

Лаврик В. І., Власюк А. П., Мартинюк П. М., Герасимчук В. С.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОДНОВИМІРНОЇ ЗАДАЧІ ФІЛЬТРАЦІЙНОЇ КОНСОЛІДАЦІЇ З УРАХУВАННЯМ ТЕРМОПОВЗУЧОСТІ СКЕЛЕТА ҐРУНТУ

Побудовано математичну модель консолідації ґрунтів з урахуванням впливу теплопереносу та термоповзучості скелета ґрунту. Числовий розв'язок відповідної одновимірної крайової задачі знайдено методом скінченних різниць. Проведено ряд числових експериментів.

1. Вступ

При зведенні споруд у ґрунтових основах відбувається зміна напружено-деформованого стану, в результаті чого ґрунт переходить у нестабілізований стан. Для насичених ґрунтів однією з характеристик їх нестабілізованого стану є надлишкові напори в поровій рідині. Розсіюванням цих напорів характеризується процес ущільнення ґрунту. В науковій літературі цей процес отримав назву фільтраційної консолідації [8, 14]. Дослідження фільтраційної консолідації є важливим з точки зору безпеки експлуатації будівель, зведених на насичених ґрунтах, а також гідротехнічних споруд, ущільнення яких відбувається під впливом власної ваги ґрунту.

Ущільнення або набухання ґрунтів може бути наслідком не лише зовнішніх навантажень або власної ваги ґрунту, але і техногенних впливів. Як показано в роботах [1–3, 5, 13], зміна сольового режиму порового розчину значно впливає на стан надлишкових напорів у ґрунті. Це саме стосується і впливу теплопереносу [4, 6, 7]. Залежність коефіцієнта фільтрації від температури [9] та наявність термічної осмотичної фільтрації [4, 7] впливає на проходження фільтраційної консолідації ґрунту.

Також зміна теплового режиму ґрунтового середовища зумовлює явище термоповзучості скелета ґрунту [10]. Повзучість скелета ґрунту враховано в задачах фільтраційної консолідації в умовах солепереносу в працях [1, 2, 13]. Тому врахування явища термоповзучості становить інтерес при математичному моделюванні фільтраційної консолідації ґрунтів в неізотермічному режимі.

Метою даної статті є дослідження та аналіз впливу теплопереносу на проходження процесу фільтраційної консолідації ґрунтів при врахуванні термоповзучості скелета ґрунту.

2. Математична модель задачі

Згідно з теорією термоповзучості та експериментами, проведеними С. Р. Месцяном [10],

$$e = e_0 - At^{m_1} T^{m_2} \sigma^{m_3}, \quad (1)$$

де e – коефіцієнт пористості; t – час; σ – напруження в скелеті ґрунту; T – температура; e_0 – початкове значення коефіцієнта пористості; A , m_1 , m_2 , m_3 – константи, які визначаються експериментальним шляхом.

Якщо врахувати вплив на швидкість фільтрації явищ термічного осмосу та залежність коефіцієнта фільтрації від температури [9], то закон Дарсі–Герсеванова в одновимірному випадку набуває вигляду [4, 5]

$$u = e\nu - k(T) \frac{\partial h}{\partial x} + \mu \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (2)$$

де u – швидкість фільтрації; ν – швидкість руху твердих частинок ґрунту; $k(T)$ – коефіцієнт фільтрації; μ – коефіцієнт термічного осмосу; h – надлишковий напір.

