УДК 517.98

Кашпіровський О. І., Семенів О. В., Яценко В. О.

ПРО ЛОКАЛЬНІ АПРОКСИМАЦІЇ ОБМЕЖЕНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕСКІНЧЕННИХ СИСТЕМ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

Для обмежених розв'язків нескінченних систем різницевих рівнянь одержані локальні асимптотичні формули наближень, які є аналогом локальних сплайнів мінімального дефекту. Такі наближення можуть бути використані при розв'язанні прикладних задач, в в яких виникають різницеві рівняння.

У даній роботі досліджується звязок між сплайнами [1–4] та обмеженими розв'язками нескінченних систем різницевих рівнянь (НСРР) [5–8]

$$u_{k-1} - 2Au_k + u_{k+1} = F_k, \qquad (1)$$

де $k \in Z$, $Z = \{0;\pm1;\pm2;...\}$ – множина цілих чисел, $\{u_k, k \in Z\}$ – невідома числова послідовність, $\{F_k, k \in Z\}$ – задана обмежена числова послідовність

$$|F_k| \le C < +\infty.$$

Зауважимо, що числа u_k, F_k, A в залежності від задачі можуть бути або дійсними, або комплексними. Виявляється, що подібно сплайнам обмежені розв'язки (1) мають за певних умов яскраво виражені локальні властивості. Значення u_k – k-ої компоненти розв'язку суттєво залежить лише від обмеженої кількості елементів правих частин F_j. Залежність u_k від F_j при зростанні $|j-k|$ спадає зі швидкістю геометричної прогресії. Якщо F_j є значеннями в вузлах рівномірної сітки з кроком h гладкої функції $F(x)$, то для u_k можна побудувати апроксимації лінійною комбінацією $F_j |j-k| \le r$, як це зроблено для локальних сплайнів мінімального дефекту [3, 4, 9–11]. Побудова таких апроксимацій для розв'язків різницевих рівнянь є можливою альтернативою відомого методу прогонки [12–13].

Згадаємо спочатку деякі факти відносно сплайнів. На відміну від [1–4], будемо розглядати побудову сплайнів на всій дійсній осі. Саме при такому підході задача визначення параметрів сплайна приводить до розв'язання НСРР типу (1).

Отже, нехай функція $f(x)$ з простору $C^4(R^1)$, де $C^k(R^1)$, $k \in N$ простір всіх неперервних й обмеженних на дійсній осі $R^1 = (-\infty, +\infty)$ функцій, які мають неперервні й обмежені похідні до k-го порядку включно, а отже

$$\|f\|_{C^k(R^1)} = \sup_{x\in R^1}(|f(x)| + |f^{(k)}(x)|) < +\infty.$$

Нехай

$$y_k = f(x_k),$$

значення цієї функції в вузлах x_k рівномірної сітки $\{x_k, k\in Z\}$,

$$x_k = kh,$$

де $h > 0$ задане число (крок сітки $\{x_k, k\in Z\}$). Тоді кубічний інтерполяційний сплайн $S_3(f,x)$ на кожному проміжку $[x_k, x_{k+1}]$ буде збігатися з деяким кубічним многочленом $P_3(f,k,x) = P_3(k,x)$, $k\in Z$. У вузлах x_k мають виконуватись умови інтерполяції

$$S_3(f,x) = P_3(k-1, x_k) = P_3(k, x_k) = y_k, k\in Z. \quad (2)$$

Крім того, перша та друга похідні сплайна мають бути неперервними у вузлах x_k, тобто

$$S_3'(f,x_k) = P_3'(k-1, x_k) = P_3'(k, x_k), \quad (3)$$
$$S_3''(f,x_k) = P_3''(k-1, x_k) = P_3''(k, x_k), k\in Z. \quad (4)$$

Умови інтерполяції (2) та умови неперервності похідних (3)–(4) «зшивають» поліноми $P_3(k,x)$, які розглядаються на окремих проміжках $[x_k, x_{k+1}]$ у двічі неперервно диференційовану на всій дійсній осі R^1 функцію. Ця функція, власне, і є сплайном $S_3(f,x)$. На кожному проміжку $[x_k, x_{k+1}]$ сплайн допускає представлення у формі Ерміта [3, с. 97]

$$S_3(f,x) = y_k(1-t)^2(1+2t) + y_{k+1}t^2(3-2t) + m_k ht(1-t)^2 + m_{k+1}ht^2(t-1), \quad (5)$$

де $t = \dfrac{(x-x_k)}{h}$ – нормована змінна.

