# ФІЗИКА

УДК 538.221

*Голод П. І., Кутній С. В., Приходченко А. С.*

# ВЕЛИКОМАСШТАБНІ ЗБУРЕННЯ БАГАТОКОМПОНЕНТНОГО ПАРАМЕТРА ПОРЯДКУ В ПЛОСКИХ МАГНЕТИКАХ ЗІ СПІНОМ $s = 1$

*Обговорюється модель магнетика зі спіном $s = 1$, у якій окрім гайзенбергової обмінної взаємодії враховано також біквадратний обмін. В плоскому випадку у довгохвильовому наближенні знайдено топологічно стійкі збурення багатокомпонентного параметра порядку, які можуть спонтанно виникати і бути причиною руйнування квадрупольного впорядкування.*

## 1. Вступ

У магнетиках з великими спінами на вузлах $s \geqslant 1$, окрім загальновідомих типів впорядкування (феромагнітне, антиферомагнітне та феримагнітне), можливі й інші типи. Серед них — квадрупольне впорядкування або спіновий нематичний стан.

Як відомо, багаточастинкову квантову систему, якою є реальний магнетик, можна вивчати на різних ієрархічних рівнях (різних масштабах). Якщо рухатися від першооснов, або, як кажуть, від «перших принципів», то ми мали б почати розгляд з великої сукупності ядер та електронів, пов'язаних електромагнітними взаємодіями, і шукати рівноважні стани такої системи у вигляді кристалічної ґратки. Далі, дослідивши динаміку електронної підсистеми у кристалічному остові, могли б отримати основні макроскопічні характеристики: спонтанну намагніченість, магнітну сприйнятливість (відгук на зовнішнє магнітне поле), теплоємність тощо. Очевидно, такий шлях з точки зору методології фізичної науки є безперспективним (хоча деякі фізики, озброївшись потужною обчислювальною технікою, пробують діяти, стартуючи з «перших принципів»). Суть фізики в тому, щоб пропонувати прості моделі складних явищ. Саме так діяли класики квантової фізики, пропонуючи відносно прості гамільтоніани для опису магнітних явищ на мікроспіновому рівні [1, 2]. Прикладом такого гамільтоніана є спіновий гамільтоніан Гайзенберга

$$\mathcal{H} = -\sum_{n,m} J(n,m)(\mathbf{S}_n, \mathbf{S}_m). \qquad (1)$$

У найпростішому випадку запропонований Діраком і узагальнений Ван-Флеком [3] на розвиток ідеї Гайзенберга про обмінний (електростатичний) характер феромагнітної взаємодії, він протягом десятиліть був основою для розвитку квантової теорії магнетизму.

Із зовнішнього вигляду гамільтоніана (1) можна зробити висновок, що він нібито описує взаємодію магнітних дипольних моментів, закріплених у вузлах кристалічної ґратки. Така інтерпретація була б правочинною, якби сталі $J(n,m)$ були пропорційні величині $\frac{1}{c^2}$ , де $c$ — швидкість світла (енергія диполь-дипольної взаємодії пропорційна $\frac{\mu_0^2}{a^3}$, де $\mu_0 = \frac{eh}{2mc}$ — магнетон Бора, $a$ — стала ґратки.) У цьому випадку прості розрахунки дають величину ефективного поля $H_{ef}$, яке створюють сусідні магнітні диполі, порядку декількох кілоерстед.

Якщо покласти $\mu_0 H_{ef} \simeq KT_c$, то для критичної температури феромагнітного переходу будемо мати величину порядку $0,1K$. Реальна температура $T_c$ для таких феромагнетиків, як нікель, залізо та кобальт, порядку $1000 \sim 1600K$. За таких величин критичних температур ефективне поле мало б напруженість порядку $10^7$ ерстед. Це гігантські поля, які в земних умовах дуже важко створити. Отже, інтерпретація взаємодії в гамільтоніані (1) як магнітної диполь-дипольної є хибна, хоча інколи нею можна послуговуватись як аналогією.

В ієрархії масштабів, яка об'єктивно існує в природі і яку ми повинні враховувати, модельний гамільтоніан (1) будемо відносити до другого ієрархічного рівня. Під першим розумітимемо квантово-механічний або квантово-польовий опис міжелектронних та електрон-іонних взаємодій у твердотільному середовищі, на основі якого ми можемо вирахувати обмінні параметри $J(n, m)$. Взявши за основу гамільтоніан (1), опиняємося на другому ієрархічному рівні, де опис багаточастинкової електронної системи суттєво спрощується. Тепер квантові стани описуються не складними визначниками Слетера, а векторозначними функціями дискретного аргументу. Це тензорні добутки одночастинкових спінорів, віднесених до різних вузлів кристалічної гратки. Однак опис електронної системи за допомогою гамільтоніана (1) є наближеним; він добре працює на станах, які безпосередньо межують із основним станом.

Як бачимо з попереднього викладу, зв'язок між першим та другим ієрархічними рівнями досить добре простежується на якісному рівні й після певних зусиль в конкретних ситуаціях може бути підкріплений кількісними співвідношеннями. У той же час перехід від мікроскопічного опису до макроскопічного не такий простий. За сучасного рівня розвитку математичної і теоретичної фізики його неможливо зробити послідовно. Але від помилок та хибних уявлень нас рятує звернення до експерименту. Тому макроскопічну (великомасштабну) теорію магнетизму називають феноменологічною теорією. Її початком вважають працю Л.Д. Ландау і Е.М. Лівшиця 1935 року під скромною назвою «До теорії дисперсії магнітної проникливості феромагнетика» [4]. У цій праці було запропоновано рівняння руху феноменологічного параметра — намагніченості одиниці об'єму феромагнітного тіла — це рівняння згодом стали називати рівнянням Ландау—Лівшиця. Було також доведено термодинамічну вигідність розбиття феромагнетика на плоскопаралельні домени, досліджено їх структуру поблизу границі, структуру доменних стінок та їх рух під дією зовнішнього магнітного поля.

Макроскопічна теорія магнетизму — це, фактично, теорія суцільного середовища, у якій, окрім неперервних полів: густини, поля зміщень та швидкості, додається поле вектора намагніченості, підпорядковане рівнянню Ландау — Лівшиця. У рамках цієї теорії можна досліджувати чисто магнітні, магнітоакустичні та магнітооптичні явища [5].

Наша праця поєднує два підходи в теорії магнетизму — мікроскопічний (квантовий) і макроскопічний. Відправною точкою наших досліджень є білінійно-біквадратний спіновий гамільтоніан:

$$\mathcal{H} = -\sum_{n,\delta} \left\{ J(\mathbf{S}_n, \mathbf{S}_{n+\delta}) + K(\mathbf{S}_n, \mathbf{S}_{n+\delta})^2 \right\}, \tag{2}$$

де індекс $n$ нумерує вузли ґратки, $\delta$ — сусідні вузли. Такі гамільтоніани для магнетиків зі спіном $s \geq 1$ пропонувались і досліджувались досить давно (докладну бібліографію можна знайти у книзі [6]). У 60–70-х роках минулого століття модель досліджувалася в основному методами середнього поля [8–10]. На її основі робилися розрахунки магнітних властивотей конкретних матеріалів, а також досліджувалася стійкість (у лінійному наближенні) фази квадрупольного впорядкування [11].

Друга хвиля зацікавленості гамільтоніанами типу (2) припадає на початок 80-х років. Очевидно, вона стимульована успіхами у розв'язанні одновимірних моделей магнетиків методом анзаца Бете та винайденням нових методів інтегрування класичний польових рівняннь солітонного типу [12–15].