З урахуванням (2) рівняння консолідації в одновимірному випадку набуває вигляду [4, 8, 14]

$$(1 + e) \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right) = \frac{de}{dt}. \quad (3)$$

Враховуючи залежність (1), отримаємо

$$\frac{de}{dt} = \frac{\partial e}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial e}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial e}{\partial t}. \quad (4)$$

Тоді з (3), з урахуванням (4), маємо

$$(1 + e) \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right) = \frac{\partial e}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial e}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial e}{\partial t}. \quad (5)$$

Відповідно до основної розрахункової моделі Флоріна [14]

$$\sigma^* + p^* = \sigma + p,$$

і, враховуючи, що $h = p/\gamma$, отримуємо

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial \sigma^*}{\partial t} + \gamma \frac{\partial h^*}{\partial t} - \gamma \frac{\partial h}{\partial t}.$$

Тоді з (5) маємо

$$\begin{aligned} & \frac{1+e}{e_0-e} \left(\frac{\partial}{\partial x} (k(T) \frac{\partial h}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial x} (\mu \frac{\partial T}{\partial x}) \right) = \\ & = \gamma \frac{m_3}{\sigma} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{m_2}{T} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{m_3}{\sigma} \frac{\partial \sigma^*}{\partial t} - \gamma \frac{m_3}{\sigma} \frac{\partial h^*}{\partial t} - \frac{m_1}{t}. \end{aligned}$$

Зважаючи, що $\sigma = \sigma^* + p^* - \gamma h$, отримуємо

$$\begin{aligned} & \frac{1+e}{e_0-e} \left(\frac{\partial}{\partial x} (k(T) \frac{\partial h}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial x} (\mu \frac{\partial T}{\partial x}) \right) = \\ & = \gamma \frac{m_3}{\sigma^* + p^* - \gamma h} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{m_2}{T} \frac{\partial T}{\partial t} - \\ & - \frac{m_3}{\sigma^* + p^* - \gamma h} \left(\frac{\partial \sigma^*}{\partial t} + \gamma \frac{\partial h^*}{\partial t} \right) - \frac{m_1}{t}. \end{aligned} \quad (6)$$

Якщо припустити, що навантаження на ґрунт є миттєво прикладеним і незмінним у часі, то

$$p^* = 0 \quad \text{і} \quad \frac{\partial \sigma^*}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial p^*}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial h^*}{\partial t} = 0.$$

Тоді рівняння (6) набуває вигляду

$$\begin{aligned} & \frac{1+e}{e_0-e} \left(\frac{\partial}{\partial x} (k(T) \frac{\partial h}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial x} (\mu \frac{\partial T}{\partial x}) \right) = \\ & = \gamma \frac{m_3}{\sigma^* - \gamma h} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{m_2}{T} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{m_1}{t}. \end{aligned} \quad (7)$$

Рівняння теплопереносу в ґрунті має вигляд [9]

$$\frac{\partial}{\partial x} (\lambda \frac{\partial T}{\partial x}) - \rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} = c_T \frac{\partial T}{\partial t},$$

де λ – коефіцієнт теплопровідності; ρ – густина порової рідини; c_p – питома теплоємність порової рідини; c_T – об'ємна теплоємність ґрунту.

Розглянемо одновимірну задачу ущільнення ґрунту під впливом миттєво прикладеного, незмінного у часі рівномірного зовнішнього навантаження інтенсивністю q (рис. 1). Нижню та верхню межі масиву ґрунту будемо вважати дренажними, температура на яких відома.

Враховуючи вищенаведені міркування, математична модель даної задачі фільтраційної кон-

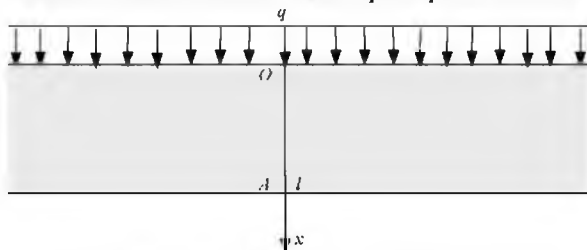


Рис. 1. Консолідація шару ґрунту під впливом рівномірно прикладеного зовнішнього навантаження

