УД К 519.81

Михалевич В. М.

ДО КЛАСИФІКАЦІЇ ЗАДАЧ РІШЕНЬ

Запропоновано критерій наявності невизначеності у задачі прийняття рішень.

Задачі прийняття рішень (ЗПР) переважно розглядаються як оптимізаційні задачі, тобто як задачі вибору оптимальних рішень. Множину таких задач принципово необхідно розділити на два підкласи: ЗПР без невизначеності, або так звані детерміністичні задачі, і ЗПР з невизначеністю. Для такої класифікації необхідно знайти критерій наявності невизначеності у ЗПР. Саме такий критерій пропонується нижче.

Уточнимо деякі засадничі поняття.

Будемо говорити, що ЗПР виникає в системі прийняття рішень, вважаючи, що така система прийняття рішень утворюється завжди, коли той, хто приймає рішення (ТПР), опиняється в ситуації прийняття рішення (СПР), тобто в ситуації, що вимагає від ТПР обрати з множини можливих рішень D лише одне рішення $d \in D$. Також будемо вважати, що у загальному випадку будь-яке рішення $d \in D$ у СПР викликає з множини можливих наслідків $\mathbb{C}$ лише один наслідок $c \in \mathbb{C}_d$, а множина $\mathbb{C}_d$ є підмножиною множини усіх можливих у даній СПР наслідків, тобто $\mathbb{C} = \bigcup_{d \in D} \mathbb{C}_d$.

Нарешті, будемо вважати, що ТПР завжди має на множині наслідків $\mathbb{C}$ своє особисте відношення переваг (ВП) $\{\geq\}$, а на множині рішень D він повинен побудувати ВП $\{\geq\}$, за яким буде намагатися визначити найкраще (оптимальне) рішення $d \in D$. Для простоти як $\{\geq\}$ будемо розглядати клас лінійних впорядкувань.

Означення 1. Скажімо, рішення d_1 домінує над d_2 відносно $(C, \geq)$, якщо $C_{d_1} > C_{d_2}$ (тобто $c_1 \geq c_2$, $\forall c_1 \in C_{d_1}, \forall c_2 \in C_{d_2}, Card(C_{d_1} \cap C_{d_2}) \leq 1), C_{d_1} \neq C_{d_2}$).

Тоді процедуру формування відношення переваг на заданій множині рішень D, з якими пов'язані наслідки $C_{d_1}, d \in D$, будемо коротко називати проектуванням переваг з наслідків $(C, \geq)$ не рішення $(D, \preccurlyeq)$ за умовами:

U_1. $C_{d_1} > C_{d_2} \Rightarrow d_1 \succ d_2, \forall d_1, d_2 \in D$

U_2. $C_{d_1} = C_{d_2}, Card C_{d_1} = 1 \Rightarrow d_1 \approx d_2, \forall d_1, d_2 \in D$

Означення 2. Під задачею прийняття рішення, коротко задачею рішення (ЗР), будемо розуміти проектування відношення переваг $(C, \geq)$ на рішення D в тому випадку, одна й та сама перевага на наслідках може проектуватись у декілька відношень переваг на рішеннях, тобто процедура проектування неоднозначна.

Умови, при яких ТПР розв'язує певну ЗР, коротко називатимемо ситуацією ЗР(СЗР).

Надалі будемо розрізняти СЗР в залежності від того, чи присутній в умовах задачі невідомий параметр з деякої множини Ω, яку надалі називатимемо простором невідомого параметра, або коротко – параметричним простором. У разі, коли Ω присутній, таку СЗР називатимемо матричною, в протилежному випадку СЗР будемо називати лотерейною.

Уточнимо ці поняття, побудувавши модель СЗР у випадку так званої повної невизначеності. Для такої моделі СЗР будемо використовувати, для зручності, окрему назву – схема СЗР.