В останні роки інтерес до моделі (2) виріс у зв'язку з дослідженням багатокомпонентних Бозе-Ейнштейнівських конденсатів нейтральних атомів з цілими (ненульовими) спінами, а також у зв'язку з можливістю застосування моделі (2) до проблем квантової комунікації та квантової оптики [16, 17].

Наша праця ставить собі за мету висвітлити, в першу чергу, математичні проблеми, які виникають у макроскопічному підході при описі магнетиків із великими спінами. Ці проблеми ускладнюються при переході від одновимірного до плоского і тим більше до тривимірного випадку. Але ми не обмежуємося лише макроскопічним розглядом, навпаки, намагаємося вивести основні (геометричні) обмеження макроскопічної динаміки з мікроскопічного гамільтоніана (2). Це вдається зробити в рамках наближення середнього поля.

Робота складається з двох частин. У першій (яка значною мірою є оглядовою) гамільтоніан (2) розглядається, як зазначалося, у наближенні середнього поля. У цьому наближенні отримуються вирази для вільної енергії системи в термінах параметрів порядку. Умова мінімуму вільної енергії визначає залежність цих параметрів від сталих $J$, $K$ та від температури.

У другій частині досліджується «многовид виродження» основного стану системи. Цей многовид є тим геометричним об'єктом, на якому набуває своїх значень багатокомпонентне середнє поле. У випадку магнетика зі спіном $s=1$ це буде орбіта групи $SU(3)$ у 8-вимірному просторі її приєднаного (коприєднаного) представлення [7, 18, 19]. Як добре відомо [22], орбіти компактних простих груп Лі перетинають підгрупу Картана стільки разів, який порядок її групи Вейля. Кожна орбіта «нумерується» точкою в камері Вейля — фундаментальній області відповідної групи Вейля. Орбіти, які відповідають внутрішнім точкам камери Вейля, називаються «орбітами загального положення», або невиродженими орбітами. У випадку групи $SU(3)$ — це двопараметрична сім'я орбіт $\mathcal{O}(\mu,\xi)$, кожна з яких ототожнюється з фактор-простором:

$$\mathcal{O}(\mu,\xi)\simeq SU(3)/U(1)\times U(1).$$

Виродженим орбітам відповідають точки на «стінках» камери Вейля, і для групи $SU(3)$ — це однопараметрична сім'я: $\mu=0$, $\xi$ — довільне дійсне число. З геометричної точки зору вироджені орбіти еквівалентні фактор-просторові:

$$\mathcal{O}(0,\xi)\simeq\frac{SU(3)}{U(2)\times U(1)}\simeq\mathbb{CP}^2.$$

Динаміка багатокомпонентного середнього поля підпорядкована системі нелінійних рівнянь, які узагальнюють рівняння Ландау — Лівшиця для намагніченості [7, 18, 19]. В одновимірному ізотропному випадку вони виявляються інтегровними і завдяки цьому ми маємо загальне уявлення про розв'язки, які можна інтерпретувати як великомасштабні збурення параметра порядку зі скінченною енергією. В плоскому та тривимірному випадках ситуація набагато складніша. Проте певний клас розв'язків ми можемо знайти явно. Це, в першу чергу, статичні конфігурації, які узагальнюють солітони Белавіна — Полякова для плоского феромагнетика (їх вдається знайти завдяки добре розробленій теорії голоморфних відображень комплексних многовидів), спінові дисклінації в спінових нематиках [20] та топологічні солітони з напівцілим топологічним зарядом [21].

Якщо мати на увазі вироджену орбіту $\mathcal{O}(0,\xi)\simeq\mathbb{CP}^2$, то знайдені нами топологічно нетривіальні конфігурації середнього поля є, по суті, перенесенням в магнетизм результатів, які отримані досить давно для $\mathbb{CP}^N$ — кіральних моделей квантової теорії поля [23]. Топологічно нетривіальні конфігурації зі значеннями в орбіті загального положення — це нові об'єкти. Вони характеризуються двома топологічними зарядами, явні формули для яких будуть наведені в іншій публікації.

Задум цієї праці виник у процесі обговорення одним із авторів (П. І. Голод) з професором Б. О. Івановим природи топологічних збуджень у конденсованій матерії. Автори вдячні Б.О. Іванову за доброзичливі поради і зауваження.

## 2. Симетрії моделі

В гамільтоніані (2) $S_n^\alpha$ — спінові оператори на вузлах гратки

$$[S_n^\alpha,S_m^\beta]=i\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}S_n^\gamma\delta_{nm}.$$

Означимо квадрупольні оператори:

$$Q^{\alpha\beta}=S^\alpha S^\beta+S^\beta S^\alpha,\quad \alpha\neq\beta,$$

$$Q^{[2,2]} = (S^1)^2 - (S^2)^2, \qquad (3)$$
$$Q^{[2,0]} = \sqrt{3}\left((S^3)^2 - \tfrac{2}{3}\right).$$

П'ять матриць в наборі (3) — це компоненти незвідного тензорного оператора, який перетворюється за представленням групи обертань з вагою $l = 2$. Умова нормування цих операторів та операторів $S^\alpha$ випливає з тотожності

$$(S_n^1)^2 + (S_n^2)^2 + (S_n^3)^2 = s(s+1),$$

звідки у випадку $s = 1$ маємо $\mathrm{Tr}(S^\alpha)^2 = 2$. У загальному випадку нормування буде таке:

$$\mathrm{Tr}(S^\alpha)^2 = \tfrac{1}{3}s(s+1)(2s+1).$$

Якщо спінові стани на вузлах записувати у послідовності $|+1\rangle$, $|-1\rangle$, $|0\rangle$, то оператори на вузлах будуть мати вигляд:

$$S^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&1\\1&1&0\end{bmatrix},\; S^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&-i\\0&0&i\\i&-i&0\end{bmatrix},$$
$$S^3 = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix},\; Q^{[2,0]} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{bmatrix},$$
$$Q^{12} = \begin{bmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\; Q^{13} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&-1\\1&-1&0\end{bmatrix},$$
$$Q^{23} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}0&0&-i\\0&0&-i\\i&i&0\end{bmatrix},\; Q^{[2,2]} = \begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

З наведених формул легко побачити зв'язок між цими операторами та матрицями Гелл-Мана, які використовують для побудови базису в алгебрі $SU(3)$ і які ми позначатимемо літерами $X_a$, $a = 1, 2, \ldots, 8$:

$$X_1 = Q^{[2,2]},\; X_2 = Q^{12},\; X_3 = S^3,\; X_8 = Q^{[2,0]},$$
$$X_4 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(S^1 + Q^{13}\right),\; X_5 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(S^2 + Q^{23}\right),$$
$$X_6 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(S^1 - Q^{13}\right),\; X_7 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(Q^{23} - S^2\right).$$

В термінах операторів $S_n^\alpha$, $Q_n^a = \{Q_n^{\alpha\beta}, Q_n^{[2,2]}, Q_n^{[2,0]}\}$ гамільтоніан (2) записується у вигляді:

$$\mathcal{H} = -\left(J - \tfrac{1}{2}K\right)\sum_{n,\delta}\sum_{\alpha}\left(S_n^\alpha, S_{n+\delta}^\alpha\right) - $$
$$- \tfrac{1}{2}K\sum_{n,\delta}\sum_{a}\left(Q_n^a, Q_{n+\delta}^a\right) - \tfrac{4}{3}KN, \qquad (4)$$

де $N$ — загальна кількість вузлів плоскої ґратки.