солідації з урахуванням термоповзучості скелета ґрунту описується такою крайовою задачею:

$$\begin{aligned} & \frac{1+e}{e_0-e} \left(\frac{\partial}{\partial x} (k(T) \frac{\partial h}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial x} (\mu \frac{\partial T}{\partial x}) \right) = \\ & = \gamma \frac{m_3}{\sigma^* - \gamma h} \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{m_2}{T} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{m_1}{t}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\lambda \frac{\partial T}{\partial x}) - \rho c_p u \frac{\partial T}{\partial x} = c_T \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (9)$$

$$u = -k(T) \frac{\partial h}{\partial x} + \mu \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (10)$$

$$h(x,0) = h_0(x), \quad T(x,0) = T_0(x), \quad (11)$$

$$h(0,t) = h(l,t) = 0, \quad (12)$$

$$T(0,t) = T_1(t), \quad T(l,t) = T_{\min}. \quad (13)$$

У рівняння (8) входить величина σ^* – напруження у скелеті ґрунту в умовах повної стабілізації. Визначення σ^* є окремою непростюю задачею. У випадку прикладення миттєвого навантаження інтенсивністю q в одновимірному випадку розв'язок візьмемо з роботи [8]:

$$\sigma^* = \frac{2q}{\pi x}.$$

Функцію $T_1(t)$ задаємо з умов сезонних коливань температури

$$T_1(t) = 17 + 13 \cos \frac{\pi t}{180},$$

причому $T_{\max} = 30^\circ\text{C}$, $T_{\min} = 4^\circ\text{C}$.

У випадку повністю водонасиченого ґрунту згідно з принципом гідроємності Герсеванова [14] все прикладене навантаження в початковий момент часу передається на порову воду. Тому

$$h_0(x) = \frac{q}{\gamma}.$$

Також зазначимо, що в законі (10) ми знехтували швидкістю руху твердої фази ґрунту.

3. Числове розв'язання крайової задачі

Для числового розв'язання крайової задачі (8)–(13) застосуємо метод скінченних різниць. Для дискретизації рівняння (8) використаємо суто неявну різницеву схему, а для рівняння (9) – монотонну різницеву схему Самарського [11]. Покриємо область $\bar{Q}_{t_0} = [0; l] \times [0; t_0]$ рівномірною сіткою з кроками h_x та τ відповідно по змінній x та часу t . Нехай m_1 – кількість кроків по просторовій змінній, n_1 – кількість кроків по часу. В результаті отримаємо

$$\frac{h_i^{(j+1)} - h_i^{(j)}}{\tau} = D_i^{(j+1)} (a_{i+1}^{(j)} \frac{h_{i+1}^{(j+1)} - h_i^{(j+1)}}{h_x^2} - \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
 & -\alpha_i^{(j)} \frac{h_i^{(j+1)} - h_{i-1}^{(j+1)}}{h_x^2} + F_i^{(j+1)}, \\
 c_T \frac{T_i^{(j+1)} - T_i^{(j)}}{\tau} = & \\
 = \eta_i^{(j+1)} \frac{T_{i+1}^{(j+1)} - 2T_i^{(j+1)} + T_{i-1}^{(j+1)}}{h_x^2} + & \\
 + (r^+)_i^{(j+1)} \frac{T_{i+1}^{(j+1)} - T_i^{(j+1)}}{h_x} + & \quad (15) \\
 + (r^-)_i^{(j+1)} \frac{T_i^{(j+1)} - T_{i-1}^{(j+1)}}{h_x}, & \\
 i = \overline{1, m_1 - 1}, \quad j = \overline{0, n_1 - 1}, &
 \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
 \alpha_i^{(j)} &= \frac{1}{2}(k_i^{(j)} + k_{i-1}^{(j)}), \\
 D_i^{(j+1)} &= \frac{\sigma^* - \gamma h_i^{(j)}}{\gamma m_3} \frac{1 + e(t_{j+1}; T_i^{(j+1)}; x_i; h_i^{(j)})}{e_0 - e(t_{j+1}; T_i^{(j+1)}; x_i; h_i^{(j)})}, \\
 \eta_i^{(j+1)} &= \frac{\lambda}{1 + \frac{h_x |u_i^{(j+1)}| \rho c_p}{2\lambda}}, \\
 (r^-)_i^{(j+1)} &= \frac{-u_i^{(j+1)} - |u_i^{(j+1)}|}{2} \rho c_p, \\
 (r^+)_i^{(j+1)} &= \frac{-u_i^{(j+1)} + |u_i^{(j+1)}|}{2} \rho c_p, \\
 u_i^{(j+1)} &= -k \frac{h_{i+1}^{(j)} - h_{i-1}^{(j)}}{2h_x} + \mu \frac{T_{i+1}^{(j)} - T_{i-1}^{(j)}}{2h_x}, \\
 F_i^{(j+1)} &= \frac{\sigma^* - \gamma h_i^{(j)}}{\gamma m_3} \left(\frac{m_2}{T_i^{(j+1)}} \cdot \frac{T_i^{(j+1)} - T_i^{(j)}}{\tau} + \frac{m_1}{t_{j+1}} - \right. \\
 & \left. - \mu \frac{1 + e(t_{j+1}; T_i^{(j+1)}; x_i; h_i^{(j)})}{e_0 - e(t_{j+1}; T_i^{(j+1)}; x_i; h_i^{(j)})} \cdot \frac{T_{i+1}^{(j+1)} - 2T_i^{(j+1)} + T_{i-1}^{(j+1)}}{h_x^2} \right).
 \end{aligned}$$

