УДК 517.954:582.546

Булавацький В. М., Лаврик В. І.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ФІЛЬТРАЦІЙНОЇ КОНСОЛІДАЦІЇ З УРАХУВАННЯМ ДИФУЗІЙНОЇ НЕРІВНОВАЖНОСТІ ТА МАСООБМІНУ

Наведено одновимірну математичну модель процесу консолідації ґрунтового масиву, насиченого сольовим розчином за умов дифузійної нерівноважності. У рамках даної моделі здійснено постановку задачі про консолідацію ґрунтового масиву скінченної потужності, розміщеного на непроникній основі, та запропоновано чисельний алгоритм її розв'язання.

1. Вступ

Актуальність вивчення процесів фільтраційного ущільнення деформівних ґрунтових масивів зумовлена потребами низки галузей, зокрема гідротехніки, промислового та цивільного будівництва і ін. [1–3]. При цьому важливе значення має дослідження процесів ущільнення основ поверхневих накопичувачів промислових та побутових стоків, що пов'язано з вивченням умов їх безпечного функціонування. Нерідко вказані накопичувачі заповнюються відходами гірничої та хімічної промисловості, які є концентрованими сольовими розчинами, тому для оцінки процесів консолідації за таких умов некоректно застосовувати класичну теорію консолідації, яка базується на припущенні, що фільтрат у масиві є чистою водою [1–3]. У зв'язку з цим у роботах [4, 5] уперше виконано постановки й одержано розв'язки деяких задач фільтраційного ущільнення ґрунтів, насичених сольовими розчинами, та встановлено факт суттєвого впливу засоленості фільтрату на процес ущільнення. У роботі [6] вивчався вплив властивості повзучості ґрунтового скелету на перебіг процесу консолідації. Слід зазначити, що у цих роботах суттєвим припущенням при побудові моделей було припущення про рівноважність дифузійного процесу. На відміну від цього, метою даної роботи є вивчення процесу фільтраційної консолідації масивів, насичених сольовими розчинами, у випадку нерівноважності дифузійного процесу. Через це у роботі наведено постановку одновимірної крайової задачі теорії фільтраційної консолідації насиченого сольовим розчином масиву, розміщеного на непроникній основі, з урахуванням нерівноважності процесу дифузії розчинника та масообміну з вміщуючими породами.

2. Побудова математичної моделі процесу. Постановка крайової задачі

За нерівноважних умов дифузійного процесу виходитимемо з такого узагальнення закону Фіка, запропонованого у [4]:

$$q+\tilde{\tau}_1\frac{\partial q}{\partial t}=-D\frac{\partial}{\partial x}\left(C+\tilde{\tau}_2\frac{\partial C}{\partial t}\right), \qquad (1)$$

де q – дифузійний потік, C – концентрація розчинника, D – коефіцієнт диффузії, $\tilde{\tau}_1$ и $\tilde{\tau}_2$ – відповідно параметри релаксації диффузійного потоку та концентрації. Для одержання рівняння конвективної дифузії розчинника з урахуванням масообміну між розчинником і матеріалом матриці пласта при фільтрації порового розчину запишемо одновимірне рівняння балансу маси у вигляді [8]

$$\sigma\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(u_x C) + \frac{\partial N}{\partial t} = 0, \qquad (2)$$

де u_x – швидкість фільтрації, σ – пористість, $(\partial N/\partial t) = f(C,N)$ – рівняння кінетики масообміну.

Тоді, диференціюючи рівняння (1) за змінною x та додаючи до одержаного рівняння рівняння (2), попередньо продиференційоване за змінною t і помножене на множник $-\tilde{\tau}_1$, одержимо після нескладних перетворень таке рівняння:

$$\sigma\tilde{\tau}_1\frac{\partial^2 C}{\partial t^2} + \sigma\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(u_x C + \tilde{\tau}_1\frac{\partial}{\partial t}(u_x C)\right) + \frac{\partial N}{\partial t} + \tilde{\tau}_1\frac{\partial^2 N}{\partial t^2} = D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(C + \tilde{\tau}_2\frac{\partial C}{\partial t}\right). \qquad (3)$$

Застосовуючи узагальнення закону Дарсі на випадок фільтрації сольових розчинів у вигляді [4]

$$u_x = -k\frac{\partial H}{\partial x} \pm \nu\frac{\partial C}{\partial x}, \qquad (4)$$