Параметри $m_k = S_3'(f,x_k)$ визначаються із НСРР типу (1)

$$m_{k-1} + 4m_k + m_{k+1} = \frac{3(y_{k+1} - y_{k-1})}{h}, k\in Z. \quad (6)$$

Система (6) одержується з умов (4) неперервності другої похідної $S_3(f,x)$. Зауважимо, що умови інтерполяції (2) та гладкості першої похідної для представлення (5) виконуються автоматично. В іншому еквівалентному (5) представленні сплайна $S_3(f,x)$ використовуються похідні другого порядку в вузлах $x_k, M_k = S_3''(f,x_k)$.

На кожному проміжку $[x_k, x_{k+1}]$ маємо [3, с. 99]

$$S_3(f,x) = y_k(1-t) + y_{k+1}t + \frac{h^2}{6}t(t-1)[(2-t)M_k + (1+t)M_{k+1}]. \quad (7)$$

Параметри $M_k, k\in Z$ також визначаються з НСРР типу (1)

$$M_{k-1} + 4M_k + M_k = 3\cdot\frac{f_{k-1} - 2f_k + f_{k+1}}{h^2}, \quad (8)$$

які є наслідком умов (4). Умови (2) і (4) для представлення (7) виконуються автоматично.

Зауважимо: оскільки ми розглядаємо сплайн-апроксимацію на всій дійсній осі, то до системи (6) та (8) не потрібно долучати граничні умови, як це відбувається у випадку сплайн-апроксимації на скінченному відрізку [1–4].

Для кубічних сплайнів класу C^2 розглядаються також представлення через базисні В-сплайни [2–4]

$$S_3(f,x) = \sum_{k\in Z} b_k(f)B_k(x), \quad (9)$$

де $b_k = b_k(f)$ коефіцієнти розвинення функції $f(x)$ за базисом $\{B_k(x), k\in Z\}$. Базисні сплайни $B_k(x)$, $k\in Z$ одержуються за допомогою стандартизованого кубічного В-сплайна

$$\overline{B}(t) = \begin{cases} \frac{1}{6}(4-6t^2+3|t|^3), \text{ якщо } |t|\le 1; \\ \frac{1}{6}(2-|t|)^3, \text{ якщо } 1\le |t|\le 2; \\ 0, \text{ якщо } |t|\ge 2; \end{cases}$$

шляхом зсувів та перетворень подібності

$$B_k(x) = B_0(x-x_k) = \overline{B}(\frac{x-x_k}{h}), k\in Z.$$

Оскільки $\overline{B}(t)$ є кубічним сплайном класу C^2, який обертається в 0 зовні проміжку (–2, 2), то $B_k(x)$, $k\in Z$ також є фінітними сплайнами з носіями $[x_{k-2}, x_{k+2}]$. Таким чином, для кожного $x\in R^1$ ряд (9) має не більше п'яти відмінних від 0 доданків. Враховуючи, що

$$\overline{B}(0) = \frac{2}{3}, \overline{B}(1) = \overline{B}(-1) = \frac{1}{6},$$
$$\overline{B}(k) = \overline{B}(-k) = 0, k\in Z, k\ge 2,$$

то для визначення $b_k = b_k(f)$ одержуємо систему різницевих рівнянь

$$\frac{1}{6}b_{k-1} + \frac{2}{3}b_k + \frac{1}{6}b_{k+1} = y_k,$$

Після множення на 6 одержуємо систему типу (1)

$$b_{k-1} + 4b_k + b_{k+1} = 6y_k. \quad (10)$$

Таким чином, для побудови інтерполяційного кубічного сплайна класу C^2 з представленнями (6), (8) та (10) потрібно спочатку розв'язати НСРР типу (1) відносно параметрів відповідного представлення. Для кожного з трьох представлень ліві частини відповідних НСРР збігаються.

