

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОЦІНКА ВПЛИВУ ПЛОЩІ ВОДОЗБОРУ НА КИСНЕВИЙ РЕЖИМ ВОДНИХ ЕКОСИСТЕМ В УМОВАХ ЇХ ЕВТРОФІКАЦІЇ

Вивчено динаміку розчиненого кисню водного об'єкта за допомогою математичної моделі, яка враховує процеси водообміну, трансформації органічних речовин та евтрофікації водного середовища. В результаті імітаційного моделювання представлено рекомендації щодо регулювання якості води водного об'єкта.

Актуальність. Постановка завдання

Концентрація розчиненого кисню (РК) у воді є одним з основних показників якості води і стану водних екосистем. Кисень відіграє велику роль не тільки в підтримці існуючих форм життя в різних водних об'єктах, але й у процесах трансформації речовин, що потрапляють в поверхневі води зі стічними водами урбанізованих та промислових територій, а також зі стоками сільськогосподарських та тваринницьких комплексів, розташованих на площі водозбору. Зменшення концентрації кисню у водних об'єктах призводить до багатьох негативних наслідків, зокрема: збільшення анаеробних зон, частоти та тривалості заморних явищ; відставання деструкційних процесів від продукційних, що супроводжується накопиченням у воді органічних речовин; порушення нормального біотичного кругообігу речовин, що призводить до деградації водних екосистем, а також до значного погіршення якості води [1, 3, 4].

Істотно впливає на формування кисневого режиму процес антропогенної евтрофікації водойм. Людина, яка господарює в басейні водного об'єкта, збагачує його мінеральними солями і органічною субстанцією. Це спричиняє зростання маси фітопланктону (основна ознака евтрофікації). На заключному етапі вегетації, коли відбувається масове відмирання водоростів органічної речовини, утворюється більше, ніж її можуть розкласти мікроорганізми, які споживають значну кількість розчиненого кисню [2-5]. А для водної екосистеми є важливою саме рівновага між продукцією органічної субстанції і руйнівною активністю мікроорганізмів.

Трансформація (розклад) розчинених у воді органічних речовин значно знижує концентрацію РК. У сучасних водних об'єктах міститься значна кількість розчинених органічних речовин (білків, амінокислот, гумінових кислот, вуглеводнів, вітамінів та ін.), які потрапляють у воду після розкладу відмерлих організмів, а також

надходять у водойми з площі водозбору. Спроби вплинути на процес зниження евтрофікації в самих водоймищах не дали позитивних результатів. Тому найближчим часом необхідно перейти до управління потоками як органічної речовини, так і біогенних елементів на площі водозбору та нормування їх надходження до водних об'єктів. Цілком очевидно, що такі завдання можна розв'язати тільки за допомогою методів математичного моделювання.

Питання моделювання динаміки РК та різних органічних речовин, зокрема тих, які визначаються за допомогою таких показників, як БСК (біологічне споживання кисню), ПО (перманганати окислюваність), БО (біхроматна окислюваність) вивчало багато дослідників [6-8]. Проте в цих моделях приділено недостатньо уваги взаємодії між окремими показниками якості води водного об'єкта і поверхневого стоку. У цій роботі здійснено спробу побудувати модель, яка б враховувала зазначені недоліки. Для побудови адекватної математичної моделі формування кисневого режиму водного об'єкта були враховані всі ті внутрішньоводоймні процеси, які найбільш істотно впливають на концентрацію РК у водоймищах, а також процеси, які формують кисневий режим поверхневого стоку на площі водозбору.

Побудова математичної моделі з урахуванням процесів водообміну, розбавлення і трансформації забруднень в умовах евтрофікації водного об'єкта

Для побудови моделі з потрібними якостями, виділимо основні процеси, які формують складові компоненти водної екосистеми. Основну масу органічної речовини утворює фітопланктон у процесі фотосинтезу, тому баланс органіки зумовлений масою фітопланктона та додатково - потоком алохтонних речовин [6-9, 11, 12]. Баланс РК - це зовнішній потік кисню завдяки обміну з атмосферою та стоками; внутрішньоводоймний потік - утворення кисню завдяки фітопланктону. Еволюцію фітопланктона описуємо емпіричними рівняннями [8]. Концентрація розчиненого кисню та маса фітопланктона є критеріями рівня евтрофікації водойми. Тому в рамках описаної моделі вивчимо динаміку кисневого режиму залежно від характеристик поверхневого стоку (статистичних параметрів) з урахуванням трофності водойми (динамічні параметри), оскільки спроби вплинути на процес зниження евтрофікації у самих водоймищах не дали позитивних результатів [2-5, 10]. На основі вказаних припущень сезонну динаміку РК- БПК і біомасу фітопланктона (ФП) будемо описувати через відповідні концентрації за допомогою таких диференціальних рівнянь:

$$\frac{dC_{БПК}}{dt} = \frac{Q_{БПК}}{W} + R_{БПК} - k_1 C_{БПК} - \frac{q}{W} C_{БПК}, \quad (1)$$

$$\frac{dC_{РК}}{dt} = \frac{Q_{РК}}{W} + k_2 (C_{РК}^* - C_{РК}) + A_{БПК} - k_1 C_{БПК} - \frac{q}{W} C_{РК}, \quad (2)$$

$$\frac{dC_{ФП}}{dt} = P_{ФП}^{\max} \frac{C_{\phi}}{K_{\mu} + C_{\phi}} K_T K_I C_{ФП} - m C_{ФП}. \quad (3)$$

де: W [м³] – об'єм водного об'єкта (озера, водозховища); $C_{БПК}$ [г/м³], $C_{РК}$ [г/м³] – концентрації БПК та РК у водному об'єкті; q [м³/добу] – вихідний потік; $Q_{БПК}$, $Q_{РК}$ [г/добу] – швидкості надходження з площі водозбору органічних речовин та розчиненого кисню; k_1 [1/добу] – коефіцієнт швидкості деструкції (мінералізації) органічних речовин; $C_{РК}^*$ [г/м³] – концентрація розчиненого кисню при його насиченні; k_2 [1/добу] – коефіцієнт аерації; $C_{ФП}$ [г/м³] – концентрація фітопланктону; m [1/добу] – коефіцієнт смертності фітопланктону; $R_{БПК} = m_1 C_{ФП}$ – швидкість надходження (утворення) органічної речовини при деструкції фітопланктону; $m_1 = \gamma m$, $0 < \gamma < 1$ – частка відмерлого фітопланктону, який додає органіки водному об'єкту; $A_{РК} = a C_{ФП}$ [г/м³добу] – швидкість надходження кисню при фотосинтезі; $P_{ФП}^{\max}$ [1/добу] – максимальна продукція фітопланктону; C_{ϕ} [г/м³] – концентрація розчиненого у воді фосфору; $K_T K_I$ – температурна функція та функція освітленості відповідно, які можна задати явною залежністю як періодичні функції часу.

Введемо позначення:

$$r(t) = P_{ФП}^{\max} \frac{C_{\phi}}{K_{\mu} + C_{\phi}} K_T K_I - m. \quad (4)$$

Тоді рівняння (3) і початкова умова будуть виглядати так:

$$\frac{dC_{ФП}}{dt} = r(t)C_{ФП}, \quad C_{ФП}(0) = C_{ФП}^0. \quad (5)$$

Розв'язок диференціального рівняння (5) із відокремленими змінними з урахуванням початкових умов матиме вигляд

$$C_{ФП}(t) = C_{ФП}^0 e^{\int_0^t r(t) dt}. \quad (6)$$

З урахуванням частки органіки відмерлого фітопланктону та з огляду на те, що $\bar{Q}_{БПК} = \frac{Q_{БПК}}{W}$,

$\bar{k}_1 = k_1 + \frac{q}{W}$, рівняння (1) набуде такого вигляду

$$\frac{dC_{БПК}}{dt} = -\bar{k}_1 C_{БПК} + \bar{Q}_{БПК} + m_1 C_{ФП}(t). \quad (7)$$

Розв'язок рівняння (7) буде таким:

$$C_{\text{БПК}}(t) = \frac{\bar{Q}_{\text{БПК}}}{k_1} - m_1 e^{-\bar{k}_1 t} \int_0^t e^{\bar{k}_1 t} C_{\text{ФП}}(t) dt, \quad (8)$$

де $C_{\text{ФП}}(t)$ визначається формулою (6).