Група $SU(2)$, стосовно якої гамільтоніан (2) інваріантний, діє на оператори $S^\alpha$, $Q^{\alpha\beta}$ за стандартними формулами:

$$US^\alpha U^{-1} = \sum_\beta D^{\alpha\beta}(U)S^\beta,$$
$$UQ^{\alpha\beta}U^{-1} = \sum_{\alpha'\beta'} D^{\alpha\alpha'}(U)D^{\beta\beta'}(U)Q^{\alpha'\beta'},$$

де $D^{\alpha\beta}(U)$ — матриці незвідного тривимірного представлення групи $SU(2)$.

У випадку, коли $J = K$, симетрію гамільтоніана можна розширити до групи $SU(3)$. Справді, тоді гамільтоніан (4) можна записати у вигляді:

$$\mathcal{H} = -\tfrac{1}{2}J\sum_{n,\delta}\sum_{a} Q_n^a Q_{n+\delta}^a - \tfrac{3}{4}KN, \qquad (5)$$

де покладено

$$Q_n^a = \left\{S_n^\alpha, Q_n^{\alpha\beta}, Q_n^{[2,2]}, Q_n^{[2,0]}\right\},\; a = 1, 2\ldots, 8.$$

Квадратична форма в (5) може мати максимально можливу інваріантність стосовно перетворень групи $SO(8)$. Але, з іншого боку, оператори $Q_n^a$ є ермітовими $3\times3$ матрицями, для яких глобальними симетріями є перетворення подібності

$$UQ^aU^{-1} = \sum_b D^{ab}(U)Q_n^b,$$

де $U \in SL(3,\mathbb{C})$, а матриці $D^{ab}$ реалізують її 8-вимірне дійсне представлення. Тобто $D^{ab}(U) \in SO(8)$. Отже, перетворення $U$ належить компактній підгрупі в $SL(3,\mathbb{C})$. Такою максимальною компактною підгрупою є група $SU(3)$. Отже, гамільтоніан (4) при $K = J$ є $SU(3)$ інваріантним.

### 3. Наближення середнього поля. Параметри порядку

Важливе завдання, яке ставить перед собою теорія конденсованої матерії — знайти для заданого гамільтоніана термодинамічно стійкі рівноважні стани квантової системи при скінченній (не нульовій) температурі й проаналізувати збуджені стани поблизу рівноважного. Якщо вихідний гамільтоніан має симетрію стосовно неперервної групи, то при певних температурах можуть виникати стани, в яких симетрію порушено. Характерною особливістю таких станів є наявність відмінних від нуля термодинамічних середніх від коваріантних динамічних величин, які через симетрію гамільтоніана (а отже, і симетрію статистичного оператора $\rho \sim \exp\left\{\frac{-\mathcal{H}}{kT}\right\}$) мали б бути нульовими. Ці відмінні від нуля квазісередні [24] називаються *параметрами порядку*. Типовим прикладом параметра порядку є намагніченість у феромагнетику, яка пропорційна середньому (квазісередньому) спінові на вузлі кристалічної ґратки і відмінна від нуля при температурах нижче критичної (температури Кюрі $T_c$). Поява намагніченості свідчить про порушення обертової симетрії у стані феромагнітного впорядкування.

Дослідження магнітних систем при скінченних температурах ведеться, як правило, у наближенні середнього (ефективного або молекулярного) поля. Суть цього наближення в тому, що істинний гамільтоніан $\mathcal{H}$, який враховує міжчастинкову (міжвузольну) взаємодію, замінюється наближеним гамільтоніаном $\mathcal{H}_{MF}$, у якому окремі частинки взаємодіють з деяким ефективним полем, яке нібито еквівалентне усередненій дії решти частинок. Метод середнього поля пронизує різні галузі фізики і проявляється у найрізноманітніших модифікаціях. Ми будемо використовувати його у найпростішій версії, запозиченій у працях [9,10].

Гамільтоніан середнього поля для нашої моделі має вигляд:

$$\mathcal{H}_{MF} = -(J - \tfrac{1}{2}K)\sum_n \sum_{\alpha=1}^{3} S_n^\alpha \langle S_n^\alpha \rangle - \\ - \tfrac{1}{2}K \sum_n \sum_{a=4}^{8} Q_n^a \langle Q_n^a \rangle - \tfrac{3}{4}KN. \quad (6)$$

Класичне восьмикомпонентне векторне поле $\mu^a(x_n) \equiv \langle Q_n^a \rangle$, $a = 1, 2 \ldots, 8$ називатимемо *середнім полем*.

Очевидно, що перетвореннями з групи $SU(2)$ гамільтоніан (6) можна привести до вигляду:

$$\mathcal{H}_{MF} = -(J - \tfrac{1}{2}K)\sum_n S_n^3 \langle S_n^3 \rangle - \\ - \tfrac{1}{2}K \sum_n Q_n^8 \langle Q_n^8 \rangle - \tfrac{3}{4}KN. \quad (7)$$

Компоненти середнього поля $\langle S_n^3 \rangle = \mu$ і $\langle Q_n^8 \rangle = \xi$ називатимемо *параметрами порядку*.

Оскільки ми розглядаємо магнетик при фіксованій температурі і фіксованому об'ємі, то основним термодинамічним потенціалом буде вільна енергія Гельмгольца

$$F = E - TS, \quad (8)$$

де $E$ — внутрішня енергія, яку ототожнюватимемо з середнім значенням гамільтоніана (2), $S$ — ентропія системи. За цих умов (сталість об'єму, кількості частинок та температури) *у рівноважному стані вільна енергія сягає мінімуму стосовно варіації будь-яких інших внутрішніх параметрів системи.*

Важлива нерівність, встановлена М.М. Боголюбовим [24], дає можливість відшукати рівноважні стани, спираючись на наближення середнього поля. Якщо $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{MF} + \mathcal{H}_1$, то

$$F \leq F_M = F_{MF} + \langle \mathcal{H}_1 \rangle_{MF}. \quad (9)$$

З цієї нерівності випливає, що, мінімізуючи функціонал $F_M$, ми знайдемо значення параметрів системи, при яких $F$ теж, можливо, має мінімум. (Але точна вільна енергія може мати додаткові мінімуми.)

**Вільна енергія в наближенні середнього поля і параметри порядку.** Магнетик, зі спінами $s$ на вузлах, може перебувати у станах

$$\Psi(n) = \sum_{m=-s}^{s} c_m(n)|m\rangle,$$

де $\{|m\rangle\}$ — стани на одному вузлі. Нехай $p_m(n)$, $m = 1, 0, -1$ — ймовірність перебування в одному з можливих станів. Очевидно, що у випадку чистих станів

$$p_m(n) = c_m^*(n)c_m(n).$$

У випадку змішаних станів коефіцієнти $c_m(n)$ — випадкові числа.

