УДК 531.314+514.12

Голод П. І., Бернацька Ю. М., Кутній С. В.

ПАРАМЕТРИЗАЦІЯ КОМПЛЕКСНИХ ТОРІВ ЛІУВІЛЛЯ ІНТЕГРОВНИХ ГАМІЛЬТОНОВИХ СИСТЕМ НА ОРБІТАХ ГРУП ПЕТЕЛЬ

Комплексні тори Ліувілля, які відповідають скінченнозонним інтегровним гамільтоновим системам солітонного типу параметризуються «змінними розділення» - комплексними параметрами на рімановій поверхні. Розглянуто випадки, коли тор Ліувілля є якобіаном ріманової поверхні (спектральної кривої) або ж узагальненим якобіаном. поверхні з особливостями.

Вступ

Методи гамільтонової механіки почали відігравати помітну роль в алгебраїчній геометрії після появи циклу праць С. П. Новікова та його учнів, присвячених скінченнозонному інтегруванню нелінійних рівнянь солітонного типу [1, 2, 3, 4, 5]. У цих працях було з'ясовано, що розглянуті авторами скінченнозонні гамільтонові системи є алгебраїчно інтегровними, тобто для них тор Ліувілля — сумісна поверхня рівня інволютивних інтегралів руху,— є дійсною частиною комплексного тору Якобі, що відповідає, комплексній рімановій поверхні (спектральній кривій) роду *д,* рівного числу ступенів вільності скінченнозонної гамільтонової системи. Поглиблений аналіз скінченнозонного сектору рівнянь Кадомцева—Петвіашвілі привів до нового погляду на старі проблеми класичної (комплексної) алгебраїчної геометрії. Зокрема, було розв'язано проблему характеризації торів Якобі у множині довільних абелевих торів (проблема Шоткі [6, 7]), а також запропоновано простий спосіб виділення гіпергеометричних якобіанів з допомогою інтегровних рівнянь багатовимірної задачі С. Неймана [6]. До цього можна додати характеризацію деякого класу многовидів Пріма через рівняння т. зв. В-ієрархії Кадомцева—Петвіашвілі та інші подібні результати, отримані у 80-х роках.

Якщо для алгебраїчно-інтегровної системи вдається знайти «розділені змінні», то можна побудувати явне відображення Абеля—Якобі зі спектральної кривої в комплексний тор Ліувілля. У 1975 році Б. А. Дубровін запропонував розділення змінних у скінченнозонному секторі рівняння КдВ [2]. (Інтегровність відповідних гамільтонових потоків було встановлено перед тим у праці С. П. Новікова [1].) На роль координат, динаміка яких «розділяється», було запропоновано полюси певним чином нормованої функції Бейкера—Ахієзера лінійної спектральної задачі. Ці змінні, як було показано в [2], еволюціонують на гіпереліптичній рімановій поверхні 7?., рід якої g збігається з числом ступенів вільності скінченнозонного фазового простору. Відповідні рівняння руху лінеаризуються стандартною підстановкою Абеля. Явні формули для розв'язків отримують через обернення абелевих інтегралів 1 -го роду і виражають у термінах ^-функцій від g комплексних змінних.

Подібну схему розділення змінних було запропоновано у працях [8, 9, 10] при скінченнозонному інтегруванні рівнянь sin-Gordon, нелінійного рівняння Шредінгера та класичної моделі Тіррінга. В той час як розділення змінних у випадку рівнянь sin-Gordon було цілком аналогічне випадку КдВ, для нелінійного рівняння Шредінгера та моделі Тіррінга виникли певні відмінності: число ступенів вільності скінченнозонного фазового простору цих рівнянь виявилось на одиницю більшим за рід відповідної спектральної кривої. Тому в працях [8, 9, 10] «розділені» координати параметризують лише редукований фазовий простір, а для отримання остаточних формул необхідно здійснювати додаткове інтегрування. Цю ситуацію було прояснено у праці [11], де показано, що комплексний тор Ліувілля скінченнозонного нелінійного рівняння Шредінгера є узагальненим якобіаном сингулярної ріманової поверхні.

Ідеї ранніх праць з теорії скінченнозонного інтегрування в частині, що стосується розділення змінних, були узагальнені Скляніним [12, 13] і частково перенесені ним та іншими авторами на квантові інтегровні моделі [14, 15]. На сьогодні у цьому напрямку опубліковано велику кількість праць, і ми процитували лише деякі з них.

У цій праці ми пропонуємо один спосіб розділення змінних, який добре пристосований до інтегровних гамільтонових систем на орбітах афінних чи квазіградуйованих алгебр Лі. Як показано у працях [16, 17], орбітну структуру має зокрема скінченнозонний фазовий простір інтегровних солітонних ієрархій. Саме інтегрування цих рівнянь методом розділення змінних є нашою кінцевою метою.

Гамільтонові системи, які ми розглядаємо, можна подати у формі Лакса, а це, у свою чергу, означає наявність *спектральної кривої*, точки на якій і дають необхідний набір змінних розділення. Параметризація тору Ліувілля здійснюється симетричними добутками комплексних змінних на рімановій поверхні. Вона залишається компактною, якщо комплексний тор Ліувілля дифеоморфний її Якобіану і є сингулярною кривою (поверхнею з виколотими точками), якщо на торі Ліувілля гамільтонова система може йти на безмежність.

1. Фазові простори рівнянь МКдВ та sin(sh)-Gordon як орбіти в алгебрі $\mathbf{sl}(2)\otimes\mathcal{P}(\lambda,\lambda^{-1})$

У цьому пункті ми повторимо коротко запропоновану в [16, 17] орбітну інтерпретацію скінченнозонного фазового простору рівнянь МКдВ та sin (sh)-Gordon.

Нехай $\widetilde{\mathfrak{g}} = \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})\otimes\mathcal{P}(\lambda,\lambda^{-1})$ — алгебра поліномів Лорана з коефіцієнтами у простій алгебрі Лі $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$. Фіксуємо в ній *основне* градуювання. Узгоджений з таким градуюванням базис в $\widetilde{\mathfrak{g}}$ складається з елементів

$$H^{2m} = \lambda^m H,\ X^{2m+1} = \lambda^m X,\ Y^{2m+1} = \lambda^{m+1} Y, \tag{1}$$

де $H = \left(\begin{smallmatrix}\frac12 & 0\\ 0 & -\frac12\end{smallmatrix}\right)$, $X = \left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$, $Y = \left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ — стандартний базис в $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$. Легко переконатися, що елементи (1) є власними векторами оператора градуювання

$$d = 2\lambda\frac{d}{d\lambda} + \mathrm{ad}_H, \tag{2}$$

а верхній індекс є міткою градуювання і вказує на ступінь елемента.

Позначимо через $\mathfrak{g}_l$, $l\in$, $\mathbb{Z}$ власні підпростори оператора d. Очевидно, що при $l = 2m$ вони одновимірні й натягнуті на базисні елементи H^{2m}, а при $l = 2m+1$ — двовимірні: $\mathfrak{g}_{2m+1} = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{X^{2m+1}, Y^{2m+1}\}$. В алгебрі $\widetilde{\mathfrak{g}}$ виділимо дві підалгебри

$$\widetilde{\mathfrak{g}}_+ = \sum_{l\geqslant 0}\mathfrak{g}_l,\quad \widetilde{\mathfrak{g}}_- = \sum_{l<0}\mathfrak{g}_l,\quad \widetilde{\mathfrak{g}} = \widetilde{\mathfrak{g}}_+ + \widetilde{\mathfrak{g}}_-$$

та означимо низку ad-інваріантних білінійних форм

$$\langle A, B\rangle_k = \mathrm{res}\,\lambda^{-k-1}\,\mathrm{Tr}\,A(\lambda)B(\lambda), \tag{3}$$

