УДК 004.624

Шкільняк О. С.

ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ КОМПОЗИЦІЙНО-НОМІНАТИВНИХ ЛОГІК

Досліджено композиційно-номінативні логіки еквітонних квазіарних предикатів. Доведено теореми підстановки для відношення логічного наслідку множин формул та для виведень секвенцій, теорему про незалежність замкненості будованого дерева від порядку застосування секвенційних форм, теорему про елімінацію перетинів. Запропоновано процедуру fs-виведення для скінченних секвенцій.

Математична логіка є основою сучасних інформаційних та програмних систем. Том у особливе значення має розробка та дослідження логічних формалізмів, орієнтованих на потреби програмування та моделювання. Такі логічні формалізми природно будувати на основі інтегрованого інтенсіонально-екстенсіонального підходу. Цей підхід [2] спирається на фундаментальний принцип розвитку як сходження від абстрактного до конкретного, він базується на принципах інтегрованості інтенсіонального та екстенсіонального аспектів, підпорядкованості, композиційності, номінативності. Інтенсіонально-екстенсіональний підхід можна розглядати як подальший розвиток композиційно-номінативного підходу [5] та композиційного програмування [6]. На основі такого підходу побудовано [3] широкий спектр композиційно-номінативних логік різних рівнів абстрактності та загальності.

Метою пропонованої роботи є дослідження семантичних та синтаксичних властивостей композиційно-номінативних логік квазіарних предикатів.

Невизначені тут поняття розуміємо так, як у [3].

Відомо [3], що для логік квазіарних предикатів (як і для класичної логіки) можливо, що правильно $\Phi||=\Psi$, але неправильно $\Phi|=\Psi$.

Для класичної логіки та для логіки повнототальних еквітонних предикатів із $\Phi|=\Psi$ випливає $\Phi||=\Psi$. Водночас маємо:

Теорема 1. *Для логіки еквітонних предикатів не завжди із $\Phi|=\Psi$ випливає $\Phi||=\Psi$.*

Справді, нехай Ψ – це формула q, Φ – це формула $p\&(p\to q)$, де p та q – це атомарні формули. Розглянемо таку інтерпретацію: $\boldsymbol{A}=(A,I)$, що $p_A(d)\uparrow$ для всіх $d\in {}^VA$, $q_A(d)=F$ для всіх $d\in {}^VA$. Тоді $(p\to q)_A(d)\uparrow$ для всіх $d\in {}^VA$, звідки $(p\&(p\to q))_A(d)\uparrow$ для всіх $d\in {}^VA$.

Отже, $\boldsymbol{A}|=\Phi$ та неправильно, що $\boldsymbol{A}|=\Psi$. Тому неправильно $\Phi||=\Psi$. Водночас для кожної $\boldsymbol{M}=(M,I)$ маємо $\boldsymbol{M}|=p\&(p\to q)\to q$, звідки $\Phi|=\Psi$.

Розглянемо співвідношення формул вигляду $\exists x\Phi$ та $\exists y R_y^x\Phi$, де $y\in V$ – тотально неістотне, причому $y\notin nm(\exists x\Phi)$.

Теорема 2. *Нехай y – тотально неістотне та $y\notin nm(\exists x\Phi)$. Тоді:*

1) існують формула Φ, інтерпретація $\boldsymbol{A}=(A,I)$ та $d\in {}^VA$ такі: $(\exists x\Phi)_A(d)\uparrow$ та $(\exists y R_y^x\Phi)_A(d)=T$;

2) існують формула Φ, інтерпретація $\boldsymbol{A}=(A,I)$

та $d\in{}^VA$ *такі:* $(\exists x\Phi)_A(d)=T$ *та для всіх* $\delta\in{}^VA$ *маємо* $(\exists y R_y^x\,\Phi)_A(\delta)\uparrow$;

3) *неможливо, що існують формула* Φ, *інтерпретація* $A=(A,I)$ *та* $d\in{}^VA$ *такі:* $(\exists y R_y^x\,\Phi)_A(d)=T$ *та для всіх* $\delta\in{}^VA$ *маємо* $(\exists x\Phi)_A(\delta)\uparrow$.

Для 1) візьмемо атомарну Φ та для всіх $\delta\in{}^VA$ задамо: $(\Phi)_A(\delta)\uparrow$ при $y\notin im(\delta)$ і $(\Phi)_A(\delta))=T$ при $y\in im(\delta)$.