Підставивши вирази (6) і (8) в (2), одержимо рівняння, розв'язок якого запишемо так:

$$C_{\text{РК}}(t) = \frac{\bar{Q}_{\text{РК}} + k_2 C_{\text{РК}}^*}{k_2} + e^{-\bar{k}_2 t} \int_0^t (a C_{\text{ФП}}(t) - k_1 C_{\text{БПК}}(t)) e^{\bar{k}_2 t} dt. \quad (9)$$

Упродовж невеликого проміжку часу можна вважати, що концентрація фосфору не змінюється ($C_{\text{Ф}} = \text{const}$). Прийmemo, що $K_{\mu} K_1 = 1 = \text{const}$, тоді $r(t)$ можемо вважати сталою величиною. У цьому випадку одержимо:

$$r = P_{\text{ФП}}^{\text{max}} \frac{C_{\text{Ф}}}{K_{\mu} + C_{\text{Ф}}} - m = \text{const}. \quad (10)$$

Підставивши розв'язок рівняння (3) $C_{\text{ФП}}(t) = C_{\text{ФП}}^0 e^{rt}$ в (8) та врахувавши початкову умову $C_{\text{БПК}}(0) = C_{\text{БПК}}^0$ знайдемо концентрацію БПК:

$$C_{\text{БПК}}(t) = \frac{1}{k_1} \bar{Q}_{\text{БПК}} + \frac{m_1}{r + k_1} C_{\text{ФП}}^0 e^{rt} + \left(C_{\text{БПК}}^0 - \frac{1}{k_1} \bar{Q}_{\text{БПК}} - \frac{m_1}{r + k_1} C_{\text{ФП}}^0 \right) e^{-\bar{k}_1 t}. \quad (11)$$

Підставивши (10), (11) в (9), запишемо рівняння концентрації розчиненого кисню залежно від часу:

$$C_{\text{РК}}(t) = \frac{1}{k_2} \left(\bar{Q}_{\text{РК}} + k_2 C_{\text{РК}}^* - \frac{k_1}{k_1} \bar{Q}_{\text{БПК}} \right) + \frac{1}{r + k_2} C_{\text{ФП}}^0 \left(\alpha - \frac{m_1 k_1}{r + k_1} \right) e^{rt} + \frac{k_1}{k_1 - k_2} \left(C_{\text{БПК}}^0 - \frac{1}{k_1} \bar{Q}_{\text{БПК}} - \frac{m_1}{r + k_1} C_{\text{ФП}}^0 \right) e^{-\bar{k}_1 t} + \left(C_{\text{РК}}^0 - \frac{1}{k_2} \left(\bar{Q}_{\text{РК}} + k_2 C_{\text{РК}}^* - \frac{k_1}{k_1} \bar{Q}_{\text{БПК}} \right) - \frac{1}{r + k_2} C_{\text{ФП}}^0 \left(\alpha - \frac{m_1 k_1}{r + k_1} \right) - \frac{k_1}{k_1 - k_2} \left(C_{\text{БПК}}^0 - \frac{1}{k_1} \bar{Q}_{\text{БПК}} - \frac{m_1}{r + k_1} C_{\text{ФП}}^0 \right) \right) e^{-\bar{k}_2 t}. \quad (12)$$

Проведення імітаційного експерименту

Динаміка популяції фітопланктону може істотно впливати на основні показники якості води водних екосистем.

Аналіз сценаріїв, побудованих на основі моделі (14), дає змогу встановити деякі закономірності впливу рівня евтрофікації та площі водозбору на кисневий режим водойми.

Сценарій 1. Динаміка концентрації розчиненого кисню в замкненій водоймі залежно від зміни об'єму при фіксованому значенні концентрації біогенних елементів та заданому законі розмноження популяції фітопланктону. Додатково встановимо тенденції критичних значень концентрації розчиненого кисню при варіації швидкості розмноження популяції фітопланктону.

Зафіксуємо значення параметрів $\bar{Q}_{\text{БПК}} = 840$ г/добу; $\bar{Q}_{\text{РК}} = 332$ г/добу; $C_{\text{БПК}}^0 = 14$ [г/м³];