$A(\lambda)$, $B(\lambda)\in\widetilde{\mathfrak{g}}$, $k\in\mathbb{Z}$. Будь-яку з цих форм можна використати для побудови спряжених (дуальних) просторів до підалгебр $\widetilde{\mathfrak{g}}_+$ та $\widetilde{\mathfrak{g}}_-$. При $k=-1$ спряженими до $\widetilde{\mathfrak{g}}_+$ та $\widetilde{\mathfrak{g}}_-$ будуть простори:

$$(\widetilde{\mathfrak{g}}_-)^* = \widetilde{\mathfrak{g}}_+ + \mathfrak{g}_{-1},\qquad (\widetilde{\mathfrak{g}}_+)^* = \sum_{l\leqslant 2}\mathfrak{g}_l. \tag{4}$$

Очевидно, що до $(\widetilde{\mathfrak{g}}_-)^*$ та $(\widetilde{\mathfrak{g}}_+)^*$ включено лише ненульові функціонали на відповідних підалгебрах. Якщо ж покласти $k = N\geqslant 0$, то

$$(\widetilde{\mathfrak{g}}_-)^* = \sum_{l\geqslant 2N+1}\mathfrak{g}_l,\qquad (\widetilde{\mathfrak{g}}_+)^* = \sum_{l=-\infty}^{2N}\mathfrak{g}_l.$$

Виділимо в $(\widetilde{\mathfrak{g}}_-)^* = \widetilde{\mathfrak{g}}_+ + \mathfrak{g}_-$ скінченновимірний підпростір

$$M^{N+1} = \left\{\widehat{\mu} = \begin{pmatrix}\alpha(\lambda) & \beta(\lambda)\\ \gamma(\lambda) & -\alpha(\lambda)\end{pmatrix},\quad \left.\begin{array}{l}\alpha(\lambda) = \sum_{i=0}^{N}\lambda^i\alpha_{2i},\\ \beta(\lambda) = \sum_{i=0}^{N+1}\lambda^{i-1}\beta_{2i-1},\\ \gamma(\lambda) = \sum_{i=0}^{N+1}\lambda^{i}\gamma_{2i-1}.\end{array}\right\}\right. . \tag{5}$$

Очевидно, він інваріантний стосовно коприєднаної дії підалгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}_-$. У просторі гладких функцій на M^{n+1} означимо *першу* дужку Лі–Пуассона

$$\{f_1, f_2\}_1 = \sum_{i,j=0}^{N}\sum_{a,b=1}^{3} P_{ab}^{ij}(-1)\frac{\partial f_1}{\partial\mu_i^a}\frac{\partial f_2}{\partial\mu_j^b}, \tag{6}$$

$$P_{ab}^{ij}(-1) = \langle\widetilde{\mu}(\lambda), [X_a^{-i-1}, X_b^{-j-1}]\rangle_{-1},$$

де через μ_i^a ми позначили набір змінних $\{\gamma_{2i-1}, \beta_{2i-1}, \alpha_{2i}\}$, а через X_a^{-i-1} — набір базисних елементів $\{X^{-2i-1}, Y^{-2i-1}, H^{-2i-2}\}$.

Легко бачити, що змінні β_{2N+1} та γ_{2N+1} є анулятором дужки (6). Тому можна покласти $\beta_{2N+1} = \gamma_{2N+1} = const$ і обмежити дужку на підпростір $M^N\subset M^{N+1}$, координатами якого є змінні γ_{2i-1}, β_{2i-1}, α_{2i}, $i=0,\ 1,\ \ldots,\ N$, $\dim M^N = 3(N+1)$, а фіксовані координати β_{2N+1}, γ_{2N+1} виступають у ролі зовнішніх параметрів.

Оскільки $M^N \subset \widetilde{\mathfrak{g}}_- + \sum_{l=0}^{2N} \mathfrak{g}_l = (\widetilde{\mathfrak{g}}_+)^*$, то у просторі M^N означена також коприєднана дія підалгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}_+$. (Нескладно переконатися, що на M^N *ефективно* діє фактор-алгебра $\widetilde{\mathfrak{g}}_+ / \sum_{l \geqslant 2N+2} \mathfrak{g}_l$.) Дужка Лі–Пуассона, яка нею породжується (її назвемо *другою* дужкою), має вигляд

$$\{f_1, f_2\}_2 = \sum_{i,j=0}^{N} \sum_{a,b=1}^{3} P_{ab}^{ij}(N) \frac{\partial f_1}{\partial \mu_i^a} \frac{\partial f_2}{\partial \mu_j^b}, \tag{7}$$

$$P_{ab}^{ij}(N) = \langle \widetilde{\mu}(\lambda), [X_a^{-i+N}, X_b^{-j+N}] \rangle_N,$$

де $X_a^{-i+N} = \{X^{-2i+2N+1}, Y^{-2i+2N+1}, H^{-2i+2N}\}$.

Очевидно, окрім дужок (6) та (7), можна визначити ще N проміжних дужок з пуассоновими тензорами:

$$P_{ab}^{ij}(0),\ P_{ab}^{ij}(1),\ \ldots,\ P_{ab}^{ij}(N-1). \tag{8}$$

Розглянемо ad^*-інваріантну функцію

$$I(\lambda) = -\det \widetilde{\mu}(\lambda) = \\ = h_{-1}\lambda^{-1} + h_0 + \cdots + h_{2N+1}\lambda^{2N+1},$$

коефіцієнтні функції h_ν, $\nu = -1, 0, \ldots, 2N+1$, якої виражаються через координати γ_{2i-1}, β_{2i-1}, α_{2i} формулами:

$$h_\nu = \sum_{i+j-\nu} \alpha_{2i}\alpha_{2j} + \sum_{i+j=0} \gamma_{2i-1}\beta_{2j-1}. \tag{9}$$

Стосовно функції h_ν справедливі такі твердження:

Твердження 1. *Усі функції h_ν, $\nu = -1, 0, \ldots, 2N+1$, попарно комутують стосовно обох дужок Лі–Пуассона (6) та (7), а також стосовно усіх інших дужок (8).*

Твердження 2. *Функції h_N, h_{N+1}, $\ldots$, h_{2N}, $h_{2N+1} = const$ є ануляторами першої дужки (6). Вони функціонально незалежні, й алгебраїчний підмноговид $\mathcal{O}_1^N$ в M^N, визначений рівняннями*

$$h_N = c_N, \quad h_{N+1} = c_{N+1}, \quad \ldots \quad h_{2N} = c_{2N},$$

є орбітою коприєднаної дії алгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}_-$ і має розмірність $\dim \mathcal{O}_1^N = 2(N+1)$.

Твердження 3. *Функції h_{-1}, $h_0, \ldots, h_{N-1}$ є ануляторами другої дужки (7). Вони функціонально незалежні, й алгебраїчний підмноговид $\mathcal{O}_2^N$ в M^N, визначений рівняннями*

$$h_{-1} = c_{-1}, \quad h_0 = c_0, \quad \ldots \quad h_{N-1} = c_{N-1},$$

є орбітою коприєднаної дії алгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}_+$ і має розмірність $\dim \mathcal{O}_2^N = 2(N+1)$.

Доведення цих тверджень можна знайти у [16]. Очевидно, орбіти $\mathcal{O}_1^N$ та $\mathcal{O}_2^N$ є *симплектичними* листами першої та другої дужок Лі–Пуассона відповідно.

Функції h_{-1}, h_0, $\ldots$, h_{N-1} породжують нетривіальні гамільтонові потоки на M_1^N. Відповідні рівняння мають вигляд

$$\frac{\partial \mu_i^a}{\partial \tau_\nu} = \{\mu_i^a, h_\nu\}_1, \quad \nu = -1, 0, \ldots, N-1. \tag{10}$$

Рівняння (10) можна записати також через дужку (7). Точніше, має місце рівність

$$\{\mu_i^a, h_\nu\}_1 = -\{\mu_i^a, h_{\nu+N+1}\}_2.$$

Система рівнянь (10) звужена на орбіту $\mathcal{O}_1^N$, еквівалентна рівнянням *комплексної* МКдВ ієрархії. Звуження на орбіту $\mathcal{O}_2^N$ збігається з ієрархією рівнянь sin (sh)-Gordon (у скінченнозонному секторі).

Систему гамільтонових рівнянь (10) можна записати у формі матричного рівняння Лакса:

$$\frac{\partial \widetilde{\mu}(\lambda)}{\partial \tau_\nu} = [\nabla_2 h_{\nu+N+1}, \widetilde{\mu}(\lambda)] = [\widetilde{\mu}(\lambda), \nabla_1 h_\nu], \text{ де}$$

$$\nabla_1 h = \sum_{i=0}^{N} \left(\tfrac{\partial h}{\partial \alpha_{2i}} H^{-2i-2} + \tfrac{\partial h}{\partial \beta_{2i-1}} Y^{-2i-1} + \right. \\ \left. + \tfrac{\partial h}{\partial \gamma_{2i-1}} X^{-2i-1} \right), \tag{11}$$

$$\nabla_2 h = \sum_{i=0}^{N} \left(\tfrac{\partial h}{\partial \alpha_{2i}} H^{-2i+2N} + \right. \\ \left. + \tfrac{\partial h}{\partial \beta_{2i-1}} Y^{-2i+2N+1} + \tfrac{\partial h}{\partial \gamma_{2i-1}} X^{-2i+2N+1} \right).$$

Умова сумісності рівнянь (11), яка є фактично наслідком комутативності відповідних гамільтонових потоків, може бути записана у формі рівняння «нульової кривизни». Зокрема, якщо покласти $\tau_{N-1} = x$, $\tau_{N-2} = t$, то рівняння

$$\frac{\partial \nabla_2 h_{2N}}{\partial t} - \frac{\partial \nabla_2 h_{2N-1}}{\partial x} + [\nabla_2 h_{2N}, \nabla_2 h_{2N-1}] = 0,$$

звужене на орбіту $\mathcal{O}_1^N$, еквівалентне рівнянню МКдВ на функцію $u(x) = \alpha_{2N}(x,t)$:

$$\frac{\partial \alpha_{2N}}{\partial t} = \frac{\partial \alpha_{2N-2}}{\partial x}.$$

При цьому $\beta_{2N+1} = \gamma_{2N+1} = const$,

$$\nabla_2 h_{2N} = \begin{pmatrix} \alpha_{2N} & \beta_{2N+1} \\ \lambda\gamma_{2N+1} & -\alpha_{2N} \end{pmatrix}, \tag{12а}$$

$$\nabla_2 h_{2N-1} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha_{2N} & \beta_{2N+1} \\ \lambda\gamma_{2N+1} & -\alpha_{2N} \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} \alpha_{2N-2} & \beta_{2N-1} \\ \lambda\gamma_{2N-1} & -\alpha_{2N-2} \end{pmatrix}. \tag{12б}$$

В результаті звуження рівнянь (10) при $\nu = N-1$ на орбіту $\mathcal{O}_1^N$ виникають формули:

$$\beta_{2N-1} = \tfrac{1}{2\beta_{2N+1}}\left(C_{2N} - \tfrac{\partial\alpha_{2N}}{\partial x} - \alpha_{2N}^2\right), \qquad (13а)$$

$$\gamma_{2N-1} = \tfrac{1}{2\beta_{2N+1}}\left(C_{2N} + \tfrac{\partial\alpha_{2N}}{\partial x} - \alpha_{2N}^2\right), \qquad (13б)$$

$$\alpha_{2N-2} = \tfrac{1}{4\beta_{2N+1}}\left(\tfrac{\partial^2\alpha_{2N}}{\partial x62} - 2\alpha_{2N}^3 + 2C_{2N}\alpha_{2N}\right). \qquad (13в)$$

Дві дійсні форми комплексного рівняння МКдВ ($\pm$МКдВ) відповідають двом дійсним підалгебрам $\mathrm{su}(2)$ та $\mathrm{su}(1,1) \cong \mathrm{sl}(2,\mathbb{R})$ в $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$.

Іншу інтегровну ієрархію отримаємо з рівнянь (10), звужуючи їх на орбіту $\mathcal{O}_2^N$. Однопараметрична підгрупа $G_0 = \exp\mathfrak{g}_0$ природним чином параметризує базу орбіти $\mathcal{O}_2^N$. (Базою ми називатимемо многовид $\mathcal{O}_2^N \bigcap \mathfrak{g}_{-1}$):

$$\gamma_{-1} = \sqrt{h_{-1}}\, e^{u}, \qquad \beta_{-1} = \sqrt{h_{-1}}\, e^{-u}.$$

З рівнянь (10) випливає, що

$$\alpha_{2N} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}u,$$

де як і раніше $x \equiv \tau_{N-1}$. На роль еволюційного потоку візьмемо гамільтоніан h_N. Тоді

$$\frac{\partial\alpha_{2N}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x} = 2\beta_{2N+1}\sqrt{h_{-1}}\,\mathrm{sh}\,u. \qquad (14)$$

Якщо в $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ звузитись на дійсну підалгебру $\mathrm{su}(2)$, то в усіх попередніх формулах слід покласти $\alpha_{ia_{2i}}$, $a_{2i} \in \mathbb{R}$, $\gamma_{2i-1} = -\beta_{2i-1}^*$, $\beta_{2N+1} = \gamma_{2N+1} = ib$, $\gamma_{-1} = -ire^{iu}$, $\beta_{-1} = -ire^{-iu}$. Тоді замість рівняння (14) отримаємо рівняння sin-Gordon:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x} = 4rb\sin u. \qquad (15)$$

2. Розділення змінних у скінченнозонному секторі рівнянь МКдВ та sin(sh)-Gordon

Розділення змінних для рівнянь МКдВ та sin(sh)-Gordon добре відоме [8, 19, 20]. Ми повторимо його тут, щоб проілюструвати зв'язок з методом орбіт. Нехай

$$\varkappa^2 = -\det\widehat{\mu}(\lambda) = \\ = h_{-1}\lambda^{-1} + h_0 + \cdots + h_{2N+1}\lambda^{2N+1} \qquad (16)$$

— спектральна крива для системи рівнянь (10). Після заміни $\varkappa \to w = \lambda\varkappa$ вона набуває стандартного вигляду гіпереліптичної кривої роду $g = N+1$:

$$w^2 = \lambda(h_{-1} + h_0\lambda + \cdots + h_{2N+1}\lambda^{2N+2}) \qquad (17)$$

з точками галуження в нулі та нескінченності.

На роль параметрів розділення на орбіті $\mathcal{O}_1^N$ візьмемо $2(N+1)$ комплексних змінних λ_k, w_k, $k = 1, 2, \ldots, N+1$, які пов'язані з гамільтоніанами $h_{-1}, h_0, \ldots, h_{N-1}$, та сталими $c_N, c_{N+1}, \ldots, c_{2N+1}$ алгебраїчними співвідношеннями:

$$w_k^2 = \lambda_k(h_{-1} + h_0\lambda_k + \cdots + h_{N-1}\lambda^N + c_N\lambda^{N+1} + \\ + c_{N+1}\lambda^{N+2} + \cdots + c_{2N+1}\lambda^{2N+2}). \quad (18)$$

Розв'язуючи цю систему рівнянь за правилом Крамера, знайдемо вирази для гамільтоніанів $h_\nu, \nu = -1, 0, \ldots, N-1$, через змінні розділення:

$$h_{-1} = \frac{1}{W}[W_1\left(\tfrac{w_k^2}{\lambda_k}\right) - c_N W_1(\lambda_k^{N+1}) - \cdots - \\ - c_{2N+1}W_1(\lambda_k^{2N+2})]$$

$$h_0 = \frac{1}{W}[W_2\left(\tfrac{w_k^2}{\lambda_k}\right) - c_N W_2(\lambda_k^{N+1}) - \cdots - \\ - c_{2N+1}W_2(\lambda_k^{2N+2})]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$h_{N-1} = \frac{1}{W}[W_{N+1}\left(\tfrac{w_k^2}{\lambda_k}\right) - c_N W_{N+1}(\lambda_k^{N+1}) - \\ - \cdots - c_{2N+1}W_{N+1}(\lambda_k^{2N+2})]. \qquad (19)$$

У наведених формулах $W = \prod(\lambda_k - \lambda_l)$ — визначник Вандермонда для системи змінних $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{N+1}$, а $W_i(f(\lambda_k, w_k))$ — визначник матриці Вандермонда, в якій i-й стовпчик замінено стовпчиком функцій $\{f(\lambda_k, w_k)\}$ (індекс k нумерує рядки у стовпчику).