Всі три представлення визначають при заданих умовах інтерполяції (2) один і той же сплайн $S_3(f,x)$, який наближає функцію $f(x)$ з точністю $0(h^4)$ [3, 4]

$$\left|f(x)-S_3(f,x)\right| \le \frac{5}{384}\left\|f^{IV}\right\|_{C(R^1)}.$$

Якщо визначити точні значення параметрів сплайна $S_3(f,x)$ (m_k, M_k або b_k), то виявиться, що кожен із цих параметрів залежить від всієї супутності y_j, $j \in Z$. Але, як встановлено в [3, с. 123] та [4, с. 316], сплайни володіють яскраво вираженими локальними властивостями. Виявляється, що поведінку сплайна $S_3(f,x)$ на деякому проміжку $[x_k, x_{k+1}]$, $k \in Z$ в основному визначають значення y_i, для яких модуль різниці індексів $|j-k|$ є малим. При зростанні модуля різниці $|j-k|$ вплив значення y_i на сплайн $S_3(f,x)$ на проміжку $[x_k, x_{k+1}]$ зменшується зі швидкістю геометричної прогресії, знаменик якої дорівнює 0,5. Таким чином, якщо при визначенні сплайна на проміжку $[x_k, x_{k+1}]$ знехтувати значеннями y_k таких, що $|k-j|$ більше деякого r, то ми одержимо сплайн, який буде відрізнятися від інтерполяційного. Разом з тим цей сплайн достатньо добре наближатиме функцію $f(x)$. Ця ідея була реалізована для побудови так званих локальних сплайнів мінімального «дефекту» [3, 4, 9–11]. Для побудови таких сплайнів використовується представлення (9). При цьому для визначення параметрів $b_k = b_k(f)$ застосовується апроксимація лінійною комбінацією y_k, для яких $|k-j| \le 1$. Коефіцієнти цієї лінійної комбінації визначаються таким чином, щоб одержаний сплайн був точним на многочленах певної степені, як це робиться при виведенні квадратурних формул [14]. Так, ще у 1967 р. засновник сучасної теорії сплайнів І. Дж. Шенберг (Schoenberg I. J.) помітив, що апроксимація

$$\hat{b}_k = y_k \tag{11}$$

забезпечує для $f \in C^4(R^1)$ наближення параметрів $b_k(f)$ з точністю $0(h^2)$

$$b_k - \hat{b}_k = 0(h^2).$$

Отже, якщо в (9) замість b_k підставити y_k, то одержаний сплайн

$$\hat{S}(f,x) = \sum_{k \in Z} y_k B_k(x)$$

буде наближати функцію $f(x)$ також із точністю $0(h^2)$. Цей сплайн не буде інтерполяційним, оскільки

$$\hat{S}(f,x_k) = y_{k-1}B_{k-1}(x_k) + y_k B_k(x_k) + y_{k+1}B_{k+1}(x) =$$
$$= \frac{1}{6}y_{k-1} + \frac{2}{3}y_k + \frac{1}{6}y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}h^2 f''(x_k) + 0(h^4).$$

Для лінійних многочленів $f(x) = Ax + B$ $\hat{S}(f,x)$ буде збігатися з $f(x)$. Трьохточкова апроксимація [3]

$$\hat{b}_k = -\frac{1}{6}y_{k-1} + \frac{4}{3}y_k - \frac{1}{6}y_{k+1} \tag{12}$$

забезпечує для параметрів $b_k(f)$, $f \in C^4(R^1)$ точність $0(h^4)$. Якщо $\hat{b}_k$ підставити в (9) замість b_k, то одержаний сплайн також не буде інтерполяційним. Його значення у вузлах x_k визначаються п'ятиточковою формулою [15]

$$\hat{S}(f,x_k) = -\frac{1}{36}(y_{k-2} + y_{k+2}) + \frac{1}{9}(y_{k-2} + y_{k+2}) + \frac{5}{6}y_k,$$

причому

$$\hat{S}(f,x_k) = y_k - \frac{1}{36}h^4 f^{IV}(x_k) + 0(h^6).$$

Якщо $f(x)$ є деяким кубічним многочленом

$$f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D,$$

то $\hat{S}(f,x)$ збігається з $f(x)$. Тобто апроксимація сплайном $\hat{S}(f,x)$ на кубічних многочленах є точною.