де k – коефіцієнт фільтрації, C – концентрація солі у рідкій фазі, H – надлишковий напір, ν – коефіцієнт осмосу, перетворимо рівняння (3) на

$$\sigma\tilde{\tau}_1\frac{\partial^2 C}{\partial t^2} + \sigma\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial t} + \tilde{\tau}_1\frac{\partial^2 N}{\partial t^2} = D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(C + \tilde{\tau}_2\frac{\partial C}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left[C\left(k\frac{\partial H}{\partial x} \mp \nu\frac{\partial C}{\partial x}\right)\right] + \tilde{\tau}_1\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\left[C\left(k\frac{\partial H}{\partial x} \mp \nu\frac{\partial C}{\partial x}\right)\right], \qquad (5)$$

де знак «+» відповідає нормальній осмотичній фільтрації, а знак «–» – аномальній.

Рівняння консолідації масиву з урахуванням справедливості закону (4) запишемо у вигляді [5]:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = c_v\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \mp \mu\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \qquad (6)$$

де $$c_v = \frac{k(1+\bar{e})}{\gamma\left[a + \beta(1+\bar{e})\right]}, \; \mu = \frac{c_v\nu}{k},$$

a – коефіцієнт миттєвого ущільнення, β – коефіцієнт об'ємної стискуваності газової компоненти, $\bar{e}$ – середнє значення коефіцієнта пористості.

Отже, математична модель розглядуваного процесу консолідації ґрунтується на системі диференціальних рівнянь (5), (6). У рамках цієї моделі вивчення процесу фільтраційної консолідації масиву скінченної потужності l, розміщеного на непроникній основі і насиченого сольовим розчином за умов релаксаційності дифузійного процесу та припущення, що функція кінетики масообміну має вигляд [9] $f = \gamma(C - C_m)$, зводиться до розв'язання в області $(0, l)\times(0, \infty)$ такої нелінійної крайової задачі:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = c_v\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \mp \mu\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \qquad (7)$$

$$\sigma\tilde{\tau}_1\frac{\partial^2 C}{\partial t^2} + (\sigma + \gamma\tilde{\tau}_1)\frac{\partial C}{\partial t} + \gamma(C - C_m) = D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(C + \tilde{\tau}_2\frac{\partial C}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left[C\left(u\frac{\partial H}{\partial x} \mp \nu\frac{\partial C}{\partial x}\right)\right] + \tilde{\tau}_1\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\left[C\left(u\frac{\partial H}{\partial x} \mp \nu\frac{\partial C}{\partial x}\right)\right], \qquad (8)$$

$$H(0,t) = H_x(1,t) = 0, \qquad (9)$$

$$H(x, 0) = 1, \qquad (10)$$

$$C(0,t) = 1, \; C_x(1, t) = 0, \qquad (11)$$

$$C(x,0) = C_t(x,0) = 0, \qquad (12)$$

де γ – параметр масообміну, C_m – концентрація граничного насичення. Зазначимо, що у (7) – (12) уведено безрозмірні змінні й параметри зі співвідношеннями

$$x' = \frac{x}{l}, t' = \frac{t}{T}, H' = \frac{H}{H_0}, C' = \frac{C}{C_0}, C_m' = \frac{C_m}{C_0},$$

$$\tilde{\tau}_i' = \frac{\tilde{\tau}_i}{T} \; (i = 1,2), \; c_v = \frac{c_v T}{l^2}, \mu' = \frac{\nu C_0 c_v'}{k H_0}, D' = \frac{DT}{l^2},$$

$$u' = \frac{k H_0 T}{l^2}, \; \nu' = \frac{\nu C_0 T}{l^2}$$

і знак «штрих» над безрозмірними величинами опущено.