З другого боку, параметризуючи орбіту у змінних γ_{2i-1}, α_{2i}, $i = 0, 1, \ldots, N$, і виключаючи параметри β_{2i-1} з рівнянь орбіти

$$\sum_{i+j=\nu}(\alpha_{2i}\,\alpha_{2j} + \gamma_{2i-1}\,\beta_{2i-1}) = c_\nu, \qquad (20)$$

$\nu = N, N+1, \ldots, 2N-1$, знайдемо вирази для гамільтоніанів $h_{-1}, h_0, \ldots h_{N-1}$ в термінах змінних $\alpha_{2i}, \gamma_{2i-1}$ та сталих c_ν. Позначимо

$$\Gamma^+ = \begin{pmatrix} \gamma_{2N+1} & \gamma_{2N-1} & \cdots & \gamma_1 & \gamma_{-1} \\ 0 & \gamma_{2N+1} & \cdots & \gamma_3 & \gamma_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma_{2N+1} & \gamma_{2N-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \gamma_{2N+1} \end{pmatrix},$$

$$\Gamma^- = \begin{pmatrix} \gamma_{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_{-1} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_{2N-1} & \gamma_{2N-3} & \cdots & \gamma_{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді з рівнянь (20) маємо:

$$\beta_{2i-1} = (\Gamma^+)^{-1}(c_{N+i} - A_{N+i}), \qquad (21)$$

$i = 0, \ldots, N+1$, де $A_\nu = \sum_{i+j=\nu} \alpha_{2i}\alpha_{2j}$. Використовуючи формули (21), знайдемо вирази для гамільтоніанів $h_{-1}, h_0, \ldots, h_{N-1}$:

$$h_{j-1} = [\Gamma^{-}(\Gamma^{+})^{-1}]_{ji}(c_{N+i} - A_{N+i}) + A_{j-1}, \qquad j = 0, \ldots, N. \quad (22)$$

У формули (22) параметри c_ν входять лінійно, так само як і в формули (19). Оскільки вони незалежні, то з рівності правих частин формул (19) і (22) випливає рівність виразів при параметрах c_ν. Прирівнюючи ці вирази, отримуємо зв'язок між координатами орбіт γ_{2i-1} та змінними λ_k:

$$\frac{\gamma_{2i-1}}{\gamma_{2N+1}} = -\frac{W_{i+1}(\lambda_k^{N+1})}{W}, \quad i = 0, \ldots N. \quad (23)$$

Співвідношення (23) еквівалентні системі рівнянь

$$\sum_{i=0}^{N+1} \gamma_{2i-1}\lambda^i = 0,$$

звідки очевидно, що змінні λ_k є нулями полінома $\gamma(\lambda)$. Вирази для змінних α_{2i} через λ_k, w_k легко знайти з рівнянь:

$$w_k^2 = \lambda_k^2(\alpha^2(\lambda_k) - \beta(\lambda_k)\gamma(\lambda_k)) = \lambda_k^2\alpha^2(\lambda_k),$$

або

$$w_k = \pm\lambda_k\alpha(\lambda_k).$$

Фіксуємо знак однаковим для всіх k і тоді матимемо однозначний зв'язок між змінними λ_k, w_k та змінними на орбіті.

У наступному пункті ми покажемо, що змінні λ_k параметризують комплексний тор Ліувілля, а змінні w_k – квазіканонічно спряжені до них.

Квазіканонічність розділених змінних. Обрахуємо дужки Пуассона між змінними λ_k, w_k. Оскільки λ_k виражаються тільки через змінні γ_{2i-1}, а останні комутують між собою, то

$$\{\lambda_k, \lambda_l\}_1 = 0.$$

З формули (2) випливає також, що

$$\{w_k, w_l\}_1 = 0.$$

Перша дужка Пуассона між змінними λ_k та w_k обраховується за формулою :

$$\{\lambda_k, w_k\}_1 = \sum_{i,j}\left(\frac{\partial\lambda_k}{\partial\gamma_{2i-1}}\frac{\partial w_l}{\partial\alpha_{2j}} - \frac{\partial\lambda_k}{\partial\alpha_{2j}}\frac{\partial w_l}{\partial\gamma_{2i-1}}\right)\{\gamma_{2i-1}, \alpha_{2j}\}_1. \quad (24)$$

Другий доданок у дужках зануляється, оскільки $\frac{\partial\lambda_k}{\partial\alpha_{2j}} = 0$, похідні у першому доданку можна вирахувати явно:

$$\frac{\partial\lambda_k}{\partial\gamma_{2i-1}} = -\frac{\lambda_k^i}{\gamma'(\lambda_k)}, \qquad \frac{\partial\lambda_k}{\partial\gamma_{2i-1}} = \lambda_l^{j+1}.$$

Окрім того, $\{\gamma_{2i-1}, \alpha_{2j}\}_1 = -\gamma_{2(i+j)+1}$, коли $i+j < N$, і $\{\gamma_{2i-1}, \alpha_{2j}\}_1 = 0$, коли $i+j \geqslant N$. Підставляючи отримані вирази у формулу (24), маємо:

$$\{\lambda_k, w_k\}_1 = \frac{\sum\limits_{i+j<N} \lambda_k^i\lambda_l^{j+1}\gamma_{2(i+j)+1}}{\gamma'(\lambda_k)} = \frac{\lambda_l}{\gamma'(\lambda_k)}\frac{\gamma(\lambda_l) - \gamma(\lambda_k)}{\lambda_l - \lambda_k}. \quad (25)$$

Якщо $k \neq l$, то очевидно, що $\{\lambda_k, w_k\}_1 = 0$, оскільки $\gamma(\lambda_l) = \gamma(\lambda_k) = 0$. Якщо ж $k = l$, то розкриваючи невизначеність у формулі (25), знайдемо

$$\{\lambda_k, w_k\}_1 = \lim_{\lambda_l \to \lambda_k} \frac{\lambda_l}{\gamma'(\lambda_k)}\frac{\gamma(\lambda_l) - \gamma(\lambda_k)}{\lambda_l - \lambda_k} = \lambda_k.$$

Отже,

$$\{\lambda_k, w_k\}_1 = \lambda_k\delta_{kl}. \quad (26)$$

Аналогічні обрахунки, виконані для орбіти $\mathcal{O}_2^N$ та другої дужки (7), дають для координат λ_k, w_k такі комутаційні співвідношення

$$\{\lambda_k, w_k\}_2 = -\lambda_k^{N+2}\delta_{kl}. \quad (27)$$

У координатах λ_k, w_k 1-форми Ліувілля на орбітах $\mathcal{O}_1^N$ та $\mathcal{O}_2^N$ (первісні від симплектичних структур) набувають вигляду

$$\eta = \sum_k \lambda_k^{-1} w_k\, d\lambda_k, \quad \xi = \sum_k -\lambda^{-(N+2)} w_k\, d\lambda_k.$$

При звуженні на тор Ліувілля всі функціії h_ν фіксуються і змінні w_k стають функціями від λ_k, тобто $w_k = w(\lambda_k)$ і λ_k – це точки на кривій (17). Тоді 1-форми ξ і η на торі набувають вигляду суми мероморфних диференціалів на відповідній рімановій поверхні.