Означення 3. Лотерейною схемою СЗР будемо називати трійку:

$$Z_\Lambda = (D, C, a(\bullet)), \tag{1}$$

де $Z_\Lambda = (Z_\Lambda(D, C, a(\bullet))$, коли треба конкретизувати Z_Λ) – позначення лотерейної схеми СЗР, D – простір усіх можливих рішень, C – простір усіх можливих наслідків, $a(\bullet)$ – багатозначне відображення простору рішень D у простір наслідків C (тобто $a: D \to 2^C$), що належить певному класу $K \subset (2^C)^D$. Цей клас уточнимо нижче.

Очевидно, що необхідною умовою існування невизначеності є неоднозначність наслідків для якоїсь альтернативи, тобто $K \neq (2^C)^D$. Але зрозуміло, що ця умова не є достатньою, тобто $K \neq$ $\neq (2^C)^D \setminus C^D$. Щоб визначити клас K, доведемо наступну лему.

Лема 1. $a(\bullet) \in K$ для (1) тоді і тільки тоді, коли знайдуться такі: відношення переваг на наслідках $(C, \geq)$, різні рішення $d_1, d_2 \in D$ і наслідки $c_1, c_2 \in$ $\in a(d_1), c_3, c_4 \in a(d_2)$, що $c_1 < c_3, c_2 > c_4$.

Доведення.

Необхідність.

За $(C, \geq)$ візьмемо деяке відношення переваг на наслідках, у якого за умовою можливі різні проекції на множину рішень D.

Припустимо протилежне. Це означатиме, що $\forall d_1, d_2 \in D, d_1 \neq d_2$ виконується умова або $a(d_1) <$ $< a(d_2), Card(a(d_1) \cap a(d_2)) \leq 1$, або $a(d_1) > a(d_2)$, $Card(a(d_1) \cap a(d_2)) \leq 1$, або $a(d_1) = a(d_2)$, $Card(a(d_1)) = 1$.

Тоді для ТПР з $(C, \geq)$, з огляду на U_1 і U_2, існує єдине $(D, \succcurlyeq)$, а саме $d_1 \succcurlyeq d_2 \Leftrightarrow a(d_1) \geq a(d_2)$, $\forall d_1, d_2 \in D$. Це суперечить неоднозначності вибору відношення переваг на альтернативах.

Достатність.

Візьмемо ТПР саме з цим відношенням переваг на наслідках $(C, \geq)$. За умовою існують такі $d', d'' \in D, d' \neq d'', c_1, c_2 \in a(d'), c_3, c_4 \in a(d'')$, що $c_1 < c_3$, $c_2 > c_4$. Нехай $(D, \succcurlyeq')$ деяке відношення переваг на альтернативах цього ТПР (таке існує, наприклад, лексикографічне відносно $(C, \geq)$), тоді за інше відношення переваг іншого ТПР на альтернативах візьмемо $(D, \succcurlyeq'')$ таке, що

$$d_1 \succcurlyeq'' d_2 \Leftrightarrow \begin{cases} d_1 \succcurlyeq d_2, \text{ або} \\ d_1 \preccurlyeq' d_2, d_1 \not\succcurlyeq d_2. \end{cases}$$

Лема 2. Необхідні і достатні умови в лемі 1 рівносильні тому, що мають знайтися різні d_1, $d_2 \in D$ і наслідки $c_1, c_2 \in a(d_1), c_3, c_4 \in a(d_2)$, що або $c_1 < c_3 < c_2$, або $c_1 = c_3, c_2 = c_4, c_1 \neq c_2$.

Доведення.

Необхідність.

Нехай для $d_1, d_2, c_1, c_2, c_3, c_4$ виконуються умови леми 1, то, не зменшуючи загальності, можна вважати, що $c_1 \leq c_2$. Якщо $c_1 = c_2$, то, позначаючи $c_1' = c_4, c_3' = c_4' = c_1, c_2' = c_3$, отримуємо для c_1', c_2', c_3', c_4' першу умову леми 2. Якщо $c_1 < c_2$, то, якщо $c_3 > c_2$, отримуємо для $c_1' = c_4, c_2' = c_3, c_3' = c_2, c_4' = c_1$ знову першу умову леми 2. Аналогічно $c_3 < c_2$. У випадку $c_3 = c_2$, якщо $c_1 = c_4$, то маємо при $c_1' = c_1, c_2' = c_2, c_3' = c_3, c_4' = c_4$ другу умову леми 2. І, нарешті, якщо $c_1 \neq c_4$, нехай, наприклад, $c_4 > c_1$, то при $c_1' = c_1, c_2' = c_2, c_3' = c_4, c_4' = c_3$.