За аналогічним принципом будуються також локальні сплайни мінімального дефекту степені m, $m \in N$ [3]. Функцію $f(x)$ з $C^{m+1}(R^1)$ вони наближають з точністю $0(h^{m+1})$, а на многочленах степені m такі сплайни є точними. Зауважимо, що побудова сплайнів степені m також пов'язана з розв'язанням НСРР. Крім того, відзначимо, що інтерполяційна сітка не обов'язково є рівномірною.

Виникає природне запитання, чи не можна за певних умов розглядати локальні апроксимації розв'язків НСРР типу (1) в загальному випадку. Виявляється, що відповідь є позитивною. Перейдемо до розгляду цього питання.

Розглянемо НСРР (1) на комплексно-значних послідовностях, на які не накладається жодних обмежень. Нехай $\Phi(Z,C^1)$ простір всіх можливих відображень множини цілих чисел Z у множину всіх комплексних чисел C^1. Елементами $\Phi(Z,C^1)$ є всі двосторонні нескінченні послідовності $\{u_k, k \in Z\}$.

Оскільки в $\Phi(Z, C^1)$ можна ввести структуру векторного простору, то для зручності для елементів введемо також векторні позначення

$$\vec{u} = \{u_k, k \in Z\} = \{u_k\}.$$

Очевидно, що одиничні вектори

$$\vec{e}_j = \{\delta_{jk}, k \in Z\},\ j \in Z,$$

де δ_{jk} – символ Кронекера,

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 0, \text{ якщо } k \ne j, \\ 1, \text{ якщо } i = j, \end{cases}$$

утворюють в $\Phi(Z,C^1)$ базис. Отже, довільний вектор $\vec{u} \in \Phi(Z, C^1)$ можна подати у вигляді формального ряду

$$\vec{u} = \sum_{k \in Z} u_k \vec{e}_k.$$

Нехай I – тотожний оператор $\Phi(Z, C^1)$, P_+ – оператор зсуву індексів координат векторів $\vec{u} \in \Phi(Z, C^1)$ на одну позицію праворуч, відповідно P_- – оператор зсуву індексів координат на одну позицію ліворуч. Таким чином маємо

$$I\vec{u} = \vec{u}, \forall \vec{u} \in \Phi(Z, C^1)$$

$$P_+ \vec{e}_j = \vec{e}_{j+1}, P_- \vec{e}_j = \vec{e}_{j-1}, j \in Z,$$

$$P_+ P_- = P_- P_+ = I.$$

Поклавши

$$L(A) = P_- - 2AI + P_+,$$

запишемо систему (1) у вигляді операторного рівняння

$$L(A)\vec{u} = \vec{F}, \tag{13}$$

де $\vec{u}$ та $\vec{F}$ відповідно невідомий та заданий вектори з $\Phi(Z, C^1)$.

Дослідимо деякі властивості оператора $L(A)$.

Теорема 1

Для будь якого комплексного числа $a \neq 0$ двостороння нескінченна геометрична прогресія

$$\left\{a^k, k \in Z\right\} = \left\{a^k\right\}$$

є власним вектором оператора $L(A)$

$$L(A)\left\{a^k\right\} = \left(\frac{1}{a} - 2A + a\right)\left\{a^k\right\}.$$

Доведення цієї теореми зводиться до простої підстановки прогресії $\left\{a^k\right\}$ у вираз для $L(A)$.