3. Алгоритм наближеного розв'язання задачі

Розглядаючи випадок аномальної осмотичної фільтрації, використаємо запропонований у [10] підхід, який поєднує диференціально-різницевий метод у сукупності з методом сумарних зображень [11]. Для цього введемо до розгляду сіткову область $x_i = ih \; (i = \overline{0, m+1})$ і поставимо у відповідність задачі (7), (9), (10) диференціально-різницеву задачу

$$\frac{d\vec{u}(t)}{dt} - \frac{c_v}{h^2}T_3^{(m)}\vec{u}(t) + \frac{2c_v}{h^2}\vec{u}(t) = \vec{w}(t), \qquad (13)$$

$$\vec{u}(0) = \vec{\varphi}, \qquad (14)$$

де

$$\vec{u}(t) = \{H_i(t)\}_{i=1}^m, \vec{w}(t) = \{f_i(t)\}_{i=1}^m,$$

$$f_i(t) = \frac{\mu}{h^2}\left\{c_{i-1}(t) - 2c_i(t) + c_{i+1}(t)\right\}, \qquad (15)$$

$$\vec{\varphi} = \left\{\varphi_i\right\}_{i=1}^m \; (\varphi_i = 1, \; i = \overline{1,m}),$$

$T_3^{(m)}$ – квадратна матриця, визначена у [11].

Введемо до розгляду P – трансформації векторів $\vec{u}$ и $\vec{w}$ згідно зі співвідношеннями

$$\vec{\bar{u}}(t) = P_3^{(m)^*}\vec{u}(t), \; \vec{\bar{w}}(t) = P_3^{(m)^*}\vec{w}(t),$$

де $P_3^{(m)^*}$ – квадратна матриця порядку m, транспонована по відношенню до матриці

$$P_3^{(m)} = \left[p_{kj}^{(3)} \right]_{k,j=1}^{m} \; [11].$$

Домножуючи (13) зліва на матрицю $P_3^{(m)^*}$ з урахуванням умови (14) та наступного представлення [11]: $T_3^{(m)} = P_3^{(m)}\Lambda_3^{(m)}P_3^{(m)^*}$ ($\Lambda_3^{(m)} = \left[\lambda_1^{(3)}, \lambda_2^{(3)}, ..., \lambda_m^{(3)}\right]$ – діагональна матриця власних чисел матриці $T_3^{(m)}$), одержуємо задачу Коші, яка у скалярній формі має вигляд

$$\frac{d\hat{u}_i(t)}{dt} + \theta_i \hat{u}_i(t) = \hat{w}_i(t) \quad (i = \overline{1,m}), \qquad (17)$$

$$\hat{u}_i(0) = \hat{\varphi}_i, \; (i = \overline{1,m}), \qquad (18)$$

де $\theta_i = \frac{2c_v}{h^2}\left(1 - \lambda_i^{(3)}\right), \; (i = \overline{1,m})$.

Розв'язок задачі (17), (18) запишемо у вигляді

$$\hat{u}_i(t) = \hat{\varphi}_i e^{-\theta_i t} + \int_0^t \hat{w}_i(\tau) e^{-\theta_i(t-\tau)} d\tau \quad (i = \overline{1,m}).$$

Переходячи у (19) до оригіналів, одержуємо розв'язок вихідної диференціально-різницевої задачі у вигляді

$$H_i(t) = f_i(t) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{m} \int_0^t \left[c_{k+1}(\tau) - 2c_k(\tau) + c_{k-1}(\tau)\right] S_{ik}(t-\tau) d\tau, \quad (20)$$

де

$$S_{ik}(t) = \frac{\mu}{h^2} \sum_{\nu=1}^{m} p_{i\nu}^{(3)} p_{k\nu}^{(3)} e^{-\theta_\nu t},$$
$$f_i(t) = \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{k=1}^{m} p_{i\nu}^{(3)} p_{k\nu}^{(3)} e^{-\theta_\nu t}. \qquad (21)$$

З урахуванням викладеного можна запропонувати методику розв'язання розглядуваної задачі, яка базується на сумісному застосуванні диференціально-різницевого і власне різницевого методів. При цьому обчислення поля концентрацій здійснюється згідно з різницевою схемою, яка у позначеннях роботи [12] має вигляд (випадок аномальної осмотичної фільтрації)

$$\sigma\tilde{\tau}_1 C_{\bar{t}t} + (\sigma + \gamma\tilde{\tau}_1) C_{\underset{t}{\circ}} + \gamma(\hat{C} + C_m) =$$
$$= D(C + \tilde{\tau}_2 C_{\underset{t}{\circ}})_{\bar{x}x} + u(H_x \hat{C}_x + CH_{\bar{x}x}) +$$
$$+ \nu(C_x^2 + CC_{\bar{x}x}) + \tilde{\tau}_1 u(C_x H_x + CH_{\bar{x}x})_{\bar{t}} +$$
$$+ \nu\tilde{\tau}_1 \left(C_x^2 + CC_{\bar{x}x}\right)_{\bar{t}}. \qquad (22)$$

Отже, алгоритм обчислень може бути сформульовано таким чином: спочатку обчислюється концентрація C на даному шарі за часом згідно з (22), а потім обчислюється значення надлишкового напору H згідно з явною залежністю (21).