У наближенні середнього поля ймовірності $p_m$ однакові на різних вузлах. У цьому випадку ентропію системи можна вирахувати за формулою:

$$S_{MF} = -kTN \sum_m p_m \ln p_m. \quad (10)$$

Позначимо через $Z$ одновузольну статистичну суму:

$$Z(\mu^3, \mu^8, T) = \\ = \sum_{m=-3}^{3} \exp\left\{ \frac{\left(J - \frac{K}{2}\right)\mu^3 m + \frac{K}{2}\mu^8 q(m)}{kT} \right\},$$

де $q(m) = \sqrt{3}\left(m^2 - \frac{2}{3}\right)$. Вільну енергію в наближенні середнього поля вираховують за стандартною формулою

$$F_{MF} = -kTN \ln Z(\mu^3, \mu^8, T). \quad (11)$$

Тоді умови самоузгодженості, які фіксують параметри $\mu^3$, $\mu^8$ та їх залежність від температури, будуть мати вигляд:

$$\mu^3 = \frac{kT}{\left(J - \frac{K}{2}\right)} \frac{\partial}{\partial \mu^3} \ln Z(\mu^3, \mu^8, T),$$
$$\mu^8 = \frac{2kT}{K} \frac{\partial}{\partial \mu^8} \ln Z(\mu^3, \mu^8, T).$$

Ці трасцендентні рівняння є одночасно умовами мінімуму модельної вільної енергії $F_M$. Ми не будемо вираховувати точних значень параметрів порядку, оскільки це не є метою нашої праці. Візьмемо до уваги аналіз можливих мінімумів модельної вільної енергії, який подано у праці [11]. З п'яти екстремальних точок, наведених у [11], нас цікавитиме точка $\mu^3 = 0$, $\mu^8 > -\frac{2}{\sqrt{3}}$. Цей стан відповідає квантовому квадрупольному впорядкуванню, при якому намагніченість щезає (спіни на вузлах переважно перебувають у стані $|0\rangle$). При $K \geqslant J > 0$ цей стан відповідає абсолютному мінімуму модельної вільної енергії $F_M$.

## 4. Великомасштабні просторово неоднорідні стани магнетика

Оскільки основний стан магнетика вироджений (вибір напряму вектора намагніченості та квадрупольного моменту відбувається спонтанно), то порушення симетрії в різних макроскопічно віддалених областях може відбуватися незалежно. Це веде до виникнення просторово неоднорідних станів. Класичний приклад великомасштабних неоднорідностей — доменні стуктури у феромагнетику. (Їх розміри $\sim 10^{-6} \sim 10^{-4}$м вказують масштаб неоднорідності.) Неоднорідності можуть бути статичними або динамічними (рухомими). Приклади динамічних структур — нелінійні хвилі намагніченості [27].

Неоднорідні стани відповідають локальним мінімумам вільної енергії, в якій, очевидно, має бути врахована додаткова енергія, пов'язана з неоднорідностями, а також умови на границі. Як зазначалося у вступі, феноменологічна теорія неоднорідних станів у феромагнетиках започаткована працею [4]. Модельна вільна енергія в ізотропному випадку і в континуальному наближенні має вигляд функціоналу Діріхле [4]:

$$F[\boldsymbol{\mu}] \sim \frac{1}{2} \int \sum_{i,\alpha} \left( \frac{\partial \mu^\alpha}{\partial x^i} \right)^2 d^2x, \quad (12)$$

де $\mu^\alpha(x, y)$ — компонента вектора намагніченості з додатковою умовою

$$\sum_{\alpha=1}^{3} (\mu^\alpha)^2 = 1. \quad (13)$$

У статичному випадку задача мінімізації функціоналу (12) з умовою (13) зводиться до розв'язання рівняння

$$[\boldsymbol{\mu} \times \Delta \boldsymbol{\mu}] = 0, \quad (14)$$

яке, власне, і є статичним ізотропним рівнянням Ландау — Лівшиця.

У двовимірному випадку великий клас розв'язків можна знайти, замінивши рівняння (14) рівняннями «самодуальності» [28]:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \boldsymbol{\mu} = \pm \varepsilon_{ij} \left[ \boldsymbol{\mu} \times \frac{\partial}{\partial x^j} \boldsymbol{\mu} \right], \ i = 1, 2, \quad (15)$$

яке після заміни

$$\{\mu^1, \ \mu^2, \ \mu^3\} \to w_1 + i w_2 = \frac{\mu^1 + i\mu^2}{1 - \mu^3}$$

переходить в умову голоморфності (або антиголоморфності) для функції $w = w(z)$, $z = x^1 + + ix^2$, $x^1$, $x^2$ — координати на площині. Окрім того, на розв'язках рівняння (15) виконується рівність

$$F[\boldsymbol{\mu}] = 4\pi |Q[\boldsymbol{\mu}]|, \quad (16)$$
$$Q = \frac{1}{4\pi} \int \left( \boldsymbol{\mu}, \left[ \frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial x^i} \times \frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial x^j} \right] \right) \varepsilon_{ij} d^2x.$$

Якщо граничною умовою для рівняння (14) взяти умову на нескінченності

$$\boldsymbol{\mu}(x)_{|x|\to\infty} \to \{0,0,1\},$$

то неоднорідний розподіл намагніченості задаватиме відображення компактифікованої площини (площина з приєднаною нескінченно віддаленою точкою) у сферу, задану рівнянням (13). Кожне таке відображення можна віднести до певного гомотопічного класу. Гомотопічні відображення сфери в сферу

$$\{\mathbb{R}^2 \cup (\infty)\} = S^2 \to S^2$$

нумеруються цілими числами $\deg \boldsymbol{\mu}$ — степенями відображення. Неважко показати, що

$$\deg \boldsymbol{\mu} = Q.$$

Ціле число $Q$, яке обчислюється за формулою (16), має назву *топологічного заряду* даної конфігурації вектора намагніченості.

Як зазначалося, многовид виродження рівноважного стану з порушеною симетрією у випадку магнетиків зі спіном $s=1$ є орбітою групи $SU(3)$ (мається на увазі випадок $J=K$). Багатокомпонентне «середнє поле» $\{\mu^a(x)\}, a=1,2,\ldots,8$, здійснює відображення координатного простору в одну із таких орбіт. При цьому мінімізується «макроскопічна» вільна енергія

$$F[\{\mu^a\}] \simeq \int \sum_{a,i} \left(\frac{\partial\mu^a}{\partial x_i}\right)^2 d^2x \qquad (17)$$

(мається на увазі частина вільної енергії, яка відповідає неоднорідному розподілу параметра порядку). Якщо розглядати двовимірний випадок, то при граничних умовах

$$\{\mu^a(x)\}_{|x|\to\infty} \to \{0,0,\mu,0,0,0,0,\xi\},$$
$$\mu \equiv \mu^3(\infty), \qquad \xi \equiv \mu^8(\infty),$$

набір функцій $\{\mu^a(x)\}, a = 1,2,3\ldots,8$, здійснює відображення:

$$\mu^a : \{\mathbb{R}^2 \cup (\infty)\} = S^2 \to \to \mathcal{O}(\mu,\xi) \simeq \frac{SU(3)}{U(1)\times U(1)}. \quad (18)$$

У випадку вироджених граничних умов, коли $\mu=0, \xi > -\frac{2}{\sqrt{3}}$ функції $\mu^a$ здійснюють відображення

$$\mu^a : \{\mathbb{R}^2 \cup (\infty)\} = S^2 \to \to \mathcal{O}(0,\xi) \simeq \frac{SU(3)}{SU(2)\times U(1)} \simeq \mathbb{CP}^2. \quad (19)$$

Як відомо, ( [18] та інші), відображення (19) відповідає усередненню мікроскопічних операторів $Q^a(n)$ по *когерентних станах* магнетика зі спіном $s=1$ на вузлах, які пронумеровані літерою $n$, тобто по хвильових функціях

$$\Psi(n) = c_1(n)|1\rangle + c_0(n)|0\rangle + + c_{-1}(n)|-1\rangle = U(n)|1\rangle,$$

де $U(n)$ — матриця з групи $SU(3)$.

