УДК 512.54

Боднарчук Ю. В., Морозов Д. І.

БУДОВА ЦЕНТРАЛІЗАТОРІВ ЕЛЕМЕНТІВ МАКСИМАЛЬНОГО ПРО-ПОРЯДКУ В ГРУШ АВТОМОРФІЗМІВ БІНАРНОГО ДЕРЕВА

Проективна границя ітерованих вінцевих добутків циклічних груп другого порядку є повною топологічною групою, якщо її розглядати як метричний простір Бера. Показано, що централізатор довільного елемента w, канонічні епіморфні образи якого на скінченні ітеровані вінцеві добутки мають максимально можливі порядки,— це континуальна група (w), яка є замиканням відповідної циклічної групи.

Об'єктом дослідження цієї праці є група $\overline{W}_\infty(F_2)$, яка є проективною границею вінцевих добутків циклічних груп другого порядку.

Нехай $W_1 = F_2^+$ циклічна група другого порядку, тоді можна індуктивно визначити групи $W_{n+1} = (W_n, F_2^{(n)}) \wr F_2^+$, як вінцевий добуток групи підстановок W_n, що діє на $F_2^{(n)} = F_2 \times \ldots \times F_2$ (активний співмножник) та циклічної групи другого порядку. База вінцевого добутку складається з усіх бульових функцій $F_2^{(n)} \to F_2$ від n змінних і є ядром природного епіморфізму $\pi_n : W_{n+1} \to W_n$. Ці гомоморфізми визначають $\overline{W}_\infty(F_2)$ як проективну границю $\overline{W}_\infty(F_2) = \underline{\lim} W_n$, а також гомоморфізми $\hat{\pi}_n : \overline{W} \to W_n$. При цьому група $\overline{W}_\infty$ діє природним чином на множині 2^N двійкових послідовностей, яка є прикладом метричного простору Бера. Для довільного числа $0 < \eta < 1$ і двох послідовностей $\bar{x} = (x_n)$, $\bar{y} = (y_n) \in 2^N$ відстань між ними визначається як $\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \eta^t$, де t — довжина спільного початку для $\bar{x}$, $\bar{y}$ (у цій ситуації зручно користуватися $\eta = 1/2$). Групу ізометрій цього простору позначимо через $\mathrm{Is}(2^N)$.

З іншого боку, можна розглянути нескінченне дерево T_2, яке визначається так:

а) v_0 — корінь або вершина нульового рівня;
б) для кожного $i = 0, 1, 2, \ldots$ дерево містить 2^i вершин та ребер i-го рівня;
в) кожна вершина i-го рівня суміжна з двома вершинами (лівою та правою) $(i+1)$-го рівня.

Зауважимо, що вказані пари не містять спільних вершин, бо інакше існував би цикл. Координатизуємо вершини дерева за допомогою бульових векторів:

$i)$ ребра, інцидентні вершині, отримають мітки 0 — ліве, і 1 — праве;
$ii)$ для отримання бульового вектора, який є набором координат вершини v, випишемо зліва направо мітки ребер, які треба пройти на шляху від v_0 до v.

© *Боднарчук Ю. В., Морозов Д. І., 2005*

Тепер елементи групи $\overline{W}_\infty$ можна зображати нескінченними послідовностями бульових функцій:

$$g = \langle \sigma_1, \sigma_2(x_1), \sigma_3(x_1, x_2), \ldots \\ \ldots, \sigma_k(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}), \ldots \rangle, \quad (1)$$

де $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ — координати вершини $(k-1)$-го рівня, а значенням функції σ_k є одиниця, якщо відповідний автоморфізм дерева переставляє дві суміжні вершини k-го рівня (див. вище п. в)), і є нуль, якщо автоморфізм залишає ці вершини нерухомими. Добре відомим фактом (див. [1], [2]) є така теорема:

Теорема 1. $\overline{W}_\infty \cong \mathrm{Is}(2^N) \cong \mathrm{Aut}\, T_2$.