Достатність.

Нехай для $d_1, d_2, c_1, c_2, c_3, c_4$ використовуються умови леми 2, то, якщо $c_1 < c_3 < c_2$, то для $c_1' = c_1, c_2' = c_2, c_3' = c_4' = c_3$ використовується умова леми 1, а якщо $c_1 = c_3 > c_2 = c_4$, то для $c_1' = c_2, c_2' = c_1, c_3' = c_3, c_4' = c_4$ виконується умова леми 1.

З цих лем відразу випливає така теорема:

Теорема 1. $Z_\Lambda(1)$ буде описувати схему СЗР тоді і тільки тоді, коли $a(\bullet)$ таке, в якого існують різні $d_1, d_2 \in Doma$ і різні c_1, c_2, деяких або $a(d_1) = a(d_2) = \{c_1, c_2\}$, або існує c_3, ще що не збігається з c_1 і c_2, що $c_1, c_2 \in a(d_1)$, а $c_3 \in a(d_2)$.

На відміну від СЗР з повною невизначеністю змодельованої лотерейної схеми $Z_\Lambda(1)$, зустрічаються випадки, коли в СЗР присутній не спостережуваний параметр. Таку ситуацію ми будемо називати матричною (точніше, об'єктивно матричною).

Означення 4. Матричною схемою СЗР будемо називати четвірку

$$Z_M = (\Omega, D, C, g(\bullet,\bullet)), \tag{2}$$

де Z_M ($Z_M(\Omega, D, C, g(\bullet,\bullet))$, коли треба конкретизувати Z_M) – позначення матричної схеми СЗР, D і C, як і вище, – простори рішень і наслідків відповідно, Ω – параметричний простір (простір не спостережуваного параметру), а $g(\bullet,\bullet)$ – функція доходів [М. Де Гроот, 1974], тобто $g(w,d) \in C, \forall \omega \in \Omega, \forall d \in D$. Зрозуміло, що матрична СЗР природно виникає, коли в умові ЗР присутній реальний параметричний простір Ω. У цьому випадку, щоб підкреслити це, відповідну матричну схему будемо позначати Z_{OM} (об'єктивно матрична). Остання обставина виникає далеко не завжди, хоча зрозуміло, що для завдань безпосереднього прийняття рішень лотерейна ситуація підходить в жодному разі не менше, аніж матрична. Але стан справ різко змінюється, щойно ми забажаємо перед прийняттям рішення провести експеримент щодо отримання додаткової інформації, тобто провести спостереження. Якщо користуватися лотерейною схемою ситуації, то формули і міркування виявляються вкрай громіздкими [Иваненко В. И., Лабковский В. А., 1980]. Тому в основі математичної моделі ЗР здебільшого розглядається матрична схема СЗР (статистичні задачі рішення [Де Гроот М., 1974], загальна задача рішення [Иваненко В. И., Лабковский В. А., 1980]). Тому постає питання, як співвідносяться лотерейна і матрична схеми СЗР? Виявляється, що вони в певному розумінні еквівалентні.