Якщо оператори $Q^a(n)$ усереднювати по змішаних станах за допомогою матриці густини, то в континуальному наближенні ці середні збігатимуться з функціями $\mu^a(x)$, які реалізують відображення (18).

## 5. Геометрія і топологія орбіти $SU(3)$

Однорідні простори компактних (простих) груп Лі $G$, які еквівалентні фактор-просторам $G/T^l$, де $T^l$ — максимальний тор (підгрупа Картана) в $G$, допускають комплексну геометрію. Більш точно, вони є келеровими рімановими просторами [29]. Основні теореми стосовно топології і геометрії таких многовидів отримані А. Борелем ще в 50-х роках минулого століття [29,30]. Результати А. Бореля сформульовані у загальній формі, тому при їх використанні у конкретній ситуації необхідно здійснити додаткові обчислення. Викладемо тут основні математичні твердження стосовно орбіт груп Лі в приєднаному представленні (тобто в алгебрі Лі даної групи). Більш послідовний виклад, ілюстрований прикладами, можна знайти в [22,31].

Нехай $G$ — компактна проста (матрична) група Лі (у нашому випадку це група $SU(N)$ — унітарних матриць з визначником одиниця). Нехай $\mathfrak{g}$ — її алгебра Лі. У випадку матричних груп це, очевидно, матрична алгебра. Приєднане представлення — це перетворення подібності в алгебрі $\mathfrak{g}$, яке здійснюють елементи групи $G$:

$$\mathrm{Ad}_g X = gXg^{-1}, \quad X \in \mathfrak{g}, \quad g \in G.$$

Якщо фіксувати $X_1 \in \mathfrak{g}$, то множина

$$\mathcal{O}_1 = \{gX_1g^{-1}, \forall gG\} \subset \mathfrak{g}$$

є орбітою, яка проходить через $X_1$. Елементи $g'$, для яких $g'X_1g'^{-1} = X_1$, утворюють стаціонарну підгрупу точки $X_1$. Орбіту $\mathcal{O}_1$ як однорідний простір можна ототожнити з множиною суміжних класів за підгрупою $G'$, тобто з фактор-простором $G/G'$.

Відомо, що будь-який елемент компактної напівпростої (простої) групи Лі спряжений до елемента з підгрупи Картана $T^l$. Переносячи це твердження на алгебру Лі, отримаємо простий наслідок: кожна орбіта перетинає підгрупу Картана принаймні один раз. Точку $H_1 \in \mathfrak{h}$, спряжену до точки $X_1$, візьмемо за початок орбіти.

Підалгебра Картана $\mathfrak{h}$ — це максимальна комутативна підалгебра $\mathfrak{g}$. Перетворення подібності (внутрішні автоморфізми, які не виводять за межі $\mathfrak{h}$ і є нетривіальними), утворюють дискретну групу $W \subset G$, яку називають групою Вейля групи $G$. Група $W(G)$ породжена віддзеркаленнями відносно площин, перпендикулярних простим кореням. У випадку групи $SU(3)$ група $W(SU(3))$ породжена віддзеркаленнями $\sigma_1$, $\sigma_2$ (див. рис. 1). Площини віддзеркалень $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_1\sigma_2\sigma_1$ зображені пунктирними лініями. Решта елементів є обертаннями на кути $\frac{2\pi}{3}$ і $\frac{4\pi}{3}$. Отже, повна група Вейля складається з 6-ти елементів і є ізоморфною групі перестановок $S_3$, $\mathrm{ord}S_3 = 3!$:

$$W(SU(3)) = \{e, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_1\sigma_2, \sigma_2\sigma_1, \\ \sigma_1\sigma_2\sigma_1 \simeq \sigma_2\sigma_1\sigma_2\}.$$

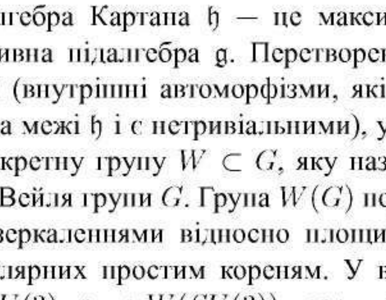

*Рис. 1. Діаграма групи $SU(3)$.*

Оскільки група Вейля здійснює перетворення подібності всередині підалгебри Картана, то кожна точка $\sigma H_1\sigma^{-1}$, $\sigma \in W(G)$, буде належати орбіті, яка проходить через точку $H_1$. Група Вейля діє ефективно (не залишає елемент $H_1$ на місці), якщо $H_1$ не лежить на лініях дзеркальних відображень. Область в підалгебрі Картана, на якій група Вейля діє ефективно, називається *камерою Вейля*. Як видно з рис. 1, підалгебра Картана групи $SU(3)$ розбивається на 6 камер Вейля. Оскільки елементи різних камер спряжені між собою елементами з групи Вейля, то звідси випливає, що кожна орбіта, яка проходить через точку $H_1$ всередині камери Вейля, перетинає підалгебру Картана стільки разів, який порядок групи $W(G)$. Такі орбіти було названо орбітами *загального положення*. Точки $H_1$, $\sigma H_1\sigma^{-1}$, $\forall\sigma \in W(G)$ — це полюси орбіти.

Якщо $H_1$ — точка всередині камери Вейля, то її стаціонарна підгрупа збігається з підгрупою Картана, тобто є максимальним тором $T^l$, де $l$ — ранг групи. Отже,

$$\mathcal{O}_{H_1} \simeq G/T^l.$$

Якщо початкова точка $H_2$ лежить на стінках камери Вейля, то ми маємо справу з виродженою орбітою. Стаціонарна підгрупа у цьому випадку обраховується за елементами підгрупи Вейля, які залишають на місці точку $H_2$. У випадку групи $SU(3)$, якщо $H_2$ лежить на «вертикальному дзеркалі» $\sigma_1$, її стаціонарною підгрупою (окрім підгрупи Картана $T^l$) буде підгрупа, породжена $\mathfrak{sl}(2)$-трійкою:

$$X_{\alpha_1}, \quad X_{-\alpha_1}, \quad H_{\alpha_1} = [X_{\alpha_1}, X_{-\alpha_1}].$$

У цьому легко переконатися безпосередньо. Якщо $H_2 = \mathrm{diag}(1, 1, -2)$, то даний елемент залишиться незмінним при перетворенні подібності, яке здійснюють унітарні матриці вигляду

$$U = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ -\beta^* & \alpha^* & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{i\frac{\alpha}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\alpha}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\alpha} \end{bmatrix},$$

$U \in SU(2) \times U(1)$. Отже, у цьому випадку

$$\mathcal{O}_{H_2} \simeq SU(3)/SU(2) \times U(1).$$

**Комплексна параметризація орбіт.** Комплексні координати на сфері — орбіті групи $SU(2)$ — добре відомі [31]:

$$x^1 + ix^1 = \frac{2w}{1+|w|^2}, \quad x^3 = \frac{1-|w|^2}{1+|w|^2}.$$

Ці формули легко отримати з формул стереографічної проекції сфери на комплексну площину. Узагальнення стереографічної проекції на довільні орбіти компактних класичних груп Лі знайдено в [32].

