УДК 519.11

Олійник Б. В.

УНІВЕРСАЛЬНІ МЕТРИЧНІ ПРОСТОРИ З ТРИВІАЛЬНОЮ ГРУПОЮ ІЗОМЕТРІЙ

В роботі встановлені природні умови еквівалентності понять ізоморфізму в категорійному сенсі і в сенсі перетворення шкали для зліченних метричних просторів. Запропоновано конструкцію, яка дозволяє будувати континуум багато попарно не ізоморфних I-універсальних метричних просторів з тривіальною групою ізометрій.

Поняття ізоморфізму метричних просторів за допомогою перетворення функції шкали було введено в 30-х роках минулого сторіччя в роботі Шьонберга [8].

Нехай *F(t)* є неперервна монотонно зростаюча функція, визначена для всіх $t \geq 0$, причому $F(0) = 0$. *Метричною трансформацією* (напів)метричного простору *(X,d)* за допомогою функції *F(t)* називається напівметричний простір *(X,d')*, де функція d' визначається умовою

$$d'(x,y) = F(d(x,y)), x, y \in X.$$

Метричну трансформацію простору *(X, d)* за допомогою функції *F* позначають *F(X)*. Функцію *F(t)* називають *шкалою* такої трансформації. Якщо перетворення шкали $F(t), t \geq 0$, є опуклою вгору функцією, то для довільного метричного простору *(X, d)* його метрична трансформація *F(X)* буде метричним простором ([3], с. 113).

Метричні простори *(X, d)* та *(X', d')* називають ізоморфними, якщо існує така метрична трансформація *F* простору *X,* що простори *X'* і *F(X)* є ізометричними. Метричний простір *(X,* d) ізоморфне занурюється в метричний простір *(X', d'),* якщо існує деяке перетворення шкали F(i), таке що *F(X)* є ізометричним деякому підпроетору простору *X'*.

Метричні перетворення за допомогою функції шкали вивчались також в роботах [1], [3], [4], [9], та ін. Найбільше досліджувались степеневі перетворення і перетворення Шьонберга. Степеневі перетворення задаються функцією шкали

$$f_c(t) = t^c$$

де $0 < c < 1$. Вони використовувались для дослідження занурень скінченних метричних просторів у скінченне вимірні l_p -простори над R (для $0 < c < 1$) і в евклідові простори [3],[4]. Перетворенням Щьонберга називається перетворення за допомогою функції шкали вигляду

$$f_\lambda(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \ t \geq 0,$$

де A — додатній скаляр. Перетворення Шьонберга дає змогу охарактеризувати всі гладкі функції шкали, що зберігають негативний тип простору [8], [9].

В 90-х роках минулого сторіччя в роботі [2] було введено інше означення ізоморфізму метричних просторів. Відображення φ метричного простору *(X, p)* в метричний простір (У, σ) називається *монотонним,* якщо воно зберігає нерівності відстаней між парами точок, тобто для довільної четвірки $x, y, u, v \in X$ з нерівності

$$\rho(x,y) < \rho(u,v)$$

випливає нерівність

$$\sigma(\varphi(x), \varphi(y)) \leq \sigma(\varphi(u), \varphi(v)).$$

Клас всіх метричних просторів утворює категорію [2], об'єктами якої є метричні простори, а морфізмами — монотонні відображення метричних просторів.

Морфізм $\tau : X \to Y$ буде ізоморфізмом у категорійному розумінні в тому і лише тому разі, коли він є бієкцією і зберігає рівності й строгі нерівності відстаней між парами точок, тобто для довільних точок $x, y, u, v \in X$ з рівності $\rho(x,y) = \rho(u,v)$ випливає рівність

$$\sigma(\tau(x), \tau(y)) = \sigma(\tau(u), \tau(v)),$$

а з нерівності $\rho(x,y) < \rho(u,v)$ випливає нерівність

$$\sigma(\tau(x), \tau(y)) < \sigma(\tau(u), \tau(v)).$$

Ізоморфізм цієї категорії і названо в роботі [2] ізоморфізмом метричних просторів. Виникає запитання: для яких класів метричних просторів поняття ізоморфізму в категорійному сенсі і в сенсі перетворення шкали збігаються? Природні умови дають твердження.

Теорема 1. *Нехай (X, ρ) і (Y, σ) не більш ніж зліченні метричні простори, причому множини значень метрик ρ і σ або одночасно обмежені, або одночасно необмежені і спектри просторів X і Y є деякими зростаючими послідовностями. Простори X, Y будуть ізоморфними в категорійному розумінні в тому і лише в тому разі, коли існує таке перетворення шкали $F(t)$, $t \geq 0$, що простори F(X) і Y є ізометричними.*

Доведення. Нехай зліченні метричні простори (X, ρ) і (Y, σ) ізоморфні в категорійному сенсі, тобто існує біекція $\tau : X \to Y$, яка зберігає рівності й строгі нерівності відстаней між парами точок. Побудуємо шкалу $F(t)$, $t \geq 0$, таку що *F(X)* Ізометричний *Y.* Розглянемо такі три випадки.

1. Простори *X* і *Y* є скінченними, $|X| = |Y| = n$. Упорядкуємо за зростанням

$$0 = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_s, \ (1 \leq s \leq \frac{n(n-1)}{2})$$

всі значення метрики $\rho(x,y)$ для $x, y \in X$. Після цього визначимо функцію *f(t)* спочатку в точках a_i $(0 \leq i \leq s)$, поклавши

$$F(0) = 0, \ F(\rho(x,y)) = \sigma(\tau(x), \tau(y)).$$

Дістанемо зростаючу послідовність чисел

$$0 = b_0 < b_1 < b_2 < \ldots < b_s.$$

Функцію $F(t)$ на кожному з інтервалів $[a_i, a_{i+1}]$, $(i = 0, 1, \ldots, s-1)$, продовжимо лінійно. Своїми значеннями $F(a_i) = b_i$, $F(a_{i+1}) = b_{i+1}$ на кінцях Інтервалу вона визначається на ньому однозначно. Для $t > a_s$ покладемо

$$F(t) = (t - a_s) + b_s.$$

В результаті дістаємо кусково-лінійну функцію, яка визначена при $t \geq 0$, є неперервною, монотонно зростаючою і F(0) = 0. Отже, це деяка функція шкали. При F-трансформації простору *(X, р)* дістанемо простір, який очевидним: чином ізометричний простору (Y, σ).

2. Простори *X* і *Y* є зліченними, і множини значень метрик у просторах є необмеженими. Нехай

$$0 = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots$$

— впорядкована за зростанням нескінченна послідовність значень метрики $\rho(x, y)$. Знову позначимо символом 6; відстань між точками $\tau(x), \tau(y)$ у просторі *Y* такими, що $\rho(x, y) = a_i, (i \in \mathrm{N})$. Дістанемо нескінченну зростаючу послідовність

$$0 = b_0 < b_1 < b_2 < \ldots .$$

Будуємо функцію $F(t)$ як кусково-лінійну, так щоб на кожному з Інтервалів $[a_i, a_{i+1}]$ вона була лінійною, причому $F(a_i) = b_i$, $F(a_{i+1}) = b_{i+1}$, для всіх $i \in \mathrm{N}$. Так побудована функція $F(t)$, $t \geq 0$, знову є неперервною, монотонно зростає І $F(0) = 0$. ї в цьому разі F-трансформація простору (X, ρ) очевидним чином ізоморфна (Y, σ).

3. Простори *X* і У" є зліченними, і множини значень метрик у просторах *X і Y є* обмеженим. У цьому випадку, оскільки спектри обох просторів є деякими зростаючими послідовностями, також впорядковуємо множину значень метрики ρ за зростанням:

$$0 = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < C.$$

Оскільки $a_n > 0$ і послідовність $\{a_n\}_{n \in \mathrm{N}}$ обмежена, то вона має границю. Нехай

$$a = \lim_{n \to \infty} a_n.$$

Як і раніше, позначимо символом b_i відстань між точками $\tau(x), \tau(y)$ в просторі У, для яких $\rho(x, y) = a_i$, $(i \in \mathrm{N})$. У цьому випадку функцію $F(t)$ визначаємо на кожному з Інтервалів $[a_i, a_{i+1}]$ як лінійну, що набуває значень $F(a_i) = b_i$, $F(a_{i+1}) = b_{i+1}$. Ця умова дає змогу визначати $F(t)$ при $0 \leq t < a$. Оскільки за умовою теореми множина значень метрики σ також обмежена, то послідовність $\{b_n\}_{n \in \mathrm{N}}$ має границю. Покладемо

$$b = \lim_{n \to \infty} b_n.$$

Доозначимо тепер функцію *F(t),* поклавши *F(a)* = = *Ь* і для *t > а F(f) — t + b — a.* Так визначена функція *F(t)* є неперервною, монотонно зростає і *F(0)* = 0. Оскільки трансформація простору *X* за допомогою *F(t)* ізометрична *Y,* все доведено.

З іншого боку, нехай тепер метричні простори (X, ρ) і (Y, σ) ізоморфні за допомогою перетворення шкали *F(t),* яка є строго монотонною функцією. Це означає, що існує ізометрія $\tau : F(X) \to Y$. Покажемо, що вона и буде Ізоморфізмом просторів (X, ρ) і (Y, σ) у розумінні категорії метричних просторів. Зрозуміло, що τ є біекцією. Пересвідчимося, що це відображення зберігає рівності й строгі нерівності відстаней між точками.

а) Нехай x, y, u, v – такі точки із *X,* що $\rho(x, y) = \rho(u, v)$. Тоді, очевидно, $F(\rho(x, y)) = F(\rho(u, v))$, звідки $\sigma(\tau(x), \tau(y)) = \sigma(\tau(u), \tau(v))$. Отже, τ зберігає рівності між парами точок.

Б) Нехай x, y, u, v -- такі точки із *X,* ще $\rho(x, y) < \rho(u, v)$. Тоді, оскільки *F(t)* є строго монотонно зростаючою, то $F(\rho(x, y)) < F(\rho(u, v))$. А тому $\sigma(\tau(x), \tau(y)) < \sigma(\tau(u), \tau(v))$ і τ зберігає строгі нерівності відстаней між парами точок. Таким чином, τ є ізоморфізмом у категорії метричних просторів, І теорему доведено.

Далі в цій статті вживатимемо термін «ізоморфізм» як у категорійному сенсі, так і в сенсі перетворень шкали, оскільки в усіх ситуаціях, які ми розглядаємо, ці поняття будуть збігатися.

Нехай метрики ρ і σ задано своїми матрицями відстаней D_ρ і D_σ. Простори (X, ρ) і (Y, σ) Ізометричні тоді І лише тоді, коли Існує така одночасна перестановка π рядків І стовпчиків матриці D_ρ, що для утвореної таким чином матриці D_ρ^π справедлива рівність

$$D_\rho^\pi = D_\sigma.$$

Аналогічним чином можемо розпізнавати також ізоморфність просторів (X, ρ) і (Y, σ) за їх матрицями відстаней.

Твердження 1. *Метричні п-точкові простори* (X, ρ) *і* (Y, σ) *з матрицями відстаней*

$$D_\rho = ||d_{ij}^{(\rho)}||_{i,j=1}^n, \quad D_\sigma = ||d_{ij}^{(\sigma)}||_{i,j=1}^n$$

будуть ізоморфні в тому і лише тому разі, коли існує така одночасна перестановка π рядків і стовпчиків матриці D_σ*, що для матриці*

$$D_\sigma^\pi = ||(d_{ij}^{(\sigma)})^\pi||_{i,j=1}^n,$$

де $(d_{ij}^{(\sigma)})^\pi = d_{\pi(i),\pi(j)}^{(\sigma)}$*, виконуються вимоги:*

а) якщо $d_{ij}^{(\rho)} < d_{kl}^{(\rho)}$*, то* $(d_{ij}^{(\sigma)})^\pi < (d_{kl}^{(\sigma)})^\pi$,

b) якщо $d_{ij}^{(\rho)} = d_{kl}^{(\rho)}$*, то* $(d_{ij}^{(\sigma)})^\pi = (d_{kl}^{(\sigma)})^\pi$, $(1 \leq i, j, k, l \leq n)$.

Доведення. Нехай простори (X,ρ) і (Y,σ) ізоморфні і $f : X \longmapsto Y$ Ізоморфізм цих просторів. Побудуємо матриці відстаней D_ρ, D_σ, що відповідають деяким упорядкуванням елементів множин *X* і *Y, і* позначимо λ біекцію *X* на *Y,* яка відповідає звичайній нумерації рядків І стовпчиків D_ρ і D_σ. Перетворення $\pi = \lambda^{-1} f$ буде, очевидно, перестановкою множини *Y* і за визначенням ізоморфізму для нього виконуються умови а) і б) твердження 1.

З іншого боку, нехай простори (X,ρ) і (Y,σ) мають матриці відстаней $D_\rho = ||d_{ij}^{(\rho)}||_{i,j=1}^n$, $D_\sigma = ||d_{ij}^{(\sigma)}||_{i,j=1}^n$, такі що Існує перестановка π одночасно стовпчиків І векторів матриці D_σ, що для D_σ^π виконано умови а), б). Оскільки рядки і стовпчики матриці D_σ відповідають елементам *Y,* то тг є деякою перестановкою елементів множини У. Природна нумерація рядків і стовпчиків D_ρ і D_σ визначає певну біекцію λ Із множини *X* на множину *Y.* Тепер легко переконатися, що відображення $f = \lambda\pi$ буде ізоморфізмом простору (X,ρ) на простір (Y,σ).

Нагадаймо, що метричний простір називається *локально скінченним,* якщо кожна куля скінченного радіуса в цьому просторі містить лише скінченне число точок.

Метричний простір назвається *І-універсальним,* якщо він містить ізоморфну копію будь-якого скінченного метричного простору.

В [5], [7] нами було запропоновано три конструкції /-універсальних метричних просторів і описано їх групи ізометрій. Одна з них будується за допомогою з'єднання метричних просторів. Конструкцію, що дає змогу будувати континуум багато /-універсальних метричних просторів з тривіальною групою ізометрій, ми також визначимо за допомогою з'єднання метричних просторів.

Нехай (X_n, ρ_n) — родина метричних просторів скінченного діаметра. Індексованих натуральними числами І таких, що $X_i \bigcap X_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Символом *а„* позначимо діаметр простору X_n. Фіксуємо нескінченну послідовність додатних дійсних чисел $c_n, n \in \mathbb{N}$, так, щоб для кожного *η є* N виконувалась нерівність

$$c_n > max\{a_1, a_2, \dots, a_{n+1}, c_{n-1}\} \tag{1}$$

(для означеності покладемо $c_0 = 0$). На множині

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$$

визначимо функцію *d(x, y)* двох змінних таким чином: нехай $\chi \in X_m$, $y \in X_n$

$$d(x,y) = \begin{cases} \rho_n(x,y), & \text{якщо } n = m, \\ c_{max\{m,n\}-1}, & \text{якщо } m \neq n. \end{cases} \tag{2}$$

Визначена таким чином функція *d(x, y) с* метрикою на множині *U.* Простір *U* називається *з'єднанням* просторів X_n, *n* € N за допомогою послідовності с„, *η* Є N і позначається символом

$$\bigsqcup_{\{c_n : n \in \mathbb{N}\}} X_n.$$

Лема 1. *[7] Якщо для будь-якого п* Є N c_n *не збігається з жодним значенням метрик просторів* X_n,*n* Є N, *то група ізометрій з'єднання* $\bigsqcup_{\{c_n : n \in \mathbb{N}\}} X_n$ *попарно неізометричних просторів є декартовым добутком груп* $IsX_n, n \in \mathbb{N}$. *З 'єднання скінченних просторів* $X_n, n \in \mathbb{N}$ *за допомогою послідовності* с„,п Є N *є локально скінченним простором тоді й тільки тоді, коли послідовність* с„, *η* Є N *необмежена.*

Нагадаємо, що простором Хемінга H_m називається простір всіх бульових векторів довжини тη, відстань між двома векторами в якому дорівнює числу їх різних координат. Як доведено нами в [6], простори Хемінга мають таку універсальну властивість.

Лема 2. *Довиїьний скінченний метричний простір можна ізоморфна занурити в простір Хемінга* H_m *при деякому т.*

Теорема 2. *Клас локально скінченних метричних просторів містить континуум багато попарно неізоморфних І-універсальних просторів із тривіальною групою ізометрій.*

Доведення. Простір Хемінга H_m можна ізометричне занурити в простір з тривіальною групою ізометрій. Це можна здійснити, наприклад, таким чином. Нехай L_k $(k = 1, 2, \dots)$ — метричний простір ланцюга (рисунок), тобто простір визначений на деякій k-елементній множині $L_k = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ з метрикою σ, що задається таким чином: для всіх $1 \leq i \leq j \leq n$ $\sigma(v_i, v_j) = j - i$. Занумеруємо певним чином всі вершини гіперкуба $H(m,2)$ і приєднаємо до вершини з номером k ланцюг L_k, ототожнюючи цю вершину з крайньою вершиною ланцюга. Отриманий граф і відповідний метричний простір позначимо $\widehat{H(m,2)}$. Очевидно. маємо

$$Is\widehat{H(m,2)} = \{\varepsilon\}.$$

А тому за лемою 1 для довільної необмеженої послідовності натуральних чисел $m_n, n \in \mathbb{N}$ і послідовності додатних дійсних нецілих чисел $c_n, n \in \mathbb{N}$, що задовольняє умові (1) для просторів Хемінга $H_{m_n}, n \in \mathbb{N}$, з'єднання

$$U = \bigsqcup_{\{c_n : n \in \mathbb{N}\}} H_{m_n}$$

має тривіальну групу Ізометрій І є локально скшченним простором. Оскільки послідовність $m_n, n \in$ є N необмежена, то для довільного скінченного метричного простору T знайдеться номер п, такий що T ізоморфне занурюється в H_{m_n}. Отже, T ізоморфне занурюється в з'єднання U, тобто U є I-універсальним простором.

Оскільки підпослідовностей $H_{m_1}, H_{m_2}, \ldots$ послідовності просторів Хемінга $H_1, H_2, \ldots$ континуум багато, то ми отримаємо континуум багато різних, попарно неізоморфних локально скінченних I -універсальних просторів із тривіальною групою ізометрій, і теорему доведено.

Рисунок.

1. *Blumental L. M.* Theory and applications of distance geometry— N. Y.: Chelsea, 1970.- 612 p.
2. *Ганюшкш А. Г, Сущанский В. И., Цвиркунов В. В.* Вычисления в группах изометрий конечных метрических пространств // Кибернетика.— 1994.- № 4.— С. 22-44.
3. *Deia M. M., Laurent M.* Geometry of cuts and metrics.™ Berlin: Springer, 1997.- 588 p.
4. *Deza M., Maehara H.* Metric transforms and euclidean embeddings // Trans, of the AMS.- 1990.– V. 317, № 2,- P. 661-671.
5. *Олійник Б. В.* Універсальність зліченних просторів Хемінга щодо ізоморфних занурень // Вісн. Київ, ун-ту Сер. фіз.-мат. науки.- 1996.......Вип. 2.~ С. 53-62.
6. *Olijnyk B. V.* Ізоіпофіїіс embeddings of finite medic spaces into Hamming spaces // Matematyclmi Smdii.— 1997.— V. 8, № 2.— P. 176-179.
7. *Олійник Б. В.* Мозаїки метричних просторів // Доп. НАН України.- 1999.- № 8.- С. 20-23.
8. *Shoenberg í. J.* Metric spaces and completely monotone functions // Arm. Math.- V. 39.- 1938- P. 811-841.
9. *Shoenberg I. J.* Metric spaces and positive defined functions // Trans, of the AMS. 1938. V. 44.- P. 522-536.

B. Olijnyk

I-UNIVERSAL METRIC SPACES WITH TRIVIAL GROUP OF ISOMETRIES

Natural conditions of equivalence of the notion of isomorphism in category sense and in sense of metric transformation for countable metric spaces are obtained. The construction that enables to build continuum pairwise non-isomorphic metric I-universal metric spaces with trivial group of isometrics is presented.