Зауважимо, що з властивостей скінченних систем типу (1) випливає, що всі власні вектори $L(A)$ мають вигляд $\left\{a^k\right\}$. Крім того, виявляється, послідовності, що утворені добутком геометричної прогресії з фіксованим $a \neq 0$ на деякий поліном $P_n(k)$

$$\left\{P_n(k) a^k\right\},$$

утворюють інваріантний підпростір в $\Phi(Z, C^1)$, оскільки

$$L(A)\left\{P_n(k) a^k\right\} = \left\{Q_n(k) a^k\right\},$$

де

$$Q_n(k) = \frac{1}{a} P_n(k-1) - 2AP_n(k) + aP_n(k+1).$$

Наступна теорема визначає всі розв'язки однорідного рівняння

$$L(A)\vec{u} = \vec{0}. \tag{14}$$

Теорема 2

Якщо $A^2 \neq 1$, то будь-який вектор $\vec{u} \in \Phi(Z, C^1)$ є розв'язком однорідного рівняння (14) тоді і тільки тоді, коли $\vec{u}$ є лінійною комбінацією двох двосторонніх нескінченних геометричних прогресій

$$\vec{u} = C_1\left\{z_1^k\right\} + C_2\left\{z_2^k\right\},$$

де C_1, C_2 довільні комплексні числа. При $A \in C^1 \setminus [-1,1]$ числа z_1, z_2 допускають представлення

$$z_1 = z_1(A) = A + \sqrt{A^2 - 1}$$

$$z_2 = z_2(A) = A - \sqrt{A^2 - 1},$$

де вираз $\sqrt{A^2 - 1}$ відповідає функції комплексної змінної

$$z = \sqrt{W^2 - 1}, \ W \in C^1 \setminus [-1,1],$$

для якої

$$\lim_{|W| \to \infty} \frac{\sqrt{W^2 - 1}}{W} = 1.$$

При $A \in (-1,1)$ числа z_1 та z_2 визначаються формулами

$$z_1 = z_1(A) = A + i\sqrt{1 - A^2},$$

$$z_2 = z_2(A) = A - i\sqrt{1 - A^2},$$

($\sqrt{1 - A^2}$ – арифметичний корінь).

При $A^2 = 1$ будь-який розв'язок (14) допускає представлення

$$\vec{u} = \left\{C_1 + C_2 k\right\} \text{при } A = 1$$

відповідно $\vec{u} = \left\{(C_1 + C_2 k)(-1)^k\right\}$ при $A = -1$, де C_1 та C_2 довільні комплексні числа.

Доведення

Визначимо корені характеристичного рівняння НСРР (1) [16]

$$\frac{1}{z} - 2A + z = 0. \tag{15}$$

Це рівняння перепишемо у формі

$$A = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right),$$

яка відповідає функції Жуковського [17, с. 27]

$$W = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

В області $C^1 \setminus [-1,1]$ функція Жуковського має дві обернені функції

$$z_1 = z_1(W) = W + \sqrt{W^2 - 1}$$

та

$$z_2 = z_2(W) = W - \sqrt{W^2 - 1},$$

які конформно відображають область $C^1 \setminus [-1,1]$ відповідно у зовнішність та внутрішність одиничного кола $|z|=1$. Для виразу $\sqrt{W^2-1}$ мається на увазі функція комплексної змінної така, що при $W = x$, x – дійсне додатнє число $x > 1$

$$\sqrt{x^2-1}>0.$$

Звідси випливає, що

$$\lim_{|W|\to\infty}\frac{\sqrt{W^2-1}}{W}=1.$$

Оскільки при $W = x\in(-1;1)$ вираз x^2-1 від'ємний, то вирази для $z_1(x)$ і $z_2(x)$ набудуть вигляду

$$z_1=z_1(x)=x+i\sqrt{1-x^2}$$

та

$$z_2=z_2(x)=x-i\sqrt{1-x^2}$$

($\sqrt{1-x^2}>0$ – арифметичний корінь). Числа $z_1(x)$ та $z_2(x)$, $x\in(-1;1)$ мають одиничні модулі.

При $A=\pm1$ характеристичне рівняння (15) має кратні корені. Представлення розв'язків рівняння (14) одержуються внаслідок [17]. Теорему 2 доведено.