Для 2) візьмемо атомарну Φ та $A=(A, I)$ таку, що $a\in A$, $b\in A$ та $a\neq b$. Для кожного $d\in{}^VA$ покладемо $\Phi_A(\delta\nabla x\to a\nabla y\to a)\uparrow$, $\Phi_A(\delta\nabla x\to b\nabla y\to b)\uparrow$, $\Phi_A(\delta\nabla x\to a\nabla y\to b)=T$. Тепер візьмемо d таку, що $y\alpha a\in d$.

Для 3) зауважимо: із $(\exists y R_y^x\,\Phi)_A(d)=T$ отримуємо $(R_y^x\,\Phi)_A(d\nabla y\alpha b)=T$ для деякого $b\in A$, звідки $\Phi_A(d\nabla x\to a\nabla y\to b)=T$. Це суперечить умові $(\exists x\Phi)_A(\delta)\uparrow$ для всіх $\delta\in{}^VA$.

Для відношення $|=$ логічного наслідку множин формул логіки еквітонних предикатів справджуються теореми підстановки:

Теорема 3. *Нехай* y *– тотальне неістотне та* $y\notin nm(\Phi,\Gamma,\Delta)$, *нехай* t *– довільне предметне ім'я. Тоді:*

1) *якщо* $\Gamma, R_y^x\,\Phi|=\Delta$, *то* $\Gamma, R_t^x\,\Phi|=\Delta$;

2) *якщо* $\Gamma|=\Delta, R_y^x\,\Phi$ *то* $\Gamma|=\Delta, R_t^x\,\Phi$.

При $t=y$ твердження теореми очевидне.

Нехай $x=y$. Тоді $R_y^x\,\Phi\sim\Phi$, $R_t^x\,\Phi=R_t^x\,\Phi\sim\Phi$ з огляду на те, що y – тотальне неістотне та $y\notin nm(\Phi)$. Тому при $x=y$ твердження теореми виконується.

Залишається розглянути випадок, коли $y\neq x$ та $y\neq t$.

Розглянемо ідею доведення твердження 1), твердження 2) доводиться аналогічно.

Припустимо супротивне: за умов теореми маємо: $\Gamma, R_y^x\,\Phi|=\Delta$ та $\Gamma, R_t^x\,\Phi|\neq\Delta$. Останнє означає, що існують АС $M'=(M, I)$ та $d\in{}^VM$ такі: для всіх $A\in\Gamma$ маємо $A_{M'}(d)=T$, $(R_y^x\,\Phi)_{M'}(d)=T$, та для всіх $B\in\Delta$ маємо $B_{M'}(d)=F$. На підставі тотальної неістотності y та $y\notin nm(\Phi,\Gamma,\Delta)$ існує [4] АС $M=(M, I)$ така, що для довільної $\Xi\in\{\Phi\}\cup\Gamma\cup\Delta$ із $\Xi_{M'}(d)\downarrow$ випливає $\Xi_M(d\|{-y})=\Xi_M(d)=\Xi_{M'}(d)$. Тому існують АС $M=(M, I)$ та $d\in{}^VM$ такі: $y\in im(d)$ та для всіх $A\in\Gamma$ маємо $A_M(d)=T$, $(R_y^x\,\Phi)_M(d)=T$, для всіх $B\in\Delta$ маємо $B_M(d)=F$.

Далі розглядаємо 4 випадки: $x\in im(d)$ та $t\in im(d)$, $x\notin im(d)$ та $t\in im(d)$, $x\in im(d)$ та $t\notin im(d)$, $x\notin im(d)$ та $t\notin im(d)$. Використовуючи умову локально-еквітонності, тотальну неістотність y та умову $y\notin nm(\Phi,\Gamma,\Delta)$, у кожному із цих випадків отримуємо суперечність із припущенням.

Аналогічно доводиться **теорема 4**. *Нехай* y *– тотальне неістотне та* $y\notin nm(\Gamma,\Delta)$, *нехай* t *– довільне предметне ім'я. Тоді:*

1) *якщо* $\Gamma,\Psi|=\Delta$, *то* $\Gamma, R_t^y\,\Psi|=\Delta$;

2) *якщо* $\Gamma|=\Delta,\Psi$ *то* $\Gamma|=\Delta, R_t^y\,\Psi$.

Зауважимо, якщо формула Ψ має вигляд $R_y^x\,\Phi$, причому $y\notin nm(\Phi)$, тоді теорема 3 отримується як наслідок теореми 4.