Комплексні координати на орбіті природним чином виникають, якщо компактну групу розширити до її комплексифікації $G^{\mathbb{C}}$:

$$G^{\mathbb{C}} = \exp\{\mathfrak{g} + i\mathfrak{g}\},$$

де $\mathfrak{g}$, як і раніше, алгебра групи $G$. У некомпактній групі $G^{\mathbb{C}}$ підгрупа $G$ є її максимально компактною підгрупою. Зокрема, для $G^{\mathbb{C}}$ має місце розклад Івасави [22]

$$G^{\mathbb{C}} = NAG.$$

Фіксуємо в $G^{\mathbb{C}}$ параболічну (борелівську) підгрупу $P_0 = NAH$, де $H$ — підалгебра Картана в $G$. Тоді

$$H \backslash G \simeq P_0 \backslash G^{\mathbb{C}}. \tag{20}$$

Еквівалентність (20) дає підставу для комплексної параметризації орбіти загального положення. (У випадку вироджених орбіт мінімальну параболічну підгрупу $P_0$ необхідно розширити до немінімальної.) Якщо до групи $G^{\mathbb{C}}$ застосувати розклад Гауса — Брюа

$$G^{\mathbb{C}} = \cup_{\sigma \in W(G)} P_0 Z \sigma,$$

де $Z = \exp\left\{\sum\limits_{\alpha\in\Delta^+} w_\alpha X_{-\alpha}\right\}$, $X_{-\alpha}$ — від'ємні кореневі вектори, то після факторизації по підгрупі $P_0$ отримаємо систему локальних карт на орбіті $H\backslash G$ з комплексними координатами $\{w_\alpha\}$, $\alpha \in \Delta^+$.

Реалізуємо наведену вище схему у випадку групи $G \simeq SU(3)$. Комплексифікованою групою, очевидно, буде $G^{\mathbb{C}} \simeq SL(3,\mathbb{C})$. Відповідно $N$ — підгрупа верхніх трикутних матриць з одиницями на діагоналі, $Z$ — підгрупа нижніх трикутних матриць, $A$ — підгрупа діагональних матриць $\hat{a} = \mathrm{diag}(a_1, a_2, a_3)$, $a_i > 0$, $a_1 a_2 a_3 = 1$, $T^2 \simeq H$ — підгрупа діагональних матриць вигляду $\hat{h} = \mathrm{diag}(e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}, e^{i\varphi_3})$, де $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 0$. Якщо $\hat{z} \in Z$, то

$$\hat{z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ w_1 & 1 & 0 \\ w_3 & w_2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Застосуємо до елемента $\hat{z}$ розклад Івасави

$$\hat{z} = \hat{n}\hat{a}\hat{u}, \qquad \hat{u} \in SU(3),$$

звідки отримаємо $\hat{u}(w_1, w_2, w_3) = \hat{a}^{-1}\hat{n}^{-1}\hat{z}$.

Якщо $\hat{\mu}(0)$ — початкова точка орбіти, то

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(w_1, w_2, w_3) &= \hat{u}^{-1}\hat{\mu}(\infty)\hat{u} = \\ &= \hat{z}^{-1}\hat{n}\hat{\mu}(\infty)\hat{n}^{-1}\hat{z} \end{aligned} \tag{21}$$

— будь-яка інша її точка. Очевидно, формула (21) дає комплексну параметризацію орбіти параметрами $w_1$, $w_2$, $w_3$.

Для отримання явних виразів необхідно виразити матрицю $\hat{n}$ через змінні $w_\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$. Це можна зробити, скориставшись співвідношенням

$$\hat{z}\hat{z}^* = \hat{n}\hat{a}^2\hat{n}^*,$$

звідки знаходимо

$$a_1^2 = \frac{1}{a_2^2 a_3^2}, \quad a_2^2 = \frac{1}{a_3^2}(1 + |w_1|^2 + |w_3|^2 + |w_1|^2|w_2|^2 -$$
$$-(w_1 w_2 w_3^* + w_1^* w_2^* w_3)), \quad a_3^2 = 1 + |w_2|^2 + |w_3|^2,$$
$$n_1 = \frac{w_1^*(1+|w_2|^2) - w_2 w_2^*}{a_2^2 a_3^2},$$
$$n_2 = \frac{w_2^* + w_1 w_2^*}{a_3^2}, \quad n_3 = \frac{w_3^*}{a_3^2}.$$

Для матриць «одягання» $\hat{z}^{-1}\hat{n}$ та $\hat{n}^{-1}\hat{z}$ отримаємо формули:

$$\hat{z}^{-1}\hat{n} = \begin{bmatrix} 1 & n_1 & \dfrac{w_3^*}{a_3^2} \\ -w_2 & \dfrac{1+|w_3|^2 - w_1^* w_2^* w_3}{a_2^2 a_3^2} & \dfrac{w_2^*}{a_3^2} \\ -w_3 + w_1 w_2 & \dfrac{1 - w_2 - w_1^* w_3}{a_2^2 a_3^2} & \dfrac{1}{a_3^2} \end{bmatrix},$$

$$\hat{n}^{-1}\hat{z} = \begin{bmatrix} 1 & n_1 & \dfrac{w_3^*}{a_3^2} \\ -w_2 & \dfrac{1+|w_3|^2 - w_1^* w_2^* w_3}{a_2^2 a_3^2} & \dfrac{w_2^*}{a_3^2} \\ -w_3 + w_1 w_2 & \dfrac{1 - w_2 - w_1^* w_3}{a_2^2 a_3^2} & \dfrac{1}{a_3^2} \end{bmatrix}.$$

Довільні елементи алгебри $SU(3)$ будемо представляти у вигляді

$$\hat{\mu} = i\sum_a \mu^a X_a,$$

де $X_a$ — ермітові матриці Гелл-Мана. Для них виконуються комутаційні співвідношення

$$[X_a, X_b] = 2if_{abc}X_c,$$

де структурні сталі $f_{abc}$ — дійсні й антисиметричні стосовно перестановок будь-якої пари індексів:

$$f_{123} = 1, \quad f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = \\ = -f_{156} = -f_{367} = \tfrac{1}{2}, \quad f_{456} = f_{678} = \tfrac{\sqrt{3}}{2}.$$

Взявши за початкову точку матрицю $\hat{\mu}(\infty) = i\xi X_8$ і здійснивши над нею перетворення

$$\hat{\mu}(\infty) \to \hat{\mu}(w_1, w_2, w_3) = \hat{z}^{-1}\hat{n}\hat{\mu}(\infty)\hat{n}^{-1}\hat{z},$$

отримаємо шукану параметризацію виродженої орбіти.

$$\mu^1 = -\frac{\xi\sqrt{3}}{2}\frac{w_3w_2^* + w_3^*w_2}{a_3^2}, \quad \mu^4 = \frac{\xi\sqrt{3}}{2}\frac{w_3 + w_3^*}{a_3^2},$$
$$\mu^2 = \frac{\xi\sqrt{3}}{2i}\frac{w_3w_2^* - w_3^*w_2}{a_3^2}, \quad \mu^5 = \frac{\xi\sqrt{3}}{2i}\frac{w_3^* - w_3}{a_3^2},$$
$$\mu^6 = \frac{\xi\sqrt{3}}{2}\frac{w_2 + w_2^*}{a_3^2}, \quad \mu^3 = \frac{\xi\sqrt{3}}{2}\frac{|w_2|^2 - |w_3|^2}{a_3^2}, \quad (22)$$
$$\mu^7 = \frac{\xi\sqrt{3}}{2i}\frac{w_2^* - w_2}{a_3^2}, \quad \mu^8 = \frac{\xi}{2}\frac{2 - |w_2|^2 - |w_3|^2}{a_3^2},$$
$$a_3^2 = \left(1 + |w_2|^2 + |w_3|^2\right).$$

Аналогічним способом можна знайти параметризацію орбіти загального положення. За браком місця ми не будемо тут наводити явних формул; їх отримання не є проблемою, оскільки матриці «одягання» знайдені.