Враховуючи зображення (1), саму групу $\overline{W}_\infty$ також можна розглядати як простір Бера:

$$\rho(g_1, g_2) = 2^{-k}, \\ \text{де } k = \max\{m \mid \hat{\pi}_m(g_1) = \hat{\pi}_m(g_2)\}.$$

Метрика ρ визначає топологію і має місце.

Теорема 2. $\overline{W}_\infty$ *є повною топологічною групою.*

Доведення. Покажемо, що відображення

$$\overline{W}_\infty \times \overline{W}_\infty \to \overline{W}_\infty \quad (g_1, g_2) \to g_1 \cdot g_2^{-1}$$

є неперервним у цій топології. Нехай $q_0 = g_1 \cdot g_2^{-1}$ і $B_m(q_0) = \{g \mid \rho(g, q_0) < 2^{-(m+1)}\}$ — відкрита куля з центром в q_0. Легко бачити, що $\forall g_1, g_2 \in B_m(q_0)$ має місце $\hat{\pi}_m(g_1)$, $\hat{\pi}_m(g_2)$. Розглянемо довільні елементи куль $b_1 \in B_m(g_1)$, $b_2 \in B_m(g_2)$. Для цих елементів матиме місце $\hat{\pi}_m(b_1) = \hat{\pi}_m(g_1)$, $\hat{\pi}_m(b_2) = \hat{\pi}_m(g_2)$, звідки

$$\hat{\pi}_m(b_1 \cdot b_2^{-1}) = \hat{\pi}_m(b_1) \cdot \hat{\pi}_m(b_2)^{-1} = \\ = \hat{\pi}_m(g_1) \cdot \hat{\pi}_m(g_2)^{-1} = \hat{\pi}_m(g_1 \cdot g_2^{-1}),$$

отже, $b_1 \cdot b_2^{-1} \in B_m(q_0)$. Це доводить, що $\overline{W}_\infty$ є топологічною групою. Для доведення повноти слід зауважити, що $\overline{W}_\infty$ є компактом у вищезгаданій топології, оскільки є замкненим у добутку дискретних просторів $\hat{\pi}_m(\overline{W}_\infty)$, $m \in \mathbb{N}$.

Із використанням цієї топології зручно давати опис централізаторів та нормалізаторів підгруп $\overline{W}_\infty$. У цій праці ми розглянемо будову централізаторів елементів максимального про-порядку.

Означення 1. *Елемент $w \in \overline{W}_\infty$ називається елементом максимального про-порядку, якщо для довільного n має місце $|\hat{\pi}_n(w)| = 2^n$.*

Тобто для довільного n проекція $\hat{\pi}_n$ такого елемента на W_n повинна мати максимально можливий порядок у цій групі — 2^n.

Зауваження. Якщо g — довільний елемент максимального порядку з W_n, то

$$g^{2^{n-1}} = z = \langle 0, 0, \ldots, 0, 1 \rangle.$$

Справді, якщо $g = \bar{g} \cdot f$, $\bar{g} \in W_{n-1}$, $f \in F_2^{(n)}$, то

$$g^{2^{n-1}} = \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} f(g^j(x)).$$

Оскільки для довільного x при $j = 0, 1, 2, \ldots, 2^{n-1}$ значення $g^j(x)$ пробігають множину координат усіх вершин n-го рівня, то права частина рівності є константою, яка є сумою всіх значень функції f, причому, оскільки g — максимального порядку, то вона не дорівнює 0, тобто $g^{2^{n-1}} = z$.

Як приклад такого елемента можна навести такий автоморфізм дерева:

$$\langle 1, x_1, x_1x_2, x_1x_2x_3, \ldots \rangle.$$

Неважко переконатися, що всі елементи максимального про-порядку спряжені між собою, тобто спряжені з вищенаведеним елементом. Виявляється, що циклічна група, породжена елементом максимального порядку в W_n, збігається з нейтралізатором цього елемента.