Наведено [7] процедуру поетапної побудови секвенційного дерева для секвенційних числень кванторного рівня – *QZN*-числень. Можна запропонувати низку інших процедур побудови секвенційних дерев для *QZN*-числень. Водночас справджується **теорема 5.** *Замкненість будованого секвенційного дерева не залежить від порядку застосування секвенційних форм до активних формул листа дерева.*

Дійсно, незважаючи на те, у якому порядку застосовують секвенційні форми до активних формул у побудові секвенційного дерева δ для секвенції $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$, його незамкненість означає наявність в δ незамкненого шляху. Тоді H – множина всіх відмічених формул секвенцій цього шляху – модельна множина. Звідси стандартним способом отримуємо контрмодель для $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$, що суперечить $\Gamma|=\Delta$. Тому в усіх випадках за умови $\Gamma|=\Delta$ отримуємо замкнене секвенційне дерево для $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$. Якщо ж секвенція $_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ вивідна, тоді враховуючи, що кожне застосування базової секвенційної форми зберігає відношення $|=$, отримуємо $\Gamma|=\Delta$ (це теорема коректності).

Для *QZN*-числень справджуються теорема про ослаблення, синтаксичний варіант теореми підстановки та реверс-теорема:

Теорема 6 (про ослаблення). *Нехай секвенція* Σ *має виведення* α. *Тоді за* α *можна збудувати виведення* β *секвенції* Σ, Υ.

Спочатку за секвенційним деревом α збудуємо секвенційне дерево α', фактично копію дерева α, в якому нові тотально неістотні імена (з'являються при виконанні $_{\vdash}\exists$-форм, та, можливо, при першому виконанні $_{\dashv}\exists$-форм) не перетинаються з $nm(\Upsilon)$. Таке дерево α' є, очевидно, виведенням секвенції Σ.

Далі за α' будуємо дерево β, доповнюючи кожен етап побудови дерева α' активізацією чергових формул із Υ. Такі формули із Υ, їх предки та предки формул із Σ, що містять вільні імена з $fr(\Upsilon)\backslash fr(\Sigma)$, не заважають замиканню кожного листа дерева β, адже з огляду замкненості дерева α' такі замикання вже гарантовані формулами Σ та їх предками, що з'являються у виведенні α'. Отже, дерево β – виведення секвенції Σ, Υ.

Теорема 7 (підстановки, синтаксичний варіант). *Нехай* y *– тотально неістотне та* $y\notin nm(\Phi,\Sigma)$, *нехай* t *– довільне предметне ім'я. Тоді:*

1) *нехай* δ *– виведення секвенції* ${}_{\vdash}R_y^x\,\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Sigma}$. *Тоді* δ *можна перебудувати у виведення* δ_t *секвенції* ${}_{\vdash}R_t^x\,\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Sigma}$;

2) *нехай* δ *– виведення секвенції* ${}_{\dashv}R_y^x\,\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Sigma}$. *Тоді* δ *можна перебудувати у виведення* δ_t *секвенції* ${}_{\dashv}R_t^x\,\mathbf{\Phi}, \mathbf{\Sigma}$.

Випливає з теореми 3 і теорем коректності та повноти *QZN*-числень.

Теорема 8 (реверс-теорема). *Для кожної із базових секвенційних форм QZN-числення маємо: якщо висновок секвенційної форми має виведення, тоді її засновок (засновки для форми* ${}_{\vdash}\vee$*) має виведення.*

Нехай $\frac{\mathbf{\Sigma}}{\mathbf{\Omega}}$ –1 – засновкова базова секвенційна форма, де $\mathbf{\Omega}={}_{\vdash}\mathbf{\Gamma}{}_{\dashv}\mathbf{\Delta}$, $\mathbf{\Sigma}={}_{\vdash}\mathbf{\Lambda}{}_{\dashv}\mathbf{K}$. Якщо секвенція $\mathbf{\Omega}={}_{\vdash}\mathbf{\Gamma}{}_{\dashv}\mathbf{\Delta}$ має виведення, то $\mathbf{\Gamma} \models \mathbf{\Delta}$ та замкненим є кожне секвенційне дерево з коренем ${}_{\vdash}\mathbf{\Gamma}{}_{\dashv}\mathbf{\Delta}$, збудоване згідно з процедурою поетапної побудови за того чи іншого порядку застосування секвенційних форм до активних формул (теорема 5). Розглянемо таке дерево, де на 1-му етапі його побудови першою застосована саме секвенційна форма $\frac{\mathbf{\Sigma}}{\mathbf{\Omega}}$. Тоді отримуємо замкнене секвенційне дерево з коренем $\mathbf{\Sigma}$.