3. Орбітна інтерпретація скінченнозонних фазових просторів нелінійного рівняння Шредінгера та магентика Гайзенберга

Скінченнозонні фазові простори нелінійного рівняння Шредінгера та магнетика Гайзенберга можна реалізувати у вигляді орбіт коприєднаної дії підалгебр $\tilde{\mathfrak{g}}_-$ і $\tilde{\mathfrak{g}}_+$ подібно до того, як були реалізовані фазові простори для рівнянь МКдВ та sin(sh)-Gordon у попередніх розділах. Однак тепер в алгебрі $\widetilde{\mathfrak{g}} \simeq (2,\mathbb{C}) \bigotimes \mathcal{P}(z,z^{-1})$ необхідно фіксувати *однорідне градуювання*. Підалгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}_+$ і $\widetilde{\mathfrak{g}}_-$ означають, як і раніше,

$$\widetilde{\mathfrak{g}}_+ = \sum_{l\geq 0} \mathfrak{g}_l, \quad \widetilde{\mathfrak{g}}_- = \sum_{l<0} \mathfrak{g}_l, \quad \widetilde{\mathfrak{g}} = \widetilde{\mathfrak{g}}_+ + \widetilde{\mathfrak{g}}_-,$$

але підпростори $\widetilde{\mathfrak{g}}_l$ описуються по-іншому

$$\widetilde{\mathfrak{g}}_l = \mathrm{span}_c\{X^l,\, Y^l,\, H^l\},$$

$X^l = z^l X$, $Y^l = z^l Y$, $H^l = z^l H$. Якщо покласти $\lambda = z^2$, то легко бачити, що алгебру з п.п. 1–2 можна реалізувати як підалгебру в $\widetilde{\mathfrak{g}} \simeq (2,\mathbb{C}) \bigotimes \mathcal{P}(z,z^{-1})$ нерухому стосовно автоморфізму σ порядку 2 [21].

В дуальному до $\widetilde{\mathfrak{g}}_-$ просторі фіксуємо скінченновимірний підпростір $M^{N+1} \subset \widetilde{\mathfrak{g}}_+ \subset \widetilde{\mathfrak{g}}_-^*$:

$$M^{N+1} = \left\{ \widehat{\mu}(z) = \begin{pmatrix} \alpha(z) & \beta(z) \\ \gamma(z) & -\alpha(z) \end{pmatrix}, \right.$$
$$\left. \begin{array}{l} \alpha(z) = \sum_{i=0}^{N+1} z^i \alpha_i, \quad \gamma(z) = \sum_{i=0}^{N+1} z^i \gamma_i. \\ \beta(z) = \sum_{i=0}^{N+1} z^i \beta_i, \end{array} \right\}$$

та дві дужки Лі–Пуассона у ньому:

$$\{f_1, f_2\}_1 = \sum_{i,j=0}^{N+1} \sum_{a,b=1}^{3} P_{ab}^{ij}(-1) \frac{\partial f_1}{\partial \mu_i^a} \frac{\partial f_2}{\partial \mu_j^b}, \tag{28}$$

$$P_{ab}^{ij}(-1) = \langle \widehat{\mu}(z), [X_a^{-i-1}, X_b^{-j-1}] \rangle_{-1};$$

$$\{f_1, f_2\}_2 = \sum_{i,j=0}^{N+1} \sum_{a,b=1}^{3} P_{ab}^{ij}(N+1) \frac{\partial f_1}{\partial \mu_i^a} \frac{\partial f_2}{\partial \mu_j^b}, \tag{29}$$

$$P_{ab}^{ij}(N+1) = \langle \widehat{\mu}(z), [X_a^{-i+N+1}, X_b^{-j+N+1}] \rangle_{N+1}.$$

У наведених формулах через $\{\mu_i^a\}$ позначено набір координат $\{\alpha_i,\, \beta_i,\, \gamma_i\}$, які відповідають базисним елементам H^{-i-1}, X^{-i-1}, Y^{-i-1} у випадку першої дужки або елементам H^{-i+N+1}, X^{-i+N+1}, Y^{-i+N+1} у випадку другої дужки.

У просторі M^{N+1} маємо набір функцій

$$h_\nu = \sum_{i+j=\nu} (\alpha_i \alpha_j + \gamma_i \beta_j),$$

$\nu = 0, 1, \ldots, 2N+2$, які попарно комутують стосовно обох дужок (28) і (29). Окрім того, функції $h_{N+1}, h_{N+2}, \ldots, h_{2N+2}$ є ануляторами першої дужки. Ануляторами є також змінні α_{N+1}, γ_{N+2} і β_{2N+1}.

Покладемо

$$\beta_{N+1} = \gamma_{N+1} = 0, \quad \alpha_{N+1} = const \neq 0. \tag{30}$$

Тоді у просторі $M^N \subset M^{N+1}$, фіксованому умовами (30), алгебраїчні рівняння

$$h_{N+1} = c_{N+1}, \quad h_{N+2} = c_{N+2}, \quad \ldots,$$
$$h_{2N+1} = c_{2N+1}, \quad h_{2N+2} = \alpha_{N+1}^2 \tag{31}$$

задають ad*-інваріантний підмноговид $\mathcal{O}_1^N$ — орбіту коприєднаної дії алгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}_-$:

$$\dim \mathcal{O}_1^N = 2(N+1).$$

Функції h_0, $h_1, \ldots,$ h_N задають нетривіальні гамільтонові потоки на $\mathcal{O}_1^N$, і ці потоки попарно комутують. Відповідні гамільтонові рівняння можна записати у формі Лакса. Зокрема, ми будемо цікавитись парою рівнянь:

$$\frac{\partial \widetilde{\mu}(z)}{\partial x} = [\widetilde{\mu}(z), \nabla_2 h_{2N+1}], \tag{32а}$$

$$\nabla_2 h_{2N+1} = z \begin{pmatrix} \alpha_{2N+1} & 0 \\ 0 & -\alpha_{2N+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_N & \beta_N \\ \gamma_N & -\alpha_N \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial \widetilde{\mu}(z)}{\partial \tau} = [\widetilde{\mu}(z), \nabla_2 h_{2N}], \tag{32б}$$

$$\nabla_2 h_{2N} = z^2 \begin{pmatrix} \alpha_{2N+1} & 0 \\ 0 & -\alpha_{2N+1} \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \alpha_N & \beta_N \\ \gamma_N & -\alpha_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_{N-1} & \beta_{N-1} \\ \gamma_{N-1} & -\alpha_{N-1} \end{pmatrix}.$$

При звуженні на одну із дійсних форм алгебри $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ (на $\mathrm{su}(2)$ або $\mathrm{su}(1,1)$) необхідно покласти $\alpha_j = i a_j$, $\gamma_j = \mp \beta_j^*$. У цьому випадку при $a_{N+1} = \frac{1}{2}$, $c_{N+1} = \alpha_N = 0$ сумісність рівнянь (32) означає, що функція $\beta_N(x,t)$ задовольняє нелінійне рівняння Шредінгера:

$$i \frac{\partial \beta_N}{\partial t} = i \frac{\partial^2 \beta_N}{\partial x^2} \mp \beta_N |\beta_N|^2. \tag{33}$$

Скінченнозонний фазовий простір магнетика Гайзенберга реалізуємо у вигляді орбіти $\mathcal{O}_2^N \subset M^{N+1}$ підалгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}_+$. У відповідності з фізичною інтерпретацією динамічної змінної як вектора намагніченості змінимо координати у просторі M^{N+1}. Нехай X_l, $l = 1, 2, 3$ — ортонормований базис в $\mathrm{su}(2)$ зі стандартним комітаційним співвідношенням:

$$[X_l, X_k] = \varepsilon_{lkm} X_m.$$

Базис X_j піднімається до базису в $\widetilde{\mathfrak{g}}$ стандартним способом: $X_j \to X_l^j = z^j X_l$. Оскільки базисні елементи X_l самодуальні стосовно білінійної форми $(A,B) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\, A \cdot B$, то елементи простору M^{N+1} будуть мати вигляд

$$\widehat{\mu}(z) = \sum_{i=0}^{N+1} \sum_{l=1}^{3} \mu_j^l X_l^j \in M^{N+1}.$$

Очевидно, що

$$\alpha_l = i\mu_l^3, \quad \beta_l = \mu_l^1 - i\mu_l^2, \quad \gamma_l = -(\mu_l^1 + i\mu_l^2).$$

Нас буде цікавити друга дужка (29). Стосовно цієї дужки між координатами $\{\mu_j^k\}$ мають місце такі комутаційні співвідношення

$$\{\mu_i^l, \mu_j^k\}_2 = \varepsilon_{lkm}\,\mu_{i+j-N-1}^m.$$

Ануляторами другої дужки є функції $h_0, h_1, \dots, h_{N+1}$. Алгебраїчні рівняння

$$h_0 = c_0, \quad h_1 = c_1, \quad \dots \quad h_{N+1} = c_{N+1}$$

задають у просторі M^{N+1} підмноговид $\mathcal{O}_2^N$, $\dim \mathcal{O}_2^N = 2(N+2)$, який є орбітою коприєднаної дії алгебри $\widetilde{\mathfrak{g}}_+$.