**Топологія орбіт.** Основними топологічними інваріантами орбіт є їх групи гомологій або спряжені до них групи когомологій. Як показано у праці [30], відмінними від тривіальних (окрім групи $H^0$) будуть парні групи когомологій орбіт. Окрім того, у випадку орбіт загального положення $\mathcal{O} \simeq G/T^l$ сума усіх чисел Бетті рівна порядку групи Вейля:

$$b_0 + b_2 + \cdots + b_{\dim \mathcal{O}} = \mathrm{ord}W(G)$$

Аналогічне співвідношення має місце і для вироджених орбіт, лише у правій частині буде стояти порядок фактор-простору $W(G)/W(G')$, де $G'$ підгрупа виродження.

Підставу для явного обрахунку гомологій орбіт дає теорема Лерре — Хірша [33], яка стверджує, що кільце когомологій розшарованого простору $\mathcal{E}$ з компактною базою $M$ і шаром $F$ може бути побудоване як тензорний добуток:

$$H(\mathcal{E}) = H(M) \otimes H(F).$$

У випадку групи $SU(N)$ кожну орбіту загального положення можна подати як розшарований простір, базою якого є вироджена орбіта, а шаром — многовид $CP^1$. Застосувавши теорему Лерре — Хірша до многовиду $SU(3)/T^l$ матимемо

$$H\left(SU(3)/T^l\right) = H^0 \oplus H^2 \oplus H^4 \oplus H^6,$$
$$\dim H^0 = \dim H^6 = 1,$$
$$\dim H^2 = \dim H^4 = 2.$$

Для нас важливою є група $H^2$, оскільки її нетривіальність веде до нетривіальності гомотопічної групи $\pi_2$, елементами якої нумерують топологічно нетривіальні відображення

$$S^2 \to SU(3)/T^2, \; T^2 = U(1) \odot U(1).$$

Оскільки $\dim H^2 = 2$, то $\pi_2 \sim \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

У виродженому випадку орбіта є проективним простором $\mathbb{C}P^2$. Його топологія досконально відома [23], зокрема:

$$H(\mathbb{C}P^2) = H^0 \oplus H^2 \oplus H^4,$$

і всі числа Бетті рівні одиниці. У цьому випадку $\pi_2(CP^2) = \mathbb{Z}$.

Одновимірна група когомологій $H^2(\mathbb{C}P^2)$ породжується $SU(3)$-інваріантною 2-формою, яка в координатах (22) має вигляд:

$$w^2 = \sum_{\alpha,\beta} h_{\alpha\overline{\beta}}\; dw_\alpha \wedge \overline{dw_\beta}, \quad \alpha, \beta = 2, 3,$$
$$h_{\alpha\overline{\beta}} = i\frac{\partial^2}{\partial w_\alpha \partial \overline{w}_\beta} \ln(1 + |w_2|^2 + |w_3|^2).$$

Якщо $w_\alpha$ є функціями на площинні, тобто $w_\alpha = w_\alpha(z, \overline{z})$, $z = x + iy$, $\overline{z} = x - iy$, то вони задають відображення $S^2 \to \mathbb{C}P^2$. Його гомотопічна характеристика — топологічний заряд, обраховується за формулою:

$$Q = \frac{1}{4\pi}\int q(z, \bar{z})\; dz \wedge d\bar{z},$$
$$q(z, \bar{z}) = \sum_{\alpha,\beta} h_{\alpha,\bar{\beta}}\left(\frac{\partial w_\alpha}{\partial z}\frac{\partial \bar{w}_\beta}{\partial \overline{z}} - \frac{\partial w_\alpha}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{w}_\beta}{\partial z}\right).$$

Вільна енергія конфігурації має вигляд

$$F[\mu] = \int f(z,\bar z)\; dz\wedge d\bar z,$$

$$f(z,\bar z) = \sum_{\alpha,\beta} h_{\alpha,\bar\beta}\left(\frac{\partial w_\alpha}{\partial z}\frac{\partial \bar w_\beta}{\partial \bar z} + \frac{\partial w_\alpha}{\partial \bar z}\frac{\partial \bar w_\beta}{\partial z}\right),$$

звідки очевидно, що

$$F[\mu] \geq 4\pi|Q|.$$

Знак рівності досягається у випадку, коли $w_\alpha(z,\bar z)$ є голоморфною $\left(\frac{\partial w_\alpha}{\partial \bar z}=0\right)$ або антиголоморфною $\left(\frac{\partial w_\alpha}{\partial z}=0\right)$ функцією.

**Топологічні збурення.** Як зазначалося вище, будь-яка пара голоморфних функцій

$$w_2 = w_2(z), \quad w_3 = w_3(z), \quad z = x + iy,$$

дає розв'язок задачі мінімізації вільної енергії $F[\boldsymbol{\mu}]$. Побудуємо розв'язок, який у нескінченності має вигляд $\mu^8 \to \xi$, $\mu^a \to 0$, $a \neq 8$. Необхідна асимптотика буде забезпечена, якщо функції $w_2(z)$ і $w_3(z)$ прямуватимуть до нуля при $z \to \infty$. Такі функції можна вибрати у вигляді:

$$w_2 = \frac{a_1}{z - z_1}, \qquad w_3 = \frac{a_2}{z - z_2}, \tag{23}$$

де $z_1$, $z_2$ — фіксовані комплексні числа. Нескладні алгебраїчні перетворення дають:

$$\mu_3 = \frac{\sqrt{3}\xi}{2}\frac{|a_1|^2|z-z_2|^2 - |a_2|^2|z-z_1|^2}{|z-z_1|^2|z-z_2|^2 + |a_1|^2|z-z_2|^2 + |a_2|^2|z-z_1|^2},$$

$$\mu_8 = \frac{\xi}{2}\frac{2|z-z_1|^2|z-z_2|^2 - |a_1|^2|z-z_2|^2 - |a_2|^2|z-z_1|^2}{|z-z_1|^2|z-z_2|^2 + |a_1|^2|z-z_2|^2 + |a_2|^2|z-z_1|^2}.$$

На рис. 2 і рис. 3. зображено профіль двох компонентів $\mu^3$ і $\mu^8$ середнього поля вздовж прямої, яка проходить через полюси функцій $w_2(z)$, $w_3(z)$. Положення полюсів вибрано симетрично стосовно початку координат.

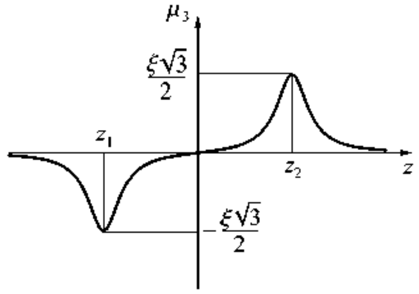


*Рис. 2.* $\mu_3(x,y)$.

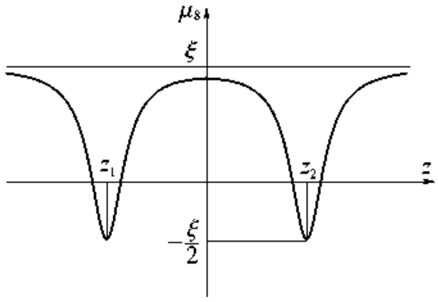


*Рис. 3.* $\mu_8(x,y)$.