Аналогічно доводимо для єдиної базової 2-засновкової форми $\frac{{}_{\vdash}A,\Sigma \quad {}_{\vdash}B,\Sigma}{{}_{\vdash}A \vee B,\Sigma}$. Якщо секвенція ${}_{\vdash}A\vee B$, Σ має виведення, то замкненим є кожне секвенційне дерево з коренем ${}_{\vdash}A\vee B$, Σ, збудоване згідно з процедурою поетапної побудови за того чи іншого порядку застосування секвенційних форм до активних формул (теорема 5). Розглянемо таке дерево, що на 1-му етапі його побудови першою застосована саме форма $\frac{{}_{\vdash}A,\Sigma \quad {}_{\vdash}B,\Sigma}{{}_{\vdash}A \vee B,\Sigma}$. Тоді отримуємо замкнені секвенційні дерева з коренями ${}_{\vdash}A$, Σ та ${}_{\vdash}B$, Σ.

Основою сучасних методів автоматизованого пошуку виведень є теорема Генцена про усунення перетинів [1, 4]. Аналогічне твердження справджується для логіки еквітонних предикатів.

QZC-числення визначається аналогічно *QZN*-численню, але додатково має *правило перетину* $\frac{{}_{\vdash}A,\Sigma \quad {}_{\dashv}A,\Sigma}{\Sigma}$.

Формула *A* називається формулою перетину.

Теорема 9 (елімінація перетинів). *Кожне виведення секвенції* $\mathbf{\Sigma}$ *в QZC-численні можна перебудувати у виведення* $\mathbf{\Sigma}$ *в QZN-численні.*

Перебудова секвенційного дерева з перетинами полягає у виконанні кроків нормалізації. При виконанні кроків нормалізації першого типу формула перетину піднімається по дереву догори, до листів. При виконанні кроків нормалізації другого типу формула перетину спрощується. Якщо секвенція $\mathbf{\Sigma}$ вивідна, то її виведення – замкнене секвенційне дерево з коренем $\mathbf{\Sigma}$ – скінченне, тому навіть за довільного порядку виконання кроків нормалізації таке дерево з перетинами перебудується в дерево без перетинів.

Опишемо кроки нормалізації першого типу. Вони виконуються, коли хоча б в одному піддереві з коренем – засновком ПП – формула перетину не розбивається. Нехай для визначеності це буде ${}_{\dashv}A$.

Залежно від того, яка секвенційна форма застосовується до секвенції-засновку ПП, виконуємо такі дії.

Нехай до ${}_{\vdash}A, \mathbf{\Sigma}$ застосована 1-засновкова форма вигляду $\frac{{}_{*}Q,\Delta}{{}_{*}P,\Delta}$. Зокрема, для ${}_{\dashv}\exists$-форми ${}_{*}P$ – це формула ${}_{\dashv}\exists x\Phi$, ${}_{*}Q$ – це ${}_{\dashv}R_{y_1}^x(\Phi)$,… ${}_{\dashv}R_{y_n}^x\,{}_{\dashv}\exists x\Phi$. Тоді

$$\begin{tikzcd}
\delta_1 & & \\
{}_{*}Q, \Sigma, {}_{\vdash}A \arrow[u] & & \delta_2 \\
{}_{*}P, \Sigma, {}_{\vdash}A \arrow[u] & & {}_{*}P, \Sigma, {}_{\dashv}A \arrow[u] \\
 & {}_{*}P, \Sigma \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

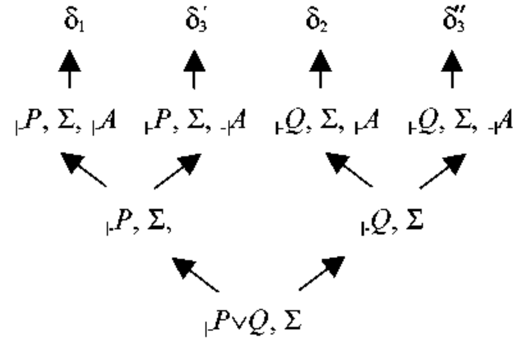
$$\begin{tikzcd}
\delta_1 & & \delta_2' \\
{}_{*}Q, \Sigma, {}_{\vdash}A \arrow[u] & & {}_{*}Q, \Sigma, {}_{\vdash}A \arrow[u] \\
 & {}_{*}Q, \Sigma \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
 & {}_{*}P, \Sigma \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