З доведення теореми 2 випливає, що при $A\in$ $\in[-1;1]$ однорідне рівняння (14) має нетривіальні обмежені розв'язки. При $A\in C^1\setminus[-1;1]$ всі нетривіальні розв'язки (14) мають на ∞ експоненціальне зростання. Звідси випливає результат М. Ф. Городнього [7] про єдність обмежених розв'язків (1) при $A\in C^1\setminus[-1;1]$.

Виділимо в $\Phi(Z,C^1)$ підпростір $\Phi_p(Z,C^1)$ повільно зростаючих послідовностей $\{F_k, k\in Z\}$, для яких при $k\to\infty$ $|F_k|$ може прямувати до ∞, але не швидше, ніж деякий многочлен від k, тобто

$$|F_k|\le C(1+|k|^m),$$

де $C>0, m\ge 0$ залежать від конкретної послідовності. При $m = 0$ маємо простір обмежених послідовностей $\Phi_0(Z,C^1)$.

У наступній теоремі визначається оператор $L^{-1}(A)$, обернений до $L(A)$.

Теорема 3

Якщо $A\in C^1\setminus[-1;1]$, то в просторі $\Phi_p(Z,C^1)$ визначений оператор $L^{-1}(A)$, обернений до $L(A)$, за допомогою якого визначаються розв'язки рівняння (13)

$$\vec{u}=L^{-1}(A)\{F_k\}=\sum_{k\in Z}F_k\vec{\tau}_k, \tag{16}$$

де $\vec{\tau}_k=L^{-1}(A)\vec{e}_k=-\dfrac{1}{2\sqrt{A^2-1}}\cdot\left\{z_1^{-|j-k|}, j\in Z\right\}.$

Доведення

Безпосередньою перевіркою пересвідчуємось, що вектори $\vec{\tau}_k, k\in Z$ є розв'язками рівняння

$$L(A)u=\vec{e}_k,$$

оскільки при $A\in C^1\setminus[-1;1]$ $|z_1|>1$, то при $|j|\to$ $\to\infty$ координата з номером j вектора $\vec{\tau}_k$ експоненціально прямує до 0 (k – фіксоване), то ряд і (16) є збіжним. Таким чином, ми визначили оператор $L^{-1}(A)$ на всьому просторі $\Phi_p(Z,C^1)$. Теорему 3 доведено.

Функцію обох цілих аргументів

$$G(j,k)=-\frac{1}{\sqrt{A^2-1}}z_1^{-|j-k|}$$

назвемо дискретною функцією Гріна рівняння (13). Отже, (16) можна розглядати як представлення розв'язку рівняння (13) у вигляді дискретної згортки вектора $\vec{F}$ та функції Гріна.

З (16) випливає, що розв'язки (13), подібно до сплайнів, володіють локальними властивостями. При фіксованому k значення u_k істотно залежить лише від скінченної кількості координат вектора правої частини $\vec{F}$, оскільки множники $z_1^{-|j-k|}$ прямують до 0 з швидкістю геометричної прогресії зі знаменником $z_2=z_1^{-1}\left(|z_2|<1\right)$. Для систем (6), (8), (10), що визначають кубічний сплайн, маємо

$$z_2=-2+\sqrt{3}=-0{,}2679...$$

Отже, якщо в (16) брати скінченні суми, то можна одержати хороші наближення розв'язку (13).

Але більш ефективним, виявляється, є спосіб побудови наближень розв'язків (13), аналогічний методу локальних схем сплайн-апроксимації [3–4, 9–11].

Такі наближення побудуємо так, щоб у випадку, коли вектор $\vec{F}$ є значеннями в вузлах сітки $\{x_k\}$ многочлена степені m, ми одержували точний розв'язок. Розглянемо дію оператора $L(A)$ на векторах $[x^m]$, які відповідають значенням x^m, на сітці $\{x_k\}$:

$$\begin{aligned}
&L(A)[1]=2(1-A)[1],\\
&L(A)[x]=2(1-A)[x],\\
&L(A)[x^2]=2(1-A)[x^2]+2h^2[1],\\
&L(A)[x^3]=2(1-A)[x^3]+6h^2[x],\\
&L(A)[x^4]=2(1-A)[x^4]+12h^2[x^2]+2h^4[1].
\end{aligned}\tag{17}$$

Звідси випливає наступна теорема про локальні наближення розв'язків рівняння (13).