$C_{\text{РК}}^0 = 5,53$ г/м³; $k_1 = 0,99$ 1/добу; $C_{\text{РК}}^* = 9,21$ г/м³; $k_2 = 0,5$ 1/добу; $C_{\text{ФП}}^0 = 3$ г/м³; $m = 2$ 1/добу; $m_1 = 0,2$ т; $a = 0,05$ 1/добу; $P_{\text{ФП}}^{\text{max}} = 2,5$ 1/добу; $C_{\text{Ф}} = 0,5$ г/м³ [1, 7, 8]. Підставивши зафіксовані параметри у співвідношення (12) та вибравши різні значення $W = 100, 300, 900$, побудуємо графіки зміни концентрації розчиненого кисню з часом (рис. 1). З аналізу графіка рис. 1. впливає, що а) збільшення об'єму водного об'єкта приводить до збільшення часу виходу $C_{\text{РК}}$ на стаціонарний режим, рівень якого також визначається значенням W ; б) існує граничне значення W , вище якого модель (1–3) загалом потребує корекції; в) час досягнення мінімальної $C_{\text{РК}}$ є величиною, оберненою відносно до W , інакше кажучи, якщо $W_1 > W_2$, то $t_{\text{кр}}(W_1) < t_{\text{кр}}(W_2)$.

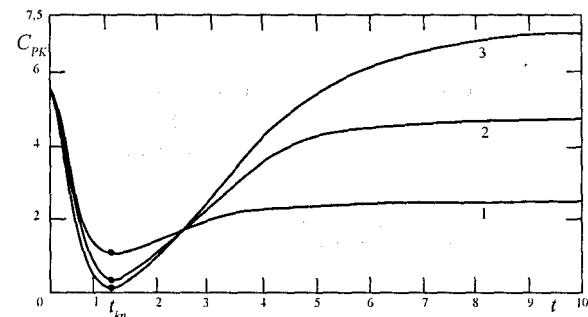


Рис. 1. Графіки динаміки концентрації розчиненого кисню при: 1 – $W_1 = 100$ м³, 2 – $W_2 = 300$ м³, 3 – $W_3 = 900$ м³.

За допомогою моделі (1–3) проаналізуємо вплив характеристик динаміки популяції фітопланктону на стан критичної точки $C_{\text{РК}}^{\text{min}}$ (рис. 1). Згідно зі спрощеною моделлю (3) динаміка $C_{\text{ФП}}$ описується параметром r , який, своєю чергою, залежить від концентрації біогенних елементів (фосфору), смертності в популяції тощо. Таким чином, дослідимо залежність $C_{\text{РК}}^{\text{min}}$ від r . Для цього розв'яжемо рівняння, яке впливає з необхідної умови для екстремума функції (12):

$$\frac{d}{dt} C_{\text{РК}}(t_{\text{кр}}) = 0. \quad (13)$$

У загальному вигляді трансцендентне рівняння (14) розв'язати не можна, тому обмежимося чисельним його розв'язанням [13] відносно часової змінної. Значення функції (13) у знайденій точці є величина $C_{\text{РК}}^{\text{min}}$. Змінюючи значення параметра r , отримаємо сукупність точок $C_{\text{РК}}^{\text{min}}(r)$, які зобразимо на площині $(r, C_{\text{РК}}^{\text{min}})$ (рис. 2). Зазначимо, що від'ємні значення параметра r відповідають вимираючій популяції, тоді як додатні r відповідають моделі демографічного вибуху в популяції. З аналізу рис. 2 впливає, що при зростанні біомаси фітопланктону, мінімум концентрації розчиненого кисню більш глибокий, ніж в умовах популяції, яка деградує. Якщо зафіксувати різні значення об'єму $W_1 = 100$;

$W_2 = 300$; $W_3 = 900$, то спостерігається суттєве зміщення положення графіка $C_{PK}^{min}(r)$ (рис. 2). Слід відзначити наявність у графіку $C_{PK}^{min}(r)$ при $W_3 = 900$ точок із від'ємними значеннями концентрації, що протирічить змісту величини C_{PK} . Встановлений факт можна використати як зручний критерій застосовуваності моделі (1–3), який накладає обмеження як на параметр r , так і на параметр W .

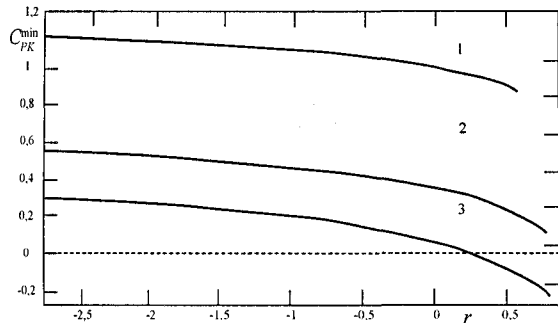


Рис. 2. Графіки залежності найменшого значення концентрації розчиненого кисню від коефіцієнта розмноження популяції фітопланктону при: 1 – $W_1 = 100$ м³, 2 – $W_2 = 300$ м³, 3 – $W_3 = 900$ м³.