переходить у

Нехай до ${}_{\vdash}A, \Sigma$ застосована 2-засновкова форма $\frac{{}_{\vdash}P,\Sigma \quad {}_{\vdash}Q,\Sigma}{{}_{\vdash}P \vee Q,\Sigma}$. Тоді

$$\begin{tikzcd}
\delta_1 & & \delta_2 & & \delta_3 \\
{}_{\vdash}P, \Sigma, {}_{\vdash}A \arrow[u] & & {}_{\vdash}Q, \Sigma, {}_{\vdash}A \arrow[u] & & \\
 & {}_{\vdash}P\vee Q, \Sigma, {}_{\vdash}A \arrow[ul] \arrow[ur] & & & {}_{\vdash}P\vee Q, \Sigma, {}_{\dashv}A \arrow[uu] \\
 & & {}_{\vdash}P\vee Q, \Sigma \arrow[ul] \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}$$

переходить у



Опишемо кроки нормалізації другого типу.

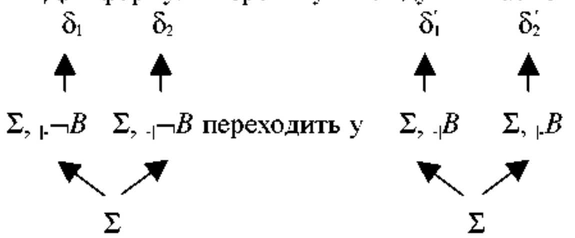
Нехай один із засновків ПП – замкнена секвенція, для визначеності нехай це $_{\vdash}A$, Σ.

Якщо $_{\dashv}A \notin \Sigma$, то суперечність маємо вже в Σ, тому й секвенція $_{\dashv}A$, Σ замкнена, тому піддерева з коренями $_{\vdash}A$, Σ та $_{\dashv}A$, Σ можна видалити, і ПП зникає.

Якщо $_{\dashv}A \in \Sigma$, то

Нехай засновки ПП – незамкнені формули. Тоді спрощуємо формулу перетину.

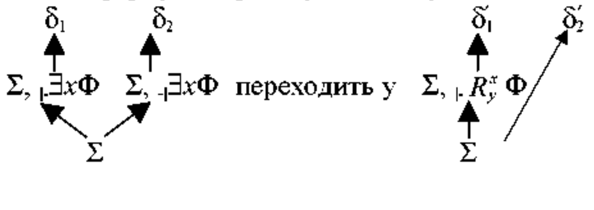
Для формули перетину вигляду $\neg B$ маємо:



Для формули перетину A вигляду $R_x^v\Phi$ маємо:

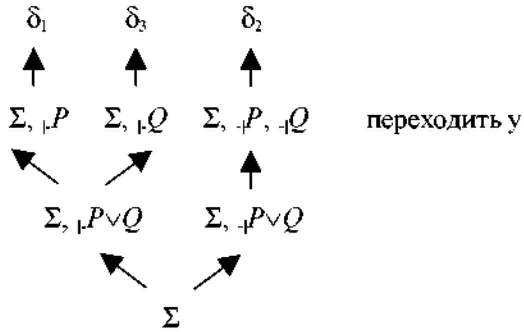
Тут формула B утворена із A на основі однієї з відповідних властивостей (залежно від того, як на останньому кроці побудови утворена формула Φ) RT, RR, R¬, R∨, FN, R∃, R∃∃.

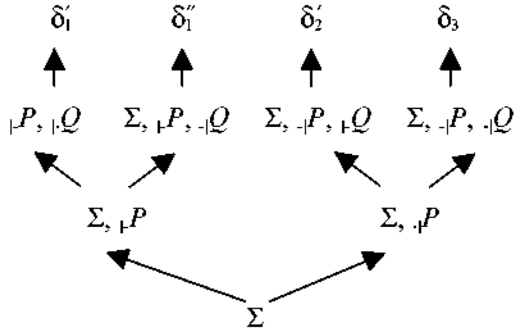
Для формули перетину A вигляду $\exists x\Phi$ маємо:



Тут δ_2 перебудовується так, що кожен раз під час застосування $_{\dashv}\exists$-форми до $_{\dashv}\exists x\Phi$ та відповідному породженні m прикладів, ПП розмножуються (із використанням теореми підстановки) m раз, при цьому всі входження $_{\dashv}\exists x\Phi$ врешті-решт видаляються.