Лема 1. *Нехай $g \in W_n$ і $|g| = 2^n$, тоді має місце $C_{W_n}(g) = (g)$.*

Доведення. Включення $(g) \subseteq C_{W_n}(g)$ очевидне. Доведемо зворотне включення $C_{W_n}(g) \subseteq (g)$ індукцією по n. База індукції $n = 1$, коли W_1 — скінченна група другого порядку, є очевидною. Припустимо, що твердження доведено для груп W_k, $k < n$. Нехай $q \in C_{W_n}(g)$. Оскільки маємо напівпрямий добуток $W_n = W_{n-1} \ltimes F_2^{(n)}$, то $g = g_1 \cdot f$, $q = q_1 \cdot \phi$, $g_1, q_1 \in W_{n-1}$, $f, \phi \in F_2^{(n)}$. За припущенням індукції існує m: $q_1 = g_1^m$. Тоді умова $q \cdot g = g \cdot q$ в проекції на базу $F_2^{(n)}$ дасть нам рівність

$$\phi^{g_1} + f = f^{g_1^{m+1}} + \phi,$$

звідки

$$\phi^{g_1} + \phi = f^{g_1^{m+1}} + f. \tag{2}$$

Розглянемо цю рівність як рівняння відносно невідомої бульової функції ϕ. Оскільки $|g| = 2^n$, то для довільного значення $\phi(0, \ldots, 0)$ рекурентна рівність

$$\phi(g_1^{k+1}(0)) = \phi(g_1^k(0)) + f^{g_1^{m+1}}(g_1^k(0)) + f(g_1^k(0)) \tag{3}$$

визначає функцію ϕ однозначно. Коректність означення, тобто рівність $\phi(g_1^{2^{n-1}}(0)) = \phi(0)$, випливає з тотожності

$$\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} f^{g_1^{m+1}}(g_1^k(0)) + f(g_1^k(0)) = 0,$$

яка матиме місце, бо в цій сумі значення функції в кожній точці входить двічі. Отже, маємо точно два розв'язки рівняння (2), які відповідають двом можливим значенням $\phi(0)$. З іншого боку, оскільки

$$g^m = (g_1 f)^m \in C_{W_n}(g),$$

то проекція на базу цього елемента, яка має вигляд

$$\sum_{j=0}^{m-1} f^{g_1^j}(x),$$

буде розв'язком цього рівняння. Інший розв'язок ми отримаємо, якщо розглянемо проекцію на базу елемента $g^{m+2^{n-1}}$. Відповідно до вищенаведеного зауваження

$$g^{m+2^{n-1}} = g^m \cdot z.$$

Оскільки в обох випадках маємо елементи, що є степенями g, то лему доведено.

Тепер перейдемо до централізаторів елементів максимального про-порядку в групі $\overline{W}_\infty$.

Теорема 3. *Нехай w — довільний елемент максимального про-порядку і $D(w) = \{w^k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ — циклічна група, породжена цим елементом; тоді $C_{\overline{W}_\infty}(w) = \overline{D(w)}$, де риска означає замикання у вищезгаданій топології.*

Доведення. Очевидно, що $D(w) \subseteq C_{\overline{W}_\infty}(w)$. Оскільки централізатор елемента в топологічній групі є замкненою підгрупою, то $\overline{D(w)} \subseteq C_{\overline{W}_\infty}(w)$. Протилежне включення також має місце. Нехай $q \in C_{\overline{W}_\infty}(w)$, тоді за лемою 1 для довільного s існує m таке, що $\hat{\pi}_s(q) = w^m$ або $\hat{\pi}_s(q) = w^{m+\alpha_{s-1}2^{s-1}}$, де α_{s-1} набуває значень або 0, або 1. Таким чином, використавши двійковий розклад, будемо мати такий вигляд проекції:

$$\hat{\pi}_s(q) = w^{\sum_{i=0}^{s-1}\alpha_i 2^i}$$

і таку послідовність елементів групи $\overline{W}_\infty$:

$$w^{\alpha_0},\ w^{\alpha_0+\alpha_1 2},\ w^{\alpha_0+\alpha_1 2+\alpha_2 2^2},\ \dots,$$

яка очевидно збігається до елемента q. Оскільки елементи послідовності належать до $D(w)$, то $q \in \overline{D(w)}$, що й доводить твердження.