Топологічні збурення, які описуються парою функцій (23), мають топологічний заряд $Q = 2$ і їх можна назвати 2-солітонними. Односолітонну конфігурацію отримаємо, коли полюси функцій $w_2(z)$ і $w_3(z)$ збігатимуться. Очевидно, що у випадку раціональних функцій $w_1(z)$, $w_2(z)$ топологічний заряд визначатиметься сумарною кількістю полюсів (з урахуванням кратності). Параметри $a_1$ і $a_2$ визначають розміри солітонів. Легко бачити, що енергія неоднорідної конфігурації не залежить від цих параметрів. Цей факт є наслідком масштабної інваріантності енергії у двовимірному просторі. Отже, топологічні збурення можуть мати як завгодно великі розміри. Наслідок цієї нестійкості (необмежене зростання розмірів солітонів без затрат енергії) може бути причиною руйнування нематичного порядку в досліджуваній моделі. Очевидно, розміри солітонів можна стабілізувати певними граничними умовами. Але це інша задача, для розв'язання якої необхідні інші математичні засоби.


1. *Heisenberg W.* Zur Theorie des Ferromagnetismus // Z. Phys.– 1928.– Bd.49.– S. 619.
2. *Dirac P.* Quantum mechanics of many-electron system // Proc. Roy. Soc.– 1929.– V. 123.– P. 714.
3. *Van Vleck J.H.* The theory of electric and magnetic susceptibilities.– Oxford, 1932.
4. *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.* К теории дисперсии магнитной проницаемости ферромагнитных тел // Phys. Zs. Sowjet.– 1935, Т. 8.– С. 153–169. (Ландау Л.Д. Собранные труды.– Т. 1.– С. 128–143.)
5. *Берьяхтяр В.Г., Иванов Б.А.* Магнетизм — что это?– К.: Наукова думка, 1981.– 204 с.

6. *Нагаев Э.Л.* Магнетики со сложными обменными взаимодействиями.— М.: Наука, 1988.— 230 с.
7. *Локтев В.М., Островский В.С.* Особенности статистики и динамики магнитных диэлектриков с одноионной анизотропией // ФНТ.— 1994.— Т. 20, № 10.— С. 983–1016.
8. *Blume M., Hsien Y.Y.* Biqudratic exchange and quadrupolar ordering // J.Appl. Phys.— 1969.— V. 40, № 3.— P. 1249.
9. *Chen H.H., Levy P.M.* Quadrupole phase transition in magnetic solid // Phys. Rev. Lett.— 1971.— V. 27, № 20.— P. 1383–1385
10. *Nanciel-Bloch M., Sarma G., Castets A.*Spin-one Heisenberg ferromagnet in the presence of biquadratic exchange // Phys. Rev. B.— 1972.— V. 5, № 11.— P. 4603–4608.
11. *Матвеев В.М.* Квантовый квадрупольный магнетизм при биквадратичном обмене // ЖЭТФ.— 1973.— Т. 65, вып. 4.— С. 1626–1636.
12. *Sutherland B.* Moder for a multicomponent quantum system // Phys. Lett. B 12.— 1975.— P. 3795.
13. *Takhtajan L.A.* The picture of low-lying excitations in the isotropic Heisenberg chain of arbitrary spins // Phys. Lett. A 87.— 1982.— P. 479–482.
14. *Babubjin H.M.* Exact solutions of the one-dimensional isotropic Heisenberg chain with arbitrary spin // Phys. Lett. A 90.— 1982.— P. 479. Nucl. Phys. B 215.— 1983.— P. 317–325.
15. *Haldane F.D.M.*Nonlinear field theory of the large-spin Hiesenberg antiferromagnets: semiclassicaly quantired solitons of 1D easy-axis Ne'el state // Phys. Rev. Lett. V. 50.— 1983.— P. 1153–1156
16. *Bose S.* Quantum communication through an unmodulated spin chain // Phys. Rev. Lett. V. 91.— 2003.— P. 207–901.
17. *Rizzi M., Rossimi D., DeChiara G., Montangero S. and Fario R.* Phase diagram of spin-1 bosons on one-dimensional optical zattices // Phys. Rev. Lett.— V. 95.— 2005.— P. 240404.
18. *Островский В.С.* О нелинейной динамике сильно-анизотропных магнетиков со спином $s = 1$ // ЖЭТФ.—1986.— Т. 91.— С. 1690–1701.
19. *Голод П.І., Кісілевич О.В.* Інтегровна динаміка $SU(3)$ магнетика // Препринт ІТФ-93-30У.— К., 1993.
20. *Иванов Б.А.* Дисклинации в нематической фазе магнетика со спином единица // Письма в ЖЭТФ.— 2007.
21. *Ivanov B.A., Kolezhuk A.V.* Effective field theory for $s$= 1 quantum nematic // Phys. Rev.— B.68.— 2003.— P. 052401.
22. *Хелгасон С.*Дифференциальная геометрия и симметрические пространства.— М., 1964.— 533 с.
23. *Переломов А.М.* Решения типа инстантонов в киральных моделях // УФН.— 1981.— Т. 134, вып. 4.— С. 576–609.
24. *Боголюбов Н.Н., Боголюбов Н.Н. (мл).* Введение в квантовую статистическую механику.— М.: Наука, 1984.— 384 с.
25. *Смарт Дж.* Эффективное поле в теории магнетизма.— М.: Мир, 1968.— 272 с.
26. *Тябликов С.В.* Методы квантовой теории магнетизма.— М.: Наука, 1975.— 528 с.
27. *Косевич А.М., Иванов Б.А., Ковалев А.С.* Нелинейные волны намагничености. Динамические и топологические солитоны.— К.: Наук. думка, 1983.— 192 с.
28. *Белавин А.А., Поляков А.М.*Метастабильные состояния двумерного изотропного магнетика // Письма в ЖЭТФ.— 1975.— Т.22, вып. 10.— С. 503–592.
29. *Borel A.* Ka¨hlerian coset spaces of semisimple Lie groups // Proc. Nat. Acad S. USA.— 1954.— V. 40.— P. 1147–1151.
30. *Борель А.* О когомологиях главных раскосных пространств и однородных пространств компактных груп Ли // В сб. Расслоеные пространства.— М., 1958.— С. 163–246.
31. *Голод П.И., Климык У.А.* Математические основы теории симметрии.— М.–Ижевск.: РХД, 2001.— 528 с.
32. *Скрипник Т. В.*Геометричні аспекти теорії представлень та інтегровні гамільтонові системи.— Автореф. дис.— К., 2000.— 16 с.
33. *Ботт Р., Ту Л. В.*Дифференциальные формы в алгебраической топологии.— М.: Наука, 1989.— 336 с.


*P. I. Holod , S. V. Kutniy, A. E. Prykhodchenko*

## LARGE SCALE EXCITATIONS OF MULTICOMPONENT ORDER-PARAMETERS IN A PLANAR MAGNETIC WITH SPIN $s$=1

*We discuss a magnetic model with Heisenberg exchange interaction and biquadratic exchange. As an example we consider the case of spin $s = 1$. As a long-wave approximation for the planar magnetic we have found topologically stable excitations of multicomponent order parameter. The excitations arise spontaneously and cause destruction of biquadratic order.*