Для початкових умов (11) отримаємо такі скінченнорізницеві аналоги:

$$h_i^{(0)} = h_0(ih_x), \quad T_i^{(0)} = T_0(ih_x), \quad i = \overline{0, m_1}.$$

Для знаходження напору $h(x, t)$ використаємо метод прогонки. Для цього зведемо рівняння (14) до прогоночного вигляду

$$a_i h_{i-1}^{(j+1)} - c_i h_i^{(j+1)} + b_i h_{i+1}^{(j+1)} = -F_i^{(j+1)} - \frac{h_i^{(j)}}{\tau},$$

де

$$\begin{aligned}
 a_i &= \frac{D_i^{(j+1)} a_i^{(j)}}{h_x^2}, \quad c_i = \frac{1}{\tau} + \frac{D_i^{(j+1)} a_{i+1}^{(j)}}{h_x^2} + \frac{D_i^{(j+1)} a_i^{(j)}}{h_x^2}, \\
 a_i &= \frac{D_i^{(j+1)} a_{i+1}^{(j)}}{h_x^2}.
 \end{aligned}$$

Значення напорів на часовому шарі $(j + 1)$ послідовно знаходимо, використовуючи співвідношення

$$h_i^{(j+1)} = \alpha_{i+1} h_{i+1}^{(j+1)} + h_{i+1},$$

$$\text{де } \alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - a_i \alpha_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{a_i \beta_i + F_i^{(j+1)} + \frac{h_i^{(j)}}{\tau}}{c_i - a_i \alpha_i}.$$

Для знаходження температури $T(x, t)$ також використаємо метод прогонки. Для цього зведемо рівняння (15) до прогоночного вигляду

$$a_i T_{i-1}^{(j+1)} - c_i T_i^{(j+1)} + b_i T_{i+1}^{(j+1)} = f_i,$$

де

$$\begin{aligned}
 a_i &= \frac{\eta_i^{(j+1)} (r^-)_i^{(j+1)}}{h_x^2} - \frac{(r^+)_i^{(j+1)}}{h_x}, \\
 c_i &= \frac{c_T}{\tau} + \frac{2\eta_i^{(j+1)}}{h_x^2} + \frac{(r^+)_i^{(j+1)}}{h_x} - \frac{(r^-)_i^{(j+1)}}{h_x}, \\
 b_i &= \frac{\eta_i^{(j+1)}}{h_x^2} + \frac{(r^+)_i^{(j+1)}}{h_x}, \quad f_i = -\frac{c_T}{\tau} T_i^{(j)}.
 \end{aligned}$$