Для доведення цього факту перейдемо від матричної схеми СЗР $Z_M(2)$ до лотерейної Z_Λ (1) тієї ж ситуації. Як багатозначне відображення a маємо вибрати таке, що

$$a(d) = \{g(\omega, d) : \omega \in \Omega\}, \forall d \in D \tag{3}$$

Таку операцію будемо називати операцією проектування і позначати π. Таким чином π: $\mathbb{Z}_M = \{Z_M(\bullet,\bullet,\bullet,\bullet)\} \to \mathbb{Z}_\Lambda = \{Z_\Lambda(\bullet,\bullet,\bullet,\bullet)\}$, де $\mathbb{Z}_M$ і $\mathbb{Z}_\Lambda$ класи всіх матричних і всіх лотерейних схем відповідно. Виявляється, що операція проектування π є сюр'єкцією $\mathbb{Z}_M$ в $\mathbb{Z}_\Lambda$. Для доведення останнього твердження здійснимо обережний перехід від лотерейної схеми ситуації $\mathbb{Z}_\Lambda$ до матричної Z_M таким чином, щоб проекція останньої збігалась з $\mathbb{Z}_\Lambda$. Для цього за параметричний простір Ω виберемо $\Omega = \{\omega \in C^D : \omega(d) \in a(d), \forall d \in D\}$, а функцію q визначимо таку, що $g(\omega, d) = \omega(d), \forall \omega \in \Omega, \forall d \in D$. Таке відображення $\mathbb{Z}_\Lambda$ в $\mathbb{Z}_M$ позначимо τ. Тоді, враховуючи (3), маємо

$$\pi[\tau(Z_\Lambda)] = \pi[\tau(D, C, a(\bullet))] = \pi(\{\omega \in C^D : \omega(d) \in a(d), \forall d \in D\}, D, C, (g(\bullet,\bullet) : g(\omega, d) = \omega(d), \forall w \in \Omega, \forall d \in D)) = (D, C, \{\omega(d) : \omega \in \Omega\}) = (D, C, a(\bullet)) = Z_\Lambda, \forall Z_\Lambda \in \mathbb{Z}_\Lambda.$$

Отриманий результат сформулюємо у вигляді такої теореми.

Теорема 2. Клас СЗР, які мають схематичне представлення в матричному вигляді (2), збігається з класом СЗР, які мають схематичне представлення в лотерейному вигляді (1). Тобто $\mathbb{Z}_M = \mathbb{Z}_\Lambda$.

Для того, щоб відрізнити матричні схеми ситуації ЗР, побудова яких потребує штучного суб'єктивного (теорема 2) введення простору неспостережуваного параметру, від тих, у яких цей простір присутній, об'єктивно будемо позначати їх відповідно Z_{CM} (суб'єктивна матрична схема ситуації) і Z_{OM} (об'єктивна матрична схема ситуації). Тоді для відображення τ з теореми 2 маємо $\tau(Z_\Lambda) = Z_{CM}$.

Нарешті, з теореми 1 і 2 відразу випливає критерій СЗР на матричній мові.

Теорема 3. $Z_M(2)$ буде описувати схему СЗР тоді і тільки тоді, коли $g(\bullet,\bullet)$ така, що існують різні $d_1, d_2 \in D$, для яких або $g(\Theta, d_1) = g(\Theta, d_2)$ і $Card(g(\Theta, d_1)) = 2$, або знайдуться $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \Theta$, що $g(\theta_1, d_1) \neq g(\theta_2, d_1) \neq (\theta_3, d_2)$.

1. *Блекуэлл Д., Гиршик М.* Теория игр и статистических решений.– М.: ИЛ, 1958.
2. *Де Грот М.* Оптимальные статистические решения.– М.: Мир, 1974.– 491 с.
3. *Иваненко В. И., Лабковский В. А.* Проблема неопределенности в задачах принятия решений.– К.: Наук. думка, 1990.– 135 с.
4. *Льюс Р. Д., Райфа Х.* Игры и решения.– М.: ИЛ, 1961.– 642 с.
5. *Нейман Дж., Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение.– М.: Наука, 1970.– 770 с.
6. *Фишберн П.* Теория полезности для принятия решений.– М.: Наука, 1978.– 352с.

V. Myhajlevych

TO THE CLASIFICATION OF DECISION PROBLEMS

To classify decision problems on the deterministic problems and problems with the uncertainty this paper provides a criterion of the uncertainty existence.