У свою чергу функції $h_{N+2}, h_{N+3}, \dots, h_{2N+2}$ задають нетривіальні незалежні гамільтонові потоки на $\mathcal{O}_2^N$. Зважаючи на розмірність орбіти $\mathcal{O}_2^N$, не вистачає ще однієї функції, яка породжувала б потік. Виявляється, що змінні α_i, β_i, γ_i теж породжують нетривіальні потоки. Оберемо на роль гамільтоніану змінну α_i. З рівнянь потоків нас будуть цікавити два:

$$\frac{\partial\widetilde{\mu}(\lambda)}{\partial x} = [\widetilde{\mu}(\lambda), \nabla_2 h_{N+2}] = [\nabla_1 h_0, \widetilde{\mu}(\lambda)],$$
$$\nabla_1 h_0 = \lambda^{-1}\begin{pmatrix}\alpha_0 & \beta_0\\ \gamma_0 & -\alpha_0\end{pmatrix} = \lambda^{-1}\widehat{\mu}_0, \tag{34а}$$
$$\frac{\partial\widetilde{\mu}(\lambda)}{\partial\tau} = [\widetilde{\mu}(\lambda), \nabla_2 h_{N+3}] = [\nabla_1 h_1, \widetilde{\mu}(\lambda)],$$
$$\nabla_1 h_1 = \lambda^{-1}\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \gamma_1 & -\alpha_1\end{pmatrix} + \lambda^{-2}\begin{pmatrix}\alpha_0 & \beta_0\\ \gamma_1 & -\alpha_1\end{pmatrix}. \tag{34б}$$

Для координат μ_j^l, $l = 1, 2, 3$ використовуємо векторні позначення: $\{\mu_j^l\} \equiv \boldsymbol{\mu}_j$. Тоді алгебраїчні співвідношення, які визначають орбіту $\mathcal{O}_2^N$, можна записати у вигляді:

$$\begin{array}{l} h_0 = -(\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\mu}_0) = c_0,\\ h_1 = -2(\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\mu}_1) = c_1,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ h_{N+1} = -\sum\limits_{i+j=N+1}(\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\mu}_j) = c_{N+1}. \end{array} \tag{35}$$

У координатах $\boldsymbol{\mu}_i$ система рівнянь (34) набуває простого вигляду:

$$\frac{\partial\boldsymbol{\mu}_j}{\partial x} = 2[\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\mu}_{j+1}], \tag{36а}$$
$$\frac{\partial\boldsymbol{\mu}_j}{\partial t} = 2[\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_{j+1}] + 2[\boldsymbol{\mu}_0, \boldsymbol{\mu}_{j+2}]. \tag{36б}$$

(Тут $[\cdot,\cdot]$ означає векторний добуток.) Рівняння стаціонарного потоку, звужені на орбіту (35), можна розглядати як рекурентні співвідношення, що дозволяють виразити змінні $\boldsymbol{\mu}_j$, $j = 1, 2, \dots, N+1$ через змінну $\boldsymbol{\mu}_0$ та її похідні. Зокрема,

$$\boldsymbol{\mu}_1 = \frac{1}{2c_0}\left[\boldsymbol{\mu}_0, \frac{\partial\boldsymbol{\mu}_0}{\partial x}\right] + \frac{c_1}{2c_0}\boldsymbol{\mu}_0. \tag{37}$$

Водночас з рівняння «нульової кривизни» маємо

$$\frac{\partial\boldsymbol{\mu}_0}{\partial t} = \frac{\partial\boldsymbol{\mu}_1}{\partial x}.$$

Якщо замість $\boldsymbol{\mu}_1$ підставити вираз (37), то отримаємо рівняння

$$\frac{\partial\boldsymbol{\mu}_0}{\partial t} = \frac{1}{2c_0}\left[\boldsymbol{\mu}_0, \frac{\partial^2\boldsymbol{\mu}_0}{\partial x^2}\right] + \frac{c_1}{2c_0}\frac{\partial\boldsymbol{\mu}_0}{\partial x},$$

яке при $c_0 = 1$, $c_1 = 0$ відоме під назвою *класичного магнетика Гайзенберга* (або ізотропного рівняння Ландау—Ліфшиця).

4. Розділення змінних для нелінійного рівняння Шредінгера та магнетика Гайзенберга

Як показано у розділі 2, розділення змінних буде успішним, якщо координати на орбіті вибрано так, що параметри орбіти c_ν входять у вирази для гамільтоніанів лінійно. Ми поки що не можемо сформулювати в загальному випадку умови вибору координат орбіт, але розглянуті нижче приклади дають певні евристичні закономірності.

Фіксуємо в алгебрі $\mathrm{sl}(2,\mathbb{C})$ новий базис, який залежить від трьох параметрів

$$H = \begin{pmatrix}\frac12 & 0\\ 0 & -\frac12\end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix}\frac{\theta}{2} & \eta\\ \zeta & -\frac{\theta}{2}\end{pmatrix},\ Z = \begin{pmatrix}0 & -\eta\\ \zeta & 0\end{pmatrix}. \tag{38}$$

Параметри θ, η, ζ задовольняють *умову нільпотентності*: $\theta^2 + 4\eta\zeta = 0$. Базис (38) стандартно продовжують до однорідного базису в $\widetilde{\mathfrak{g}} \simeq (2,\mathbb{C}) \bigotimes \mathcal{P}(z, z^{-1})$

$$H^m = z^m H,\quad Q^m = z^m Q,\quad Z^m = z^m Z.$$

Елементи дуального простору в нових координатах мають вигляд:

$$\widehat{\mu}(z) = \begin{pmatrix}\alpha(z) & \frac{1}{2\xi}[v(z)+u(z)-\theta\alpha(z)]\\ \frac{1}{2\eta}[v(z)-u(z)-\theta\alpha(z)] & -\alpha(z)\end{pmatrix},$$

а координати α_j, v_j та u_j вираховують за формулами:

$$\alpha_j = \langle\widehat{\mu}(z), H^{-j-1}\rangle_{-1},\ v_j = \langle\widehat{\mu}(z), Q^{-j-1}\rangle_{-1},$$
$$u_j = \langle\widehat{\mu}(z), Z^{-j-1}\rangle_{-1}.$$

Частковий випадок таких координат використано у праці [19] ($\xi = \eta = \frac12$, $\theta = i$). Очевидний зв'язок з координатами $\beta(z)$, $\gamma(\lambda)$ такий:

$$\beta(z) = \frac{1}{2\xi}[v(z) + u(z) - \theta\alpha(z)],$$
$$\gamma(z) = \frac{1}{2\eta}[v(z) - u(z) - \theta\alpha(z)].$$

Рівняння спектральної кривої роду $g = N$ у нових координатах буде мати вигляд:

$$w^2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,\widehat{\mu}^2(z) = \\ = \frac{1}{\theta^2}[u^2(z) - v^2(z) + 2\theta\alpha(z)v(z)]. \quad (39)$$

З системи рівнянь (31), які задають орбіту $\mathcal{O}_1^N$, вилучимо α_j, $j = 0, 1, \ldots, N+1$:

$$\alpha_i = \tfrac{\theta}{2}(V^+)^{-1}(c_{i+N+1} - \tfrac{1}{\theta^2}B_{i+N+1}), \quad (40)$$