Для довільних $g \in \overline{W}_\infty$ і 2-адичного числа $x \in Z_2$ визначимо функцію $g^x : \overline{W}_\infty \times Z_2 \to \overline{W}_\infty$ так:

$$g^x = \lim_{s\to+\infty} \pi_s(g)^{\lambda_s(x)}, \tag{4}$$

де $\lambda_s : Z_2 \to \mathbb{Z}/2^s\mathbb{Z}$ — канонічний епіморфізм на кільце лишків. Коректність означення випливає з того, що послідовність $\pi_s(g)^{\lambda_s(x)}$, $s = 1, 2, \dots$ є фундаментальною і, згідно з теоремою 2, збігається в $\overline{W}_\infty$.

Теорема 4. *Функція* $g^x : \overline{W}_\infty \times Z_p \to \overline{W}_\infty$ *є неперервною за обома аргументами.*

Доведення. Візьмемо автоморфізм v з околу $B_k(g^x)$, тобто $\pi_k(g^x) = \pi_k(v)$. Оскільки $\pi_k(g^x) = \pi_k(g)^{\lambda_k(x)} = \pi_k(v)$, то для 2-адичного числа z з околу $U_k(x)$ в топології, індукованій 2-адичною метрикою, та для автоморфізму h з околу $B(g, 2^k)$ виконуються рівності $\lambda_k(z) = \lambda_k(x)$, $\pi_k(h) = \pi_k(g)$:

$$\pi_k(h^z) = \pi_k(h)^{\lambda_k(z)} = \pi_k(g)^{\lambda_k(x)} = \pi_k(g^x).$$

Звідси $h^z \in B_k(g^x)$, тобто відображення $g^x : \overline{W}_\infty \times \mathbb{Z}_2 \to \overline{W}_\infty$ є неперервним.

Наслідок 1. *Нехай g — довільний елемент максимального про-порядку, x_1, x_2 — 2-адичні числа. Тоді*

$$(g^{x_1})^{x_2} = g^{x_1 \cdot x_2},$$
$$g^{x_1} \cdot g^{x_2} = g^{x_1 + x_2}.$$

Зокрема, маємо $g^0 = e$, $g^{\dots 111} = g^{-1}$, де e — нейтральний елемент групи, 0 — це нуль кільця 2-адичних чисел, $\dots 111$ — цифровий запис 2-адичного числа $\sum_{i=0}^{+\infty} 2^i$, яке є протилежним до числа 1, тобто його можна ототожнити з -1.

1. *Сущанский В. И.* Группы изометрий пространства Бэра. Докл. АН УССР.– 1984.– № 8.– С. 28–30.

2. *Сущанский В. И.* Сплетения по последовательности групп подстановок и финитно-апроксимируемые группы. Докл. АН СССР.– 1984.– № 2.– С. 19–22.

Yu. Bodnarchuk, D. Morozov

THE STRUCTURE OF MAXIMAL PRE-ORDER ELEMENTS CENTRALIZERS IN THE BINARY TREE AUTOMORPHISM GROUP

A projective limit of iterated wreath products of cyclic groups of the second order is a complete topological group if it is considered as a Baire metric space. It is shown, that a centraizer of an arbitrary element w, which canonical epimorphic images on finite iterated wreath products have maximal possible orders, is a continuum group (w), which is a closure of the correspondent cyclic group.