Значення температури на часовому шарі $(j + 1)$ послідовно знаходимо, використовуючи співвідношення

$$T_i^{(j+1)} = \alpha_{i+1} T_{i+1}^{(j+1)} + \beta_{i+1},$$

$$\text{де } \alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - a_i \alpha_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{a_i \beta_i - f_i}{c_i - a_i \alpha_i}.$$

4. Результати числових експериментів

Для з'ясування ступеня впливу термоповзучості скелета ґрунту на процес його фільтраційної консолідації розглянемо масив ґрунту товщиною $l = 10$ м. Кількість кроків по просторовій змінній у різницевій схемі $m_1 = 500$ і крок по часу $\tau = 30$ діб. У роботі [10] наведено таку залежність для термоповзучості скелета ґрунту:

$$e = e_0 - 0,01165 t^{0,032} T^{0,22} \left(\frac{\sigma}{10^5} \right)^{0,63},$$

де $A = 0,01165 \cdot 10^{-3,15}$; $m_1 = 0,032$; $m_2 = 0,22$; $m_3 = 0,63$. Усі інші числові дані приймемо наступними:

$$e_0 = 0,7; k = 0,0001 \text{ м/доба}; \mu = 2,8 \cdot 10^{-6} \frac{\text{М}^2}{\text{°С} \cdot \text{доба}};$$

$$\gamma = 10^4 \frac{\text{Па}}{\text{М}}; q = 10^5 \text{ Па}; l = 10 \text{ м};$$

$$\lambda = 108 \frac{\text{кДж}}{\text{М} \cdot \text{°С} \cdot \text{доба}}; \rho = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{М}^3}; c_p = 4,2 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{°С}};$$

$$C_T = 2137 \frac{\text{кДж}}{\text{М}^3 \cdot \text{°С}}.$$

Графіки розподілу надлишкових напорів та температури з урахуванням термоповзучості скелета ґрунту наведено на рис. 2 та рис. 3 відповідно.

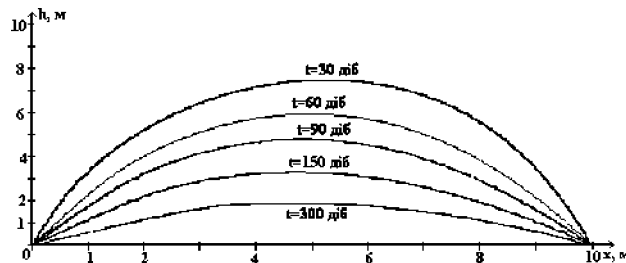


Рис. 2. Графіки розподілу надлишкових напорів

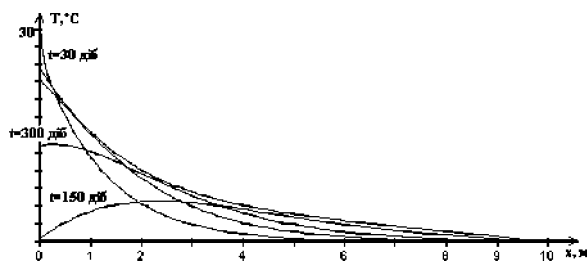


Рис. 3. Графіки температури

Слід зазначити, що розподіл надлишкових

напорів є несиметричним по області. Це пояснюється розподілом температури в масиві ґрунту та урахуванням явищ термоповзучості скелета ґрунту і термічного осмосу.

Оскільки для ґрунтів, що для них отримано рівняння термоповзучості, немає даних по простій компресійній залежності, то неможливо порівняти результати досліджень з урахуванням та без урахування термоповзучості скелета ґрунту.

