**УДК 681.513**

*Шатохіна Ю. В., Яценко В. О.*

# СИМЕТРІЇ ТА ДЕКОМПОЗИЦІЯ КЕРОВАНОЇ МОДЕЛІ НЕЛІНІЙНОЇ ҐРАТКИ

*Знайдено умови декомпозиції нелінійних керованих ґраток, виходячи з їх локальної та глобальної симетрій. Використано методи диференціальної геометрії для вивчення групового перетворення інформації нелінійними динамічними системами.*

Починаючи з 70-х років активно розвиваються дослідження керованих процесів на мікрорівні [1, 3, 11], що мають на меті створення принципово нових молекулярних приладів перетворення інформації. Попри наявні досягнення в цьому напрямі, досі ще не розроблені ефективні математичні методи дослідження таких систем. Один із можливих підходів до заповнення цього пробілу може ґрунтуватися на використанні диференціально-геометричних методів теорії систем [2, 4]. Вивчення закономірностей перетворення інформації різними системами (біомолекулярними, квантовими та ін.) — один із найсуттєвіших етапів створення нових елементів та пристроїв інформатики. Досить актуальним з точки зору ефективності перетворення інформації є як експериментальне, так і теоретичне дослідження можливості використання нерівноважних процесів складної структури, що протікають у таких системах, з метою реалізації різноманітних обчислювальних операцій. Необхідність дослідження цих процесів вимагає розробки відповідних математичних методів. У зв'язку з цим ми запропонували підхід, в основі якого лежить припущення про можливість адекватного описання інформаційних процесів моделями математичної теорії систем. В роботі використовується ідея декомпозиції систем автоматичного управління з

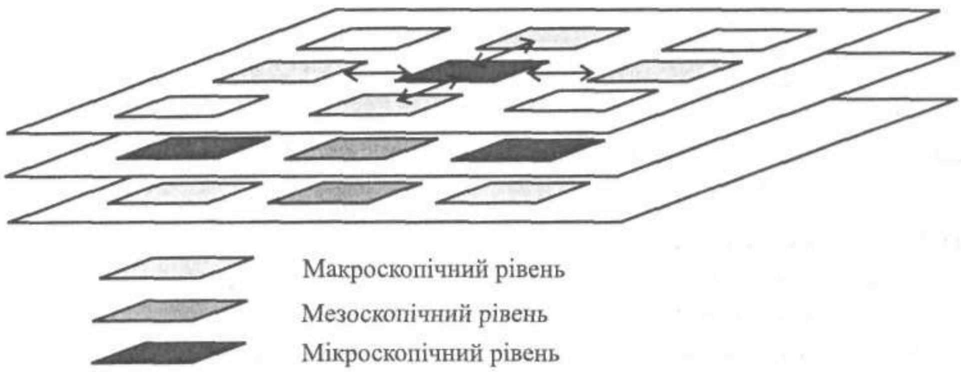


*Рис. 1.* Нелінійна керована ґратка

дискретною симетрією [3] та результати з теорії динамічних систем з неперервною групою симетрії [4, 5].

Дана робота присвячена дослідженню моделі керованої нелінійної ґратки, кожна комірка якої описується комутативною діаграмою. Математична модель такої ґратки ґрунтується на понятті розшарування й використовує геометричний метод теорії систем [6-10, 12].

Розглядається ґратка, кожен елемент якої — деяка динамічна система $S$, яка здійснює перетворення $F$ вхідного інформаційного впливу $U$ на вихідний $X$. Припускається, що на процес перетