$[a, b] = c$, $[a, c] = z_2$, $[b, c] = z_1$, where $aZ(H) = \bar{a}$, $bZ(H) = \bar{b}$, $cZ(H) = [\bar{a}, \bar{b}]$. So, we may determine every such group by the relations given above. The subgroups $A = \langle a^p, b, H' \rangle$ and $\langle ab^\alpha, b^p, H' \rangle$, where $\alpha = 1, \ldots, p-1$ exhaust all maximal subgroups of 2-generated group $H = \langle a, b \rangle$. It is easy to see that every maximal subgroup of H is nonabelian and has a commutator subgroup of order p. Thus every proper subgroup of H has the commutator subgroup of order $\leq p$.

Theorem has been proved. #

1. *Miller G., Moreno H.* Non-abelian groups in which every subgroup is abelian // Trans. Amer. Soc.– 1903.– **4**.– P. 398–404.
2. *Szekeres L.* Determination of a certain families of finite metabelian groups // Trans. Amer. Soc.– 1949.– **66**.– P. 11–43.
3. *Сергейчук В. В.* Конечнопорожденные группы с коммутантом простого порядка // Укр. мат. журн.– 1978.– 30.– № 6.– С. 789–796.
4. *Hall P.* The classification of prime power groups // J. Math.– 1940.– **182**.– P. 130–141.
5. *Easterfield T.* A Classification of Groups of Order p^6 // Ph. D. Dissertation. Cambridge.– 1940.
6. *James R.* The groups of order p^6 (p – an odd prime) // Math. Comp.– 1980.– 34.– V. 150.– P. 613–637.

В. Чепулич, О. Пилявська

ГРУПИ, В ЯКИХ КОЖНА ВЛАСНА ПІДГРУПА МАЄ КОМУТАНТ ПОРЯДКУ НЕ БІЛЬШЕ ρ

Автори висловлюють подяку професору Звонимиру Янку, який запропонував дослідити p-групи G (p   3), в яких кожна власна підгрупа або абелева, або має комутант порядку p. Очевидно, що такими групами будуть абелеві групи і групи, комутант яких є циклічною групою порядкур. Групи з комутантом порядку ρ досліджено Л. Секерешем і В. Сергейчуком. Мета цієї праці - дослідження груп G, у яких кожна власна підгрупа або абелева, або має комутант порядку p, але сама група має порядок комутанта більший за p. Показано, що в цьому випадку комутант G' групи G є абелевою групою і або є циклічною групою порядку p^2*, або елементарною абелевою групою. Для груп з комутантом, порядок якого більший за p, вказано визначаючі співвідношення, а також визначено родини ізоклінності, яким належать ці групи.*

УДК 517.954:536.21

Булавацький В. М., Лаврик В. І.

ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ФІЛЬТРАЦІЙНОЇ КОНСОЛІДАЦІЇ З УРАХУВАННЯМ НАСИЧЕНОСТІ МАСИВУ СОЛЬОВИМ РОЗЧИНОМ ТА ПОВЗУЧОСТІ ҐРУНТОВОГО СКЕЛЕТА

Запропоновано чисельний метод розв'язування одновимірної нестаціонарної крайової задачі фільтраційного ущільнення ґрунтового масиву, розміщеного на непроникній основі та насиченого сольовим розчином, за умови повзучості ґрунтового скелета.

1. Вступ

Актуальність досліджень процесів фільтраційного ущільнення грунтів, насичених сольовими розчинами, зумовлена важливістю вивчення умов екологічно безпечного функціонування накопичувачів промислових стоків (зокрема шламо- та хвостосховищ [1, 2]).Часто вказані накопичувачі заповнюють відходами хімічної та гірничої промисловості, які є концентрованими сольовими розчинами. За таких умов некоректно використовувати для розрахунків процесів ущільнення в цих інженерних спорудах класичну теорію фільтраційної консолідації [1], яка базується на припущенні, що фільтрат у масиві є чистою водою. Як показано в роботах [3-5], насиченість масиву сольовим розчином суттєво впливає на розподіл надлишкових напорів у ньому, і врахування цього факту є обов'язковим для одержання адекватного прогнозу перебігу процесу ущільнення. У цій роботі одержано розв'язок одновимірної задачі фільтраційного ущільнення масиву, насиченого сольовим розчином, за умови, що скелет масиву має властивість повзучості.

Зазначимо, що без урахування властивості повзучості ґрунтового скелета вперше відповідна задача консолідації масиву, насиченого сольовим розчином, поставлена і вирішена у працях [3–5].

2. Постановка задачі. Зведення задачі до системи диференціального та інтегро-диференціального рівнянь

Будемо виходити з такого узагальнення на випадок руху сольових розчинів закону Дарсі–Герсеванова [3]:

$$U_x - \frac{n'}{m}\upsilon_x = -k\frac{\partial H}{\partial x} \pm \nu\ \frac{\partial C}{\partial x}, \qquad (1)$$

де U_x – швидкість фільтрації, υ_x – швидкість руху твердої фази, n' – пористість за наявності газу, $m = 1\Big/(1+e)$ e – коефіцієнт пористості, $k = k(C)$ – коефіцієнт фільтрації, який у загальному випадку є функцією концентрації C солей у рідкій фазі, $H = \frac{p}{\gamma}$ – надлишковий напір, p – поровий тиск, γ – об'ємна вага рідини, ν – коефіцієнт осмосу (знак «+» відповідає нормальній осмотичній фільтрації, а знак «–» – аномальній).

З урахуванням (1) та відомих припущень [1], одержуємо таке рівняння консолідації ґрунтового масиву, насиченого сольовим розчином:

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \beta(1+\bar{e})\frac{\partial p}{\partial t} = (1+\bar{e})\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial H}{\partial x} \mp \nu\frac{\partial C}{\partial x}\right), \qquad (2)$$

де β – коефіцієнт об'ємної стискуваності газу, $\bar{e}$ – середнє значення коефіцієнта пористості.

Залежність коефіцієнта пористості приймемо у вигляді [1]

$$e(t) = e(\tau_1) - \theta(\tau_1)\delta(t,\tau_1) - \int_1^t \frac{\partial\theta}{\partial\tau}\delta(t,\tau)d\tau, \qquad (3)$$

де

$$\delta(t,\tau) = a_0 + a_1[1 - \exp(-\gamma_1(t-\tau))], \qquad (4)$$

a_0 – параметр миттєвої деформації, a_1, γ_1 – параметри повзучості [1].

Підставляючи співвідношення (3) в рівняння (2), одержуємо таке інтегродиференційне рівняння для порового тиску $H(x, t)$:

$$\eta\frac{\partial H}{\partial t} + H - \gamma_1\int_0^t H(x,\tau)e^{-\gamma_1(t-\tau)}d\tau = \aleph\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial H}{\partial x} \mp \nu\frac{\partial C}{\partial x}\right) + f(t), \qquad (5)$$

де

$$\eta = \frac{a_0 + \beta(1+\bar{e})}{a_1\gamma_1},\ \aleph = \frac{1+\bar{e}}{a_1\gamma_1\gamma},\ f(t) = H_0 e^{-\gamma_1 t},\ \tau_1 = 0.$$

Рівняння для визначення концентрації солей у розчині має вигляд [4, 5]

$$n\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial C}{\partial x}\right) + k\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial C}{\partial x} \mp \nu\left(\frac{\partial C}{\partial x}\right)^2, \qquad (6)$$

де $D = D_0 + \lambda\,|U_x|$ – коефіцієнт конвективної дифузії, $U_x = -k\frac{\partial H}{\partial x} \pm \nu\frac{\partial C}{\partial x}$, n – пористість.

Система рівнянь (5), (6) складає математичну модель процесу консолідації масиву, насиченого сольовим розчином, за умови, що ґрунтовий скелет має властивість повзучості.

Одновимірна крайова задача про консолідацію масиву скінченної потужності l, розміщеного на непроникній основі, зводиться до розв'язування системи рівнянь (5), (6) за умов

$$H(0, t) = 0,\ H_x(l, t) = 0, \qquad (7)$$

$$H(x, 0) = H_0, \qquad (8)$$

$$C(0, t) = C_0,\ C_x(l, t) = 0, \qquad (9)$$

$$C(x, 0) = 0, \qquad (10)$$

де H_0, C_0 – відомі функції (надалі покладемо H_0, $C_0 = const$).

У співвідношеннях (5), (6) приймемо таку залежність коефіцієнта фільтрації глинистого гранта від концентрації сольового розчину [6]

$$k(C) = a_0 + a_1C + a_2C^2 + a_3C^3 + a_4C^4 + a_5C^5, \qquad (11)$$

де a_i $(i = \overline{1,5})$ – відомі коефіцієнти, C – обезрозмірена величина концентрації.

3. Алгоритм наближеного розв'язування задачі

Зауважимо, що шляхом нескладних перетворень можна перейти від інтегро-диференційного рівняння (5) до диференційного рівняння. При цьому збільшується порядок рівняння за змінною t і виникає необхідність у заданні додаткової початкової умови. У цій праці розглянемо методику розв'язування задачі, яка базується на безпосередньому розв'язуванні інтегро-диференційного рівняння (5) без переходу до відповідного диференційного рівняння. Введемо до розгляду безрозмірні змінні і параметри співвідношеннями

$$x' = \frac{x}{l},\ t' = \frac{t}{T},\ H' = \frac{H}{H_0},\ C' = \frac{C}{C_0},\ \tau_i' = \frac{\tau_i}{T},\ \nu' = \frac{\nu C_0}{k_0 H_0}, \qquad (12)$$

$$C_\upsilon' = \frac{C_\upsilon T}{l^2},\ u' = \frac{k_0 H_0 T}{l^2},\ D' = \infty \frac{D_0 T}{l^2},$$

де

$$\tau_1 = \frac{a_0}{a\gamma_1},\ \tau_2 = \frac{1}{\gamma_1},\ a = a_0 + a_1,$$

$$k_0, T, D_0 = const,\ c_\upsilon = \frac{(1+\bar{e})k_0}{\gamma a}.$$

Тоді крайова задача (5)–(10) у змінних (12) запишеться у вигляді (знак «штрих» над безрозмірними змінними опущено):

$$\frac{\partial H}{\partial t} + (\tau_1^{-1} - \tau_2^{-1}) \times$$
$$\times \left(H - e^{-\frac{t}{\tau_2}} - \tau_2^{-1} \int_0^t H(x,\zeta) e^{-\frac{t-\zeta}{\tau_2}} d\zeta \right) = \quad (13)$$
$$= \tau_2 \tau_1^{-1} C_\upsilon \frac{\partial}{\partial x}\left(\tilde{k} \frac{\partial H}{\partial x} \mp \nu \frac{\partial C}{\partial x} \right),$$

$$n\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial}{\partial x}\left(\tilde{D} \frac{\partial C}{\partial x} \right) +$$
$$+ u\tilde{k} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial x} \mp \nu \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right)^2 \quad (14)$$

$$H(0, t) = 0,\ H_x(1, t) = 0, \quad (15)$$
$$H(x, 0) = 1, \quad (16)$$
$$C(0, t) = 1,\ C_x(1, t) = 0, \quad (17)$$
$$C(x, 0) = 0, \quad (18)$$

де

$$\bar{k} = \frac{k}{k_0},\ \tilde{D} = \frac{D}{D_0} = 1 + \lambda' \left| -\tilde{k} u \frac{\partial H}{\partial x} \pm \nu \frac{\partial C}{\partial x} \right|,$$
$$\lambda' = \lambda l / (D_0 T).$$

Чисельний розв'язок крайової задачі (13)–(18) одержимо так. Уведемо до розгляду сіткову область $\omega_{h\tau}$ з кроками h і τ відповідно за геометричною змінною і за часом.

Рівнянню (14) поставимо у відповідність скінченнорізницеву схему.

$$nC_t = D(d\hat{C}_{\bar{x}})_x + uH_x \hat{C}_x + \nu C_x^2, \quad (19)$$

де введено позначення роботи [7] і величина d означає півсуму значень $\tilde{D}$ у двох сусідніх вузлах сітки.

Апроксимуючи інтеграл у (13) за допомогою формули трапецій, рівнянню (13) поставимо у відповідність таку скінченнорізницеву схему:

$$H_t - C_\upsilon \alpha (a\hat{H}_{\bar{x}})_x = \alpha \nu C_\upsilon \hat{C}_{\bar{x}x} -$$
$$-\left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2} \right) \left[\left(1 - \frac{1}{2\tau_2} \right) \hat{H} - e^{-t/\tau_2} \left(1 + \frac{t}{2\tau_2} \right) \right], \quad (20)$$

де

$$\alpha = \tau_2 / \tau_1.$$

З (19), (20) одержуємо, зводячи подібні члени:

$$S_i^j \ C_{i-1}^{j+1} - B_i^j \ C_i^{j+1} + A_i^j \ C_{i+1}^{j+1} = \Phi_i^j, \quad (21)$$

$$B_{1_i}^j \ H_{i-1}^{j+1} - A_{1_i}^j \ H_i^{j+1} + B_{2_i}^j \ H_{i+1}^{j+1} = \Phi_{1_i}^{j+1}, \quad (22)$$

де позначено

$$S_i^j = \frac{Dd_i^j}{h^2},$$

$$A_i^j = \frac{1}{h^2}\left[Dd_{i+1}^j + u_i^j (H_{i+1}^j - H_i^j) \right],$$

$$B_i^j = \frac{n}{\tau} + A_i^j + S_i^j,\ B_{2_i}^j = \frac{\alpha C_\upsilon}{h^2} a_{i+1}^j,$$

$$\Phi_i^j = -\frac{n}{\tau} C_i^j - \frac{\nu}{h^2}(C_{i+1}^j - C_i^j)^2,\ B_{1_i}^j = \frac{\alpha C_\upsilon}{h^2} a_i^j,$$

$$A_{1_i}^j = \frac{1}{\tau} + \frac{\alpha C_\upsilon}{h^2}(a_i^j + a_{i+1}^j) + \left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2} \right)\left(1 - \frac{t_{j+1}}{2\tau_2} \right),$$

$$\Phi_{1_i}^j = -\frac{\alpha \nu C_\upsilon}{h^2}(C_{i+1}^{j+1} - 2C_i^{j+1} + C_{i-1}^{j+1}) -$$
$$-\left(\frac{1}{\tau_1} - \frac{1}{\tau_2} \right)\left(1 + \frac{t_{j+1}}{2\tau_2} \right) \cdot e^{-\frac{t_{j+1}}{\tau_2}} - \frac{1}{\tau} H_i^j.$$

Крайові умови враховуються очевидним чином. Алгоритм обчислення полягає в такому: спочатку обчислюється на даному шарі за часом значення концентрації солей C згідно з (21), а потім на цьому шарі обчислюється значення надлишкового напору згідно з (22). Різницеві рівняння системи (21), (22) є триточковими і ефективно розв'язуються методом прогонки [7].

4. Результати чисельної реалізації. Висновок

Чисельна реалізація викладеного вище алгоритму розв'язування задачі, виконана для вхідних даних, наведених у [4], показала його ефективність. Залежність коефіцієнта фільтрації від концентрації використана в розрахунках у вигляді (11). Результати розрахунків дозволяють, зокрема, зробити висновок про значний вплив урахування залежності $k = k(C)$ на характер поведінки надлишкових напорів у масиві, оскільки характер поведінки кривих напорів змінюється принципово: замість розсіювання надлишкових напорів у випадку $k = const$ маємо їх стабільне збільшення і перехід ґрунту у стан бубнявіння при $k = k(C)$ в разі аномальної осмотичної фільтрації. У разі нормальної осмотичної фільтрації картина змінюється на прямо протилежну, і ґрунт переходить у стан переущільнення.

1. *Флорин В. А.* Основы механики грунтов.– М.: Госстройиздат, 1961.– Т. 2.– 544 с.
2. *Булавацкий В. М.* Специальные краевые задачи подземной гидродинамики.– К.: Наук. думка, 1993.– 132 с.
3. *Власюк А. П., Жеребятьев О. В.* Фільтраційна консолідація глинистих ґрунтів при наявності масопереносу солей // Вісник Укр. держ. акад. водн. госп-ва.– Рівне, 1998.– Вип. 1.– Ч. 1.– С. 40–45.
4. *Власюк А. П., Мартинюк П. М.* Чисельне розв'язування задачі фільтраційної консолідації тіла ґрунтової греблі з урахуванням масопереносу солей // Вісник Київськ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. наук.– 2000.– Вип. 2.– С. 197–200.
5. *Мартинюк П. М.* Математичне моделювання фільтраційної консолідації ґрунтів з урахуванням переносу солей: Автореферат дис. ...канд. фіз.-мат. наук / АН України. Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова.– К., 2002.– 20 с.
6. *Власюк А. П., Кузло М. Т.* Експериментальні дослідження деяких параметрів фільтрації сольових розчинів у піщаних ґрунтах // Меліорація та водне господарство: міжвідомчий тематичн. наук. зб.– К.: Аграрна наука, 2000.– Вип. 87.– С. 43–46.
7. *Самарский А. А.* Теория разностных схем.– М.: Наука, 1983.– 616 с.

V. Bulavatskyi, V. Lavryk

NUMERICAL SOLUTION OF BOUNDARY - VALUE PROBLEM OF THE THEORY OF FILTRATIONAL CONSOLIDATION WITH ALLOWANCE SATURATION OF A MASSIF BY A SALINE SOLUTION AND CREEP OF A GROUND ATOMY

The numerical method of the solution of onedimensional non-steady boundary value problem of filtrational seal of a ground massif arranged on the opaque basis and saturated saline solution under condition of a creep of a ground atomy is offered.

УДК 517.927.6

Захарійченко Ю. О.

ОДИН МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ ІМПУЛЬСНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

У статті розглядається крайова задача для системи диференціальних рівнянь з імпульсним впливом у фіксовані моменти часу Розроблено новий підхід до дослідження такого класу задач, згідно з яким початкову задачу зведено до відповідної системи інтегральних рівнянь.

Дослідження та аналіз теорії диференціальних рівнянь з імпульсним впливом останнім часом інтенсивно зростає. У статті [1] наведено загальну характеристику імпульсних систем диференціальних рівнянь, досліджено лінійні, а також ряд нелінійних імпульсних систем. Нижче розглядається клас таких систем, про розв'язки яких відома додаткова інформація. В статті розглядається метод дослідження систем диференціальних рівнянь з імпульсним впливом та додатковими умовами, розроблений у праці [2].

1. Постановка задачі. Розглянемо крайову задачу

$$\frac{dx}{dt} + A(t)x = f(t), \qquad (1)$$

$$x(t_i + 0) = S_i x(t_i - 0) + \gamma_i, \quad i = \overline{1, l}, \qquad (2)$$

$$\Phi_s(x) = \alpha_s, \quad s = \overline{1, \nu}, \quad \nu > m, \qquad (3)$$

в якій $A(t)$ – неперервна при $t \in I$, де $I = [0;T]$, матриця розміру $m \times m$, $f: I \to R^m$, S_i – сталі матриці розмірності $m \times m$, вектори $\gamma_i \in R^m$, Φ_s – лінійні неперервні функціонали, t_i – фіксовані моменти імпульсного впливу, $\alpha_s \in R$, $s = \overline{1, \nu}$.

Ставиться задача знайти таку вектор-функцію $x(t)$, щоб задовольнялась система диференціальних рівнянь (1) при $t \in I \setminus \{t_i\}$, справджувались імпульсні умови (2) та обмеження (3).

Якщо така вектор-функція $x(t)$ існує, то задачу, що розглядається, вважатимемо сумісною. Інакше задача несумісна.