Основним підсумком проведених у роботі досліджень є розвиток актуального напрямку в математичному моделюванні і прогнозуванні складних фізико-хімічних процесів підземної гідромеханіки стосовно нової неklasичної постановки і розв'язування крайових задач фільтраційної консолідації ґрунтів з урахуванням впливу температури на повзучість скелета ґрунту. Зокрема, в роботі побудовано математичну модель фільтраційної консолідації ґрунтів з урахуванням впливу температури на повзучість скелета; знайдено числовий розв'язок відповідної крайової задачі методом скінчених різниць в одновимірному випадку; проведено числові експерименти та здійснено їх аналіз.

1. Булавацький В. М., Лаврик В. І. Математичне моделювання процесу фільтраційної консолідації з урахуванням дифузійної нерівноважності та масообміну // Наукові записки Національного університету «Кієво-Могилянська академія». Фізико-математичні науки. – 2006. – Том 51. – С. 7–10.
2. Булавацький В. М., Кривонос Ю. Г., Скопецький В. В. Некласичні математичні моделі процесів тепло- та масопереносу. – К.: Наук. думка, 2005. – 282 с.
3. Власюк А. П., Мартинюк П. М. Чисельне розв'язання одного класу задач, що зустрічаються в теорії фільтраційної консолідації // Доп. НАН України. – 2000. – № 12. – С. 65–72.
4. Власюк А. П., Мартинюк П. М. Фільтраційна консолідація ґрунтового масиву за наявності перенесення солей у неізотермічному режимі // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. інформ. – 2003. – Вип. 7. – С. 138–147.
5. Власюк А. П., Мартинюк П. М. Математичне моделювання консолідації ґрунтів в процесі фільтрації сольових розчинів. – Рівне: Вид-во УДУВГП, 2004. – 211 с.
6. Власюк А. П., Мартинюк П. М. Порівняльний аналіз чисельних розв'язків двовимірної задачі фільтраційної консолідації ґрунтового масиву при наявності переносу солей в неізотермічному режимі // Вісник Київського ун-ту. Серія фіз.-матем. науки. – 2004. – Вип. 3. – С. 165–176.
7. Власюк А. П., Мартинюк П. М. Числове моделювання стабілізованими схемами МСЕ фільтраційної консолідації тіла ґрунтової греблі з урахуванням тепломасопереносу // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – 48, № 2. – С. 59–70.
8. Иванов П. Л. Грунты и основания гидротехнических сооружений. – М.: Высшая школа, 1991. – 447 с.
9. Ляшко И. П., Демченко Л. П., Мистецкий Г. Е. Численное решение задач тепло- и массопереноса в пористых средах. – К.: Наук. думка, 1991. – 264 с.
10. Месчан С. Р. Простейшие методы определения компрессионной термоповзучести скелета водонасыщенных глинистых грунтов // Основания, фундаменты, механика грунтов. – 1999. – № 2. – С. 14–17.
11. Самарский А. А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989. – 616 с.
12. Самарский А. А., Николаев В. С. Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 592 с.
13. Скопецький В. В., Булавацький В. М. Математичне моделювання деяких процесів фільтраційної консолідації масивів, насичених сольовими розчинами // Доповіді НАН України. – 2005. – № 8. – С. 55–61.
14. Флорин В. А. Основы механики грунтов. – М.: Гостройиздат, 1961. – Т. 2. – 544 с.

V. Lavryk, A. Vlasyuk, P. Martinyuk, V. Gerasimchuk

THE MATHEMATICAL MODELLING OF A ONE-DIMENSIONAL FILTRATION CONSOLIDATION PROBLEM TAKING INTO ACCOUNT THE THERMAL CREEP OF SOIL

The mathematical model of the soil layer filtration consolidation problem taking into account the heat transfer and thermal creep of the soil skeleton has been formulated. The numerical solution of the corresponding one-dimensional boundary-value problem has been found by the finite difference method. As an example, the clayey soil layer infinite width filtration consolidation problem has been investigated. Numerical experiments and their analyses have been carried out.