Вплив параметра r спостерігається і на значення t_{kp} (рис. 3). З аналізу залежності $t_{kp}(r)$ випливає, що час досягнення критичного значення концентрації розчиненого кисню суттєво залежить від динаміки популяції. Мінімум C_{PK} швидше досягається при популяції, яка вироджується. Вплив об'єму на t_{kp} слід вивчати у поєднанні з результатами аналізу рис. 2. Тоді при зростанні об'єму W до уваги потрібно брати лише популяції зі зменшенням швидкості розмноження ($r < 0$) та незначну частину популяцій з $r > 0$.

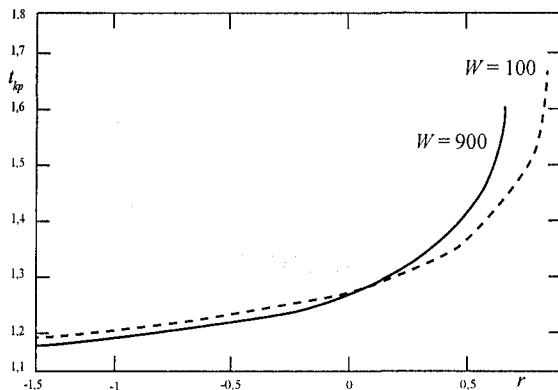


Рис. 3. Графіки залежності t_{kp} часового моменту досягнення найменшого значення концентрації розчиненого кисню від r при: $W_1 = 100$ м³ (суцільна лінія) та $W_3 = 900$ м³ (штрихова лінія).

Сценарій 2. Залежність концентрації розчиненого кисню від складу органічного забруднення при фіксованому об'ємі водного об'єкта та заданому законі розмноження популяції фітопланктону. Швидкість деструкції органічної не-

консервативної речовини у моделі (1)–(3) характеризується параметром k_1 і визначається типом органічної речовини. Зокрема для алкилсульфату (АС) без наповнювача $k_1 = 0,99$, глюкози $k_1 = 0,72$, етилового спирту $k_1 = 0,5$, фенолу $k_1 = 0,38$ [14]. При багаторазовому моделюванні підтвердилась істотна залежність характеристики води від k_1 . Зокрема аналіз рис. 4. показує, що збільшення швидкості деструкції органічної речовини зменшує критичне значення C_{PK} та водночас збільшує її стаціонарне значення.

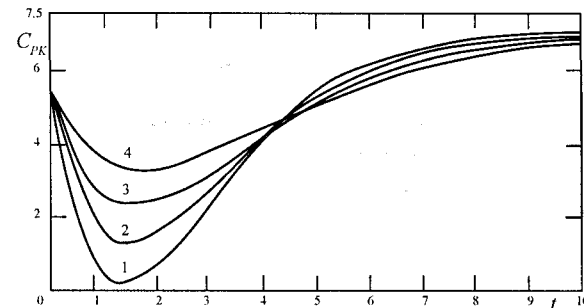


Рис. 4. Динаміка концентрації розчиненого кисню при різних коефіцієнтах деструкції органічних речовин: 1) $k_1 = 0,99$; 2) $k_1 = 0,72$; 3) $k_1 = 0,5$; 4) $k_1 = 0,38$.

Концентрація самої органічної речовини визначається експоненційною залежністю (11) (див. рис. 5) із виходом на стаціонарний стан $\frac{Q_{БПК}}{k_1 W + q}$. Тому більшим значенням k_1 відповідають менші стаціонарні значення $C_{БПК}$.

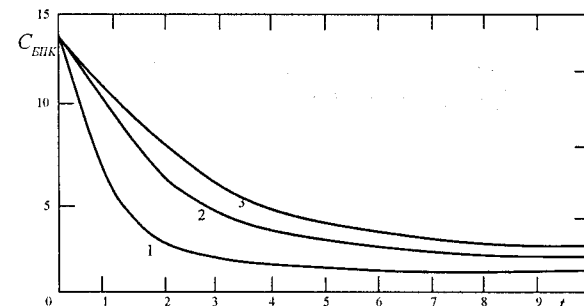


Рис. 5. Динаміка $C_{БПК}$ при різних коефіцієнтах деструкції органічних речовин: 1) $k_1 = 0,99$; 2) $k_1 = 0,5$; 3) $k_1 = 0,38$.