Нарешті, для формули перетину вигляду $P\vee Q$ маємо:





Зауважимо, що можливість елімінації ПП випливає вже з теорем коректності та повноти. Справді, нехай секвенції $_{\vdash}A, \Sigma$ та $_{\dashv}A, \Sigma$ – вивідні. Нехай $\Sigma = {}_{\vdash}\Gamma, {}_{\dashv}\Delta$. З умови $_{\vdash}A, \Sigma$ вивідна та $_{\dashv}A, \Sigma$ вивідна за теоремою коректності маємо $A, \Gamma \models \Delta$ та $\Gamma \models \Delta, A$. Звідси отримуємо $\Gamma \models \Delta$, тому за теоремою повноти $\Sigma = {}_{\vdash}\Gamma, {}_{\dashv}\Delta$ вивідна.

Для скінченних секвенцій введемо поняття *fs-виведення* (скінченно-секвенційного виведення). Процедура *fs*-виведення також розбита на етапи, але, на відміну від стандартних процедур виведення, на кожному етапі доступні *всі* формули відповідних вершин секвенційного дерева. Для *fs*-виведення скінченних секвенцій отримуємо відповідну версію теорем коректності та повноти.

Теорема 10 (коректності та повноти). *Скінченна секвенція* $_{\vdash}\Gamma, {}_{\dashv}\Delta$ *має fs-виведення* $\Leftrightarrow \Gamma \models \Delta$.

Наслідок. *Скінченна секвенція* Σ *має виведення* ⇔ Σ *має fs-виведення.*

Кількість *етапів* стандартного виведення скінченної секванції не менша за кількість етапів її *fs*-виведення. Водночас кількість *кроків* виведення (крок виведення – це застосування секвенційної форми) може істотно відрізнятися в той чи інший бік. Наприклад, якщо при виведенні превалює застосування |v-форм (секвенційне дерево дуже розгалужується), то кількість кроків *fs*-виведення може значно перевищити кількість кроків стандартного виведення.

Висновки. У статті запропоновано нові результати стосовно властивостей композиційно-номінативних логік квазіарних предикатів. Отримані семантичний та синтаксичний варіанти теореми підстановки для відношення логічного наслідку та для виведень секвенцій, теорема про незалежність замкненості будованого дерева від порядку застосування секвенційних форм, реверс-теорема, теорема про елімінацію перетинів для логіки еквітонних предикатів. Запропоновано процедуру *fs*-виведення для скінченних секвенцій.

Результати роботи планується впровадити в навчальний процес.

1. *Клини С.* Математическая логика.- М.: Наука, 1973.- 480 с.
2. *Нікітченко М. С, Шкільняк С. С.* Інтенсіонально-орієнтований підхід до побудови логічних систем // Проблемы программирования.- 2007.- № 2.- С. 15-40.
3. *Нікітченко М. С, Шкільняк С. С.* Основи математичної логіки.- К.: Київ. ун-т, 2006.- 246 с.
4. *Непейвода Н. Н.* Прикладная логика.- Новосибирск: НГУ, 2000.- 521 с.
5. *Никитченко Н. С.* Композиционно-номинативный подход к уточнению понятия программы // Проблемы программирования.– 1999.– № 1.– С. 16–31.
6. *Редько В. Н.* Основания композиционного программирования // Программирование.– 1979.– № 3.– С. 3–13.
7. *Шкільняк С. С.* Фінітарні логіки квазіарних предикатів.– Вісник Київ. ун-ту. Серія: кібернетика.– 2005.– Вип.6.– С. 47–55.
8. *Shkilniak O. S.* On some properties of logics of partial predicates.– International conference TAAPSD'2005. Abstract.– K., 2005.– C. 24–26.

O. Shkilniak

RESEARCH OF PROPERTIES COMPOSITION NOMINATIVE LOGICS

Composition nominative logics of equitone quasi-are predicates have been investigated. The substitution theorems for the relation of logical consequence for sets of formulas and for sequential derivation, the theorem of independence of closiness of constructed sequential tree of application order of sequential forms, and the cut elimination theorem have been proved. The fs-derivation procedure for finitary sequences has been introduced.