Теорема 4

Якщо $A\in C^1\setminus[-1;1]$ і $F_k=F(kh), k\in h, F\in$ $\in C^4(R^1)$, то для обмеженого розв'язку (13) при малих $h>0$ мають місце асимптотичні розвинення:

а) одноточкова апроксимація

$$\begin{aligned}
&\overline{u}_k=\frac{1}{2(1-A)}F_k,\\
&u_k-\overline{u}_k=-\frac{1}{4}(1-A)^{-2}h^2F''(x_k)+0(h^4);
\end{aligned}\tag{18}$$

б) трьохточкова апроксимація

$$\hat{u}_k = \frac{1}{2(1-A)} F_k - \frac{1}{4(1-A)^2}(F_{k-1} - 2F_k + F_{k+1}),$$
$$u_k - \hat{u}_k = \frac{1}{8}(1-A)^{-3} h^4 F^{IV}(x_k) + 0(h^6). \quad (19)$$

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню співвідношень (11) та (12), яке наведено в [3]. Справедливість (18) та (19) перевіряється безпосередньо на многочленах (1), x, x^2, x^3, з урахуванням формул (17).

1. *Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж.* (Ahlberg J. H., Nilson E. N., Walsh J. L.). Теория сплайнов и ее приложения.– М.: Мир, 1972.– 316 с.
2. *Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.* Сплайны в вычислительной математике.– М: Наука, 1976.
3. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций.– М.: Наука, 1980.– 352 с.
4. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближения.– М.: Наука, 1984.– 352 с.
5. *Дороговцев А. Я.* Стационарные и периодические решения одного стохастического разностного уравнения в банаховом пространстве // Теория вероятностей и математическая статистика.– 1990.– Вып. 42.– С. 35–42.
6. *Дороговцев А. Я.* Периодические и стационарные режимы бесконечномерных детерминированных и стохастических динамических систем.– К.: Вища школа, 1992.– 319 с.
7. *Городний М. Ф.* Аппроксимация ограниченного решения одного разностного уравнения решениями соответствующих краевых задач в банаховом пространстве // Математические заметки.– 1992.– Т. 51, вып. 4.– С. 17–22.
8. *Городній М. Ф.* Властивості розв'язків різницевих і диференціальних рівнянь та їх стохастичних аналогів у банаховому просторі.– Автореф. дис. ... докт. фіз.-мат. наук.– К., 2004.– 32 с.
9. *De Boor C.* Practical quide to splines.– New York, 1978.– 328 p.
10. *Юферев В. С.* Локальная аппроксимация кубическими сплайнами.– ЖВМ и МФ.– 1981.– 21.– № 1.– С. 5–10.
11. *Желудев В. А.* Асимптотические формулы для локальной сплайн аппроксимации на равномерной сетке.– ДАН СССР.– 1983.– Т. 269, № 4.– С. 797–802.
12. *Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М.* Численные методы.– М.: Наука, 1989.– 430 с.
13. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Численные методы.– М.: Наука, 1987.– 598 с.
14. *Никольский С. М.* Квадратурные формулы.– М.: Наука, 1974.– 224 с.
15. *Бондаренко В. М., Макаров П. В., Кашпировский А. И.* Асимптотически оптимальное приближение характеристик нелинейных элементов кубическими сплайнами с заданной точностью // Техническая электродинамика.– 1986.– Вып. 4.– С. 6–11.
16. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного.– М.: Наука, 1967.– 688 с.
17. *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей.– М.: Наука, 1987.– 375 с.

O. Kashpirovsky, O. Semeniv, V. Yatsenko

LOCAL APPROXIMATION OF BOUNDED SOLUTIONS OF INFINITE SYSTEM OF DIFFERENCE EQUATIONS

For bounded solutions of infinite system of difference equations local asymptotic approximation formulas are obtained. They are similar to local splines of the minimal defect. Such kind of approximations can be used for modeling of dynamical processes.