Висновки

Як показують результати імітаційного (чи сільного) експерименту, динаміка C_{PK} є досить чутливою величиною відносно змін об'єму водного об'єкта, швидкості деструкції органічної речовини та продуктивності популяції фітопланктону. Отримані результати дають змогу сформулювати низку рекомендацій з експлуатації водного об'єкта з метою недопущення його інтенсивного забруднення:

- режим скидів забруднених стоків має визначатись часом самоочищення водойми;

- потрібно враховувати інтенсивність трансформації забруднюючих речовин;
 - при проектуванні водного об'єкта його параметри необхідно визначати з урахуванням процесів самоочищення води;
- в окремих випадках при визначенні кисневого режиму потрібно враховувати інтенсивність розмноження фітопланктону.
1. *Раманенко В. Д.* Основи гідроекології. - К.: Обереги, 2001. - 728 с.
 2. *Алексин О. А., Дробкова В. Г., Каплан-Дикс И. С.* Проблема эвтрофикации континентальных вод// Антропогенное эвтрофирование природных вод: Тезисы докл. на Третьем Всесоюзном симпозиуме. - М. - Сентябрь, 1983. - Черноголовка: Наука, 1983.-С. 6-9.
 3. *Сиренко Л. А.* Деэвтрофирование водоемов, его принципы, трудности и задач, опыт практического осуществления. // Там само. - С. 10-12.
 4. *Брагинский Л. П.* Цветение воды в водохранилищах как проявление фундаментальных законов природы. // Там само. - С. 14-16.
 5. *Щербак В. /., Кузьмінчук Ю. С.* Вплив фітопланктону на формування кисневого режиму річкової екосистеми // Гідробіол. журнал - 2005. - Т. 41. - № 1. - С 28-37.
 6. *Лаврик В. І.* Методи математичного моделювання в екології: навчальний посібник для студ. екол. та біол. спец. вищ. навч. закл. - К.: Вид. дім «КМ Академія», 2002. - 203 с
 7. *Лаврик В. І. Скуратівська І. А.* Прогнозування та керування якістю поверхневого стоку за допомогою імітаційного математичного моделювання. // Наукові записки: Біологія та екологія, 2004. - Т. 29 - С 51-57
 8. *Лаврик В. И., Добрынский В. А., Роголь И. В.* Применение имитационного математического моделирования к вопросам управления процессами эвтрофикации озер и водохранилищ // Гидробиол. журнал - 2001. - Т. 37. - № 6. - С. 95-104.
 9. *Математические модели контроля загрязнения воды:* Пер. с англ.-М.: Мир, 1981.-471 с.
 - Ю.Леонов А. В.* Математическое моделирование трансформации соединений фосфора в пресноводных экосистемах на примере оз. Балатон. - М.: Наука, 1986. - 152 с.
 11. *Страшкраба М., ГнаукА.* Пресноводные экосистемы. Математическое моделирование: Пер. с англ. - М.: Мир, 1989. - 376 с.
 12. *Tufford D., McKellar N.* Spatial and temporal hydrodynamic and water quality modelling analysis of a large reservoir on the South Carolina (USA) coastal plain. -Ecological modelling. -№ 114. -1999.-Р. 137-173.
 13. *Дьяконов В. П., Абраменков И. В.* Mathcad 7 в математике, физике и в Internet. - М.: Нолидж, 1999. - 352 с.
 14. *Родзилер И. Д.* Прогноз качества воды водоемов, приемников сточных вод. - М.: Стройиздат, 1984. - 263 с.

V. Lavryk, I. Skurativska

MATHEMATICAL MODELLING AND ESTIMATION OF INFLUENCE OF WATER-GATHERING AREA ON THE OXYGEN REGIME OF WATER OBJECTS IN CONDITIONS OF THEIR EUTROPHICATION.

Dynamics of dissolved oxygen of a water object is studied by means of the mathematical model which takes into account the processes of water exchanging, organic substance transformation and eutrophication of water medium . As a result of imitation modelling the recommendations for water quality regulation of water object are submitted.