$i = 0, \ldots, N+1$, де $B_\nu = \sum_{i+j=\nu}(u_i u_j - v_i v_j)$ та

$$V^+ = \begin{pmatrix} v_{N+1} & v_N & \ldots & v_1 & v_0 \\ 0 & v_{N+1} & \ldots & v_2 & v_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & v_{N+1} & v_N \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & v_{N+1} \end{pmatrix},$$

$$V^- = \begin{pmatrix} v_0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ v_1 & v_0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_N & v_{N-1} & \ldots & v_0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Підставляючи (40) у вирази для гамільтоніанів h_0, $h_1, \ldots, h_N$, матимемо:

$$h_j = V^-(V^+)^{-1}(c_{i+N+1} - \tfrac{1}{\theta^2}B_{i+N+1}) + \tfrac{1}{\theta^2}B_j, \quad (41)$$

$j = 0, \ldots, N$. В отримані формули для гамільтоніанів h_i, сталі c_{i+N+1}, входять лінійно:

$$h_0 = \frac{v_0}{v_{N+1}}\,c_{N+1} - \frac{v_0 v_N}{v_{N+1}^2}\,c_{N+2} + \cdots$$

$$h_1 = \frac{v_1}{v_{N+1}}\,c_{N+1} + \frac{v_0 v_{N+1} - v_1 v_N}{v_{N+1}^2}\,c_{N+2} + \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$h_N = \frac{v_N}{v_{N+1}}\,c_{N+1} + \frac{v_{N-1}v_{N+1} - v_N^2}{v_{N+1}^2}\,c_{N+2} + \cdots. \quad (42)$$

Виберемо пари комплексних чисел (λ_k, w_k), які попарно задовольняють рівняння:

$$w_k^2 = h_0 + h_1 z_k + \cdots + h_N z_k^N + \\ + c_{N+1}z_k^{N+1} + \cdots + c_{2N+2}z_k^{2N+2}, \quad (43)$$

$k = 1, \ldots, N+1$. Розв'язуючи систему рівнянь стосовно $h_0, h_1, \ldots, h_N$ за правилом Крамера, отримаємо:

$$h_0 = \frac{1}{W}[W_1\,(w_k^2) - c_{N+1}W_1(z_k^{N+1}) - \cdots - \\ - c_{2N+2}W_1(z_k^{2N+2})],$$

$$h_1 = \frac{1}{W}[W_2\,(w_k^2) - c_{N+1}W_2(z_k^{N+1}) - \cdots - \\ - c_{2N+2}W_2(z_k^{2N+2})],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$h_N = \frac{1}{W}[W_{N+1}\,(w_k^2) - c_{N+1}W_{N+1}(z_k^{N+1}) - \\ - \cdots - c_{2N+2}W_{N+1}(z_k^{2N+2})], \quad (44)$$

де W та $W_i(f(z_k, w_k))$ означають те саме, що й у розділі 2.

Порівнюючи формули (42) та (44) і вважаючи параметри c_ν незалежними, зробимо висновок, що

$$\frac{v_{i-1}}{v_{N+1}} = \frac{W_i(z_k^{N+1})}{W}, \quad i = 1, 2, \ldots, N+1.$$

Ця система рівностей еквівалентна рівнянням

$$\sum_{i=0}^{N+1} v_i z_k^i = 0,$$

звідки очевидно, що змінні z_k є нулями полінома $v(z)$. Для змінних w_k виконується рівняння

$$w_k^2 = \frac{1}{\theta^2}[u^2(z_k) - v^2(z_k) + 2\theta v(z_k)z(z_k)].$$

Оскільки $v(z_k) = 0$, то

$$w_k^{\pm} = \pm\frac{u(z_k)}{\theta}. \quad (45)$$

У формулі (45) фіксуємо верхній знак. Тоді перехід від змінних α_i, u_i, v_i до змінних z_k, w_k та параметра $c_{N+\nu}$, $\nu = 1, \ldots, N+1$ буде означеним.

Канонічність змінних z_k, w_k. Як і в попередньому пункті, легко встановити, що $\{z_k, z_l\}_1 = \{w_k, w_l\}_1 = 0$. Обрахуємо дужку Пуассона між змінними z_k та w_l:

$$\{z_k, w_l\}_1 = \sum_{i,j=0}\left(\frac{\partial z_k}{\partial v_i}\frac{\partial w_l}{\partial u_j} - \frac{\partial z_k}{\partial u_j}\frac{\partial w_l}{\partial v_i}\right)\{v_i, u_j\}_1.$$

Оскільки $\{v_i, u_j\}_1 = -\theta v_{i+j+1}$ при $i + j \leqslant N$ та $\{v_i, u_j\}_1 = 0$ при $i + j > N$, то нескладні обчислення дадуть:

$$\{z_k, w_l\}_1 = \frac{1}{v'(z_k)}\sum_{i+j\leq N} v_{i+j+1}\,z_k^i z_l^j = \\ = \frac{1}{v'(z_k)}\,\frac{v(z_k) - v(z_l)}{z_k - z_l}.$$

Отже,

$$\{z_k, w_l\}_1 = \delta_{kl}.$$

Розділення змінних на орбіті $\mathcal{O}_2^N$. Спектральна крива для системи рівнянь (34) має вигляд

$$w^2 = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\widehat{\mu}^2(z) = h_0 + h_1 z + \cdots + h_{2N+2}z^{2N+2}$$

і є гіпереліптичною кривою роду $g = N$. Як і в попередніх випадках, виберемо $N+1$ пару точок z_k, w_k, $k = 1, 2, \ldots, N+1$ і пов'жемо їх з параметрами орбіти та гамільтоніанами $h_{N+2}, \ldots, h_{2N+2}$ системою рівнянь:

$$\begin{aligned} w_k^2 = c_0 + c_1 z_k + \cdots + c_{N+1}z_k^{N+1} + \\ + h_{N+2}z_k^{N+2} + \cdots + h_{2N+2}z_k^{2N+2}. \end{aligned}$$

Розв'язуючи цю систему відносно функцій h_{N+2}, $h_{N+3}, \ldots, h_{2N+2}$, виразимо їх через параметри c_ν, $\nu = 0, 1, \ldots, N+1$, що фіксують орбіту $\mathcal{O}_2^N$:

$$\begin{aligned} h_{N+2} &= \frac{1}{W^{N+2}}[W_1^{N+2}(w_k^2) - c_0 W_1^{N+2}(1) - \\ &\quad - c_1 W_1^{N+2}(z_k) - \cdots - c_{N+1}W_1^{N+2}(z_k^{N+1})], \\ h_{N+3} &= \frac{1}{W^{N+2}}[W_2^{N+2}(w_k^2) - c_0 W_2^{N+2}(1) - \\ &\quad - c_1 W_2^{N+2}(z_k) - \cdots - c_{N+1}W_2^{N+2}(z_k^{N+1})], \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (46) \\ h_{2N+2} &= \frac{1}{W^{N+2}}[W_{N+1}^{N+2}(w_k^2) - c_0 W_{N+1}^{N+2}(1) - \\ &\quad - c_1 W_{N+1}^{N+2}(z_k) - \cdots - c_{N+1}W_{N+1}^{N+2}(z_k^{N+1})]. \end{aligned}$$

Тут W^{N+2} позначає детермінант матриці

$$\begin{pmatrix} z_1^{N+2} & z_1^{N+3} & \cdots & z_1^{2N+2} \\ z_2^{N+2} & z_2^{N+3} & \cdots & z_2^{2N+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_{N+1}^{N+2} & z_{N+1}^{N+3} & \cdots & z_{N+1}^{2N+2} \end{pmatrix},$$

а $W_i^{N+1}(f(z_k, w_k))$ — детермінант цієї матриці, де i-й стовпчик замінено на функції $f(z_k, w_k)$, (індекс k нумерує рядки).

З іншого боку, параметризуємо орбіту $\mathcal{O}_2^N$ у змінних α_i, γ_i, $i = 0, 1, \ldots, N+1$. Для цього виключимо з рівнянь орбіти

$$\sum_{i+j=\nu}(\alpha_i\alpha_j + \beta_i\gamma_j) = c_\nu,\ \nu = 0, 1, \ldots, N+1,$$

параметри β_i:

$$\beta_i = (\Gamma^-)^{-1}(c_i - A_i),\ i = 0, \ldots N+1, \qquad (47)$$

де введено позначення $A_\nu = \sum_{i+j=\nu}\alpha_{2i}\alpha_{2j}$,

$$\Gamma^- = \begin{pmatrix} \gamma_0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_N & \gamma_{N-1} & \ldots & \gamma_0 & 0 \\ \gamma_{N+1} & \gamma_N & \cdots & \gamma_1 & \gamma_0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma^+ = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{N+1} & \cdots & \gamma_2 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & \ldots & \gamma_1 & \gamma_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \gamma_{N+1} \end{pmatrix}.$$

Використовуючи формули (47), знайдемо вирази для гамільтоніанів $h_{N+2}, h_{N+3}, \ldots, h_{2N+2}$:

$$h_{i+N+1} = \Gamma^+(\Gamma^-)^{-1}(c_i - A_i) + A_{i+N+1}, \qquad (48)$$

$j = 1, \ldots, N+1$. Прирівнюючи вирази при параметрі c_{N+1} у формулах (46) і (48), отримаємо зв'язок між координатами орбіти γ_i та змінними z_k:

$$\frac{\gamma_i}{\gamma_0} = -\frac{W_i^{N+2}(z_k^{N+1})}{W^{N+2}},\ i = 1, \ldots N+1. \qquad (49)$$

Співвідношення (49) еквівалентні системі рівнянь

$$z_k^{N+1}\sum_{i=0}^{N+1}\gamma_i z_k^i = 0,$$

звідки очевидно, що змінні z_k є нулями полінома $\gamma(z)$. Вирази для змінних w_k орбіти $\mathcal{O}_2^N$ легко знайти з рівняння спектральної кривої

$$w_k^2 = \alpha^2(z_k) - \gamma(z_k)\beta(z_k) = \alpha^2(z_k).$$

Отже,

$$w^{\pm} = \pm\alpha(z_k). \qquad (50)$$

Аналогічно до вищезазначеного доводимо, що $\{z_k, z_l\}_2 = \{w_k, w_l\}_2 = 0$. Дужки між z_k та w_k обрахуємо за формулою:

$$\{z_k, w_l\}_2 = \sum_{i,j}\frac{\partial z_k}{\partial\gamma_i}\frac{\partial w_l}{\partial\alpha_j}\{\gamma_i, \alpha_j\}_2.$$

Враховуючи, що

$$\frac{\partial z_k}{\partial z_i} = \frac{-z_k^i}{\gamma'(z_k)}, \quad \frac{\partial w_l}{\partial\alpha_j} = z_l^j,$$

$$\{z_i, z_j\}_2 = -\gamma_{i+j-N-1},\ 0 \leqslant i, j \leqslant N+1,$$

зокрема, для $\gamma_{i+j} = N-1$, отримаємо

$$\{z_k, w_l\}_2 = \frac{1}{\gamma'(z_k)}\frac{z_k^{N+2}\gamma(z_l) - z_l^{N+2}\gamma(z_k)}{z_k - z_l}.$$

Коли $k \neq l$, цей вираз, очевидно, перетворюється на нуль. Коли ж $k = l$, розкриття невизначеності приводить до такого результату

$$\{z_k, w_l\}_2 = -z_k^{N+2}\delta_{kl}.$$

Як бачимо, тор Ліувілля нелінійного рівняння Шредінгера та магнетика Гайзенберга має розмірність $N+1$ і параметризується такою ж кількістю комплексних параметрів z_k, кожен з яких пробігає ріманову поверхню, що відповідає гіпереліптичній кривій (39), рід якої $g = N$. Отже, він не є якобіаном ріманової поверхні.

Автори висловлюють щиру вдячність учасникам семінару "Інтегровні гамільтонові системи та солітони" М. Йоргову, Д. В. Лейкіну, Т. В. Скрипнику за цікаві зауваження та плідне обговорення цієї праці.

1. *Новиков С. П.* Периодическая задача для уравнения Кортевега—де Фриза // Функц. анализ и его приложения,— 1974.- Т. 8, № 3.- С. 54-66.
2. *Дубровин Б. А.* Периодическая задача для уравнения Кортевега—де Фриза // Функц. анализ и его приложения,— 1975.-Т. 9, №4.-С. 41-51.
3. *Дубровин Б. А.* Вполне интегрируемые гамильтоновы системы, связанные с матричними операторами, и абелевы многообразия // Функц. анализ и его приложения.— 1977.— Т. 11, №4.-С. 28-41.
4. *Кричевер И. М.* Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений // УМН— 1977.— Т. 32, вып. 6,— С. 183-208.
5. *Веселое А. П., Новиков С. П.* Скобки Пуассона и комплексные торы // Труды Мат. ин-та АН СССР.- 1984.- Т. 165.- С. 49-61.
6. *Мамфорд С. П.* Лекции о тэта-функциях // М: Мир.— 1988.
7. *T. Shiolat* Characterization of Jacobian varieties in terms of soliton equation *II* Invent, math.- 1986.- Vol. 83,- P. 333-382.
8. *Козел В. А., Котляров В. П.* Почти периодические решения уравнения utt — u_{xx} + sin u = 0 // Докл. АН УССР. Серия А. - 1976, № 10,- С. 878-881.
9. *Итс А. Р., Котляров В. П.* Об одном классе решений уравнения Шредингера // Докл. АН УССР. Серия А.— 1976, № П.-С. 965-968.
10. *Голод П. И., Прикарпатский А. К.* Классические решения двумерной модели Тирринга с периодическими начальными условиями.— К., 1978.— 28 с. (Препринт Ин-та теор. физики АН УССР ИТФ-78-18Р)
11. *E. Previato,* Hyperelliptic quasi-periodic and soliton solution of the nonlinear Schrodinger equation *II* Duke Math. J.— 1985.— Vol. 52, № 2.- P. 329-377.
12. *E. K.* Жуаш'я. Separation of variables in the classical integrable *SL(3)* magnetic chain *II* Comm. Math. Phys.- 1992.- Vol. 150.- P. 181-191.
13. *E. K. Sklyanin.* Separation of variables: new trends *II* Progr. Theor. Phys. Suppl.- 1995, Vol. 118.- P. 35-60.
14. *E. K. Sklyanin.* Separation of variables in quantum integrable models related to the Yangian "K[sZ(3)] //hep-th/9212076 (1992).
15. *F. A. Smirnov.* Separation of variables for quantum integrable models related to U_qÇl_N\ //hep-th/9212076 (1992).
16. *Голод П. И.* Гамильтоновы системы на орбитах афинных групп Ли и нелинейные интегрируемые уравнения // Сб. «Физика многочастичных систем».— 1985, № 7.— С. 30-39.
17. *P. I. Holod.* Hamiltonian systems on the orbirs of affine Lie groups and finite-bands integration of nonlinear equations *II* Nonlinear and turbulent processes in physics,— K., 1983.— Vol. 3.-P. 1361-1367.
18. *Дубровин Б. А., Новиков С. П.* Алгебраические скобки Пуассона для конечнозонных решений уравнения sine-Gordon и нелинейного уравнения Шредингера // Докл. АН СССР— 1982,-Т. 260, № 6.- С. 1295.
19. *M. S. Alber. S. J. Alber,* Hamiltonian formalism for finite-zone solutions of integrable equations *II* C R. Acad. Sei. Paris,— 1985.-V 301.- P. 777-781.
20. *Бернацька Ю. М., Голод П. І.* Канонічні координати в скінченнозонному секторі нелінійних рівнянь солітонного типу // Наукові записки НаУКМА: Фізико-математичні науки.— 2001,-Т. 19.-С 31-42.
21. *Кац В.* Бесконечномерные алгебры Ли.— М, 1993.— 435 с.

P. I. Holod, J. N. Bematska, S. V. Kutniy

PARAMETERIZATION FOR COMPLEX LIOUVILLE TORI OF INTEGRABLE HAMILTONIAN SYSTEMS ON LOOP GROUP ORBITS

Complex Liouville tori corresponding to finite-zone Hamiltonian systems of soliton type are parameterized by "variables of separation " which are complex parameters on a Riemannian surface. The paper considers the cases when the Liouvillle torus serves as a Jacobian of the Riemannian surface (spectral distribution curve) or a s a generalized Jacobian of the surface with singularities.