4. Результати чисельної реалізації алгоритму. Висновки

Чисельну реалізацію викладеного алгоритму виконано для вхідних даних, наведених у [5]. Результати розрахунків дають змогу зробити такі висновки про характер формування поля концентрацій за умов релаксаційності дифузійного процесу та наявності масообміну з вміщуючими породами, а також про особливості поведінки надлишкових напорів в деформованому масиві:

1. Врахування властивості релаксаційності дифузійного процесу та масообміну за умов консолідації масиву, насиченого сольовим розчином, призводить до запізнення формування поля концентрацій порівняно з класичним випадком.

2. У разі наявності аномальної осмотичної фільтрації врахування фактора релаксаційності дифузійного процесу призводить до деякого збільшення надлишкових напорів в масиві порівняно з випадком $\tilde{\tau}_1 = \tilde{\tau}_2 = 0$. Ці підвищені напори мають місце на початкових стадіях процесу ущільнення, затримуючи його.

Результати розрахунків свідчать про необхідність урахування особливостей перебігу процесу фільтраційної консолідації масивів, насичених сольовими розчинами, за умов нерівноважної дифузії при виробленні технічних рішень в інженерній практиці.

1. *Барсегян Р.* М. Методы решения задач теории фильтрации в неоднородных средах. - Ереван: Изд-во Ереван. ун-та, 1977.- 303 с.
2. *Иванов П. Л.* Грунты и основания гидротехнических сооружений. - М.: Высш. школа, 1991.- 447 с.
3. *Флорин В. А.* Основы механики грунтов: В 2-х т. - Л., М: Госстройиздат, 1961.- Т. 2.- 544 с.
4. *Власюк А. П., Жеребятьєв О. В.* Фільтраційна консолідація глинистих грунтів при наявності масопереносу солей // Вісн. Укр. держ. акад. водн. госп-ва. - Рівне. - 1998,- Вип. 1.- Ч. 1.- С. 40-43.
5. *Власюк А. П., Мартинюк П. М.* Математичне моделювання консолідації грунтів в процесі фільтрації сольових розчинів. - Рівне: Вид-во УДУВГП, 2004.- 211 с.
6. *Булавацький В. М., Кривонос Ю. Г., Скопецький В. В.* Некласичні математичні моделі процесів тепло- та масопереносу.- К.: Наук, думка, 2005.- 283 с.
7. *Лыков А. В., Берковский Б. М.* Законы переноса в неньютоновских жидкостях//Тепло-и массообмен в неньютоновских жидкостях. - Москва: Энергия, 1968. - С. 5-14.
8. *Гладкий А. В., Скопецький В. В.* Методи числового моделювання екологічних процесів.- К.: ІВЦ «Видавництво "Політехніка"», 2005.- 152 с
9. Методы прогноза солевого режима грунтов и грунтовых вод / Н. Н. Веригин, С. В. Васильев, Н. П. Куранов и др. - М.: Колос, 1976.- 336 с.
10. *Глущенко А. А.* Один приближенный метод решения нестационарных задач математической физики: Докл. АН УССР,- 1978.- Сер. А.- № 6. - С. 490-494.

11. *Положий Г. Н.* Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента.- К.: Вищ. школа, 1962.- 161 с.
12. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Численные методы. - М.: Наука, 1989.-432 с.

V. Bulavaîsky, V. Lavryk

THE MATHEMATICAL MODELLING OF PROCESS OF FILTRATIONAL CONSOLIDATION WITH ALLOWANCE OF DIFFUSIVE NONEQUILIBRIUM AND MASS-TRANSFER

The onedimensional mathematical model of process of consolidation of a ground massif saturated saline solution in conditions of diffusive nonequilibrium is adduced. Within the framework of the given model the formulation about consolidation of a ground massif of final power arranged on the opaque basis is executed and the numerical algorithm of its solution is offered.