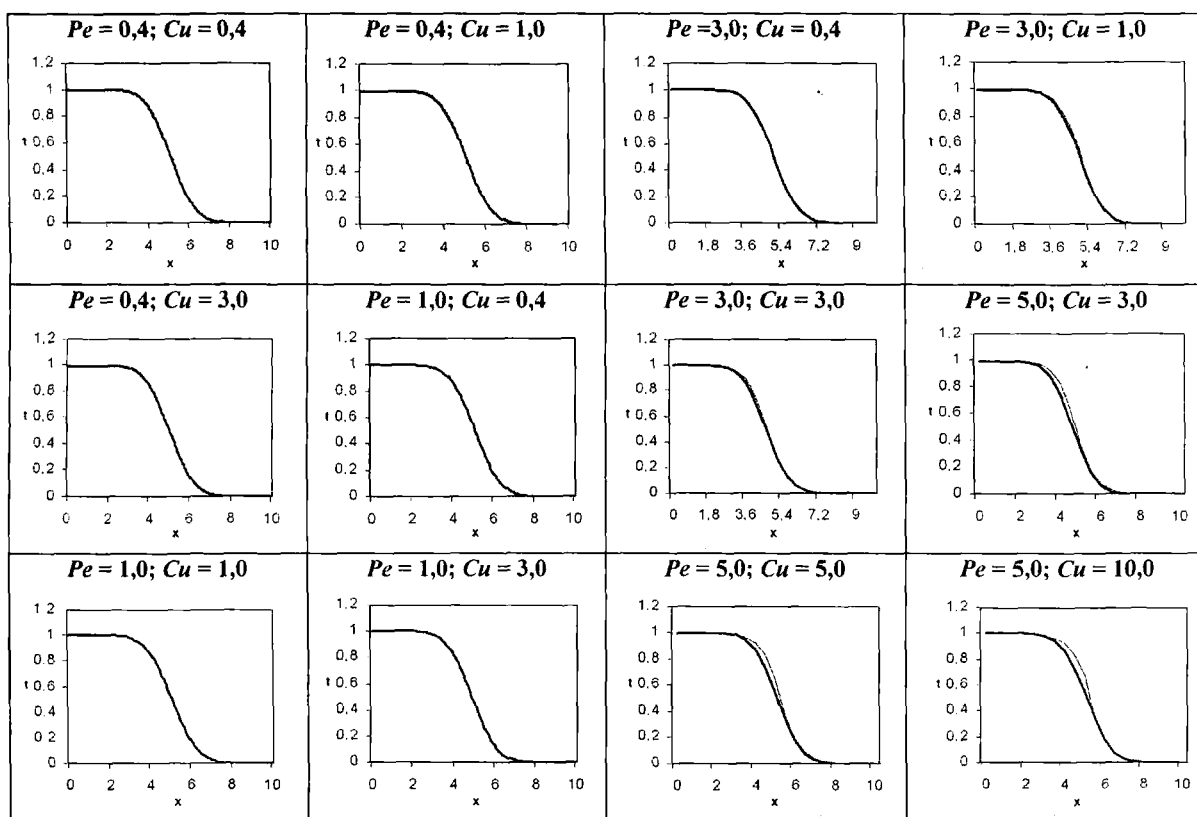
— чисельний розв'язок; — точний розв'язок

Рис. 6. Результати розрахунків за схемою Кранка-Ніколсона



— чисельний розв'язок; — точний розв'язок

Рис. 7. Результати розрахунків за лінійним MMX



———— чисельний розв'язок; ————— точний розв'язок

Рис. 8. Результати розрахунків за квадратичним ММХ

4. Оптимальним, з точки зору точності, є таке співвідношення між кроками просторової та часової сіток, коли $Pe \approx Cu$. Тоді досягається

компроміс між похибками, пов'язаними з інтерполяцією, та похибками, які зумовлені апроксимацією дифузійного члена рівняння (1).

1. Шокін Ю. И., Яненко Н. Н. Метод дифференциального приближения. — Новосибирск: Наука, 1985. — 366 с.
2. Noye J. Finite-Difference Methods for Solving the One-Dimensional Transport Equation. Numerical Modelling: Applications to Marine Systems. — Elsevier Science Publishers B. V. (North-Holland), 1987. — P. 231–256.
3. Noye J., Hayman K. Accurate Finite Difference Methods for Solving the Advection-Diffusion Equation. Computational Techniques & Applications: CTAC-85. — Elsevier Science Publishers B. V. (North-Holland), 1986. — P. 137–146.
4. Douglas J. Jr., Russel T. F. Numerical Methods for Convection Dominated Diffusion Problems Based on Combining the Method

- of Characteristics with Finite Element or Finite Difference Procedures. SIAM J. Numer. Anal. — 1982. — № 5. — P. 871–885.
5. Демченко В. Ф. Разностные схемы для уравнения конвективной диффузии. Тр. Международн. Совещания «Моделирование в ядерной энергетике». Ч. 1. — Варна, 1982. — С. 24–49.
6. Тригуб О. С. Порівняльний аналіз деяких різницевих схем для рівняння конвективної дифузії // Наукові записки. — 1999. — Том 16. Комп'ютерні науки. — С. 61–71.
7. Тригуб О. С. Застосування методу характеристик до розв'язання задач підземного масопереносу // Наукові записки. — 1999. — Т. 9. Спеціальний випуск. Ч. 2. — С. 305–311.

O. S. Trygub

THE ANALYSIS OF USE OF GRID METHOD FOR NUMERICAL SOLVING OF PARABOLIC EQUATIONS

The set of differential schemas for approximation of the parabolic equations is regarded. The theoretical investigation is based on the first differential approximations. The beforehand conclusions are confirmed by numerical calculations on the sample one-dimensional parabolic equation. The results of calculations are given by graphs and tables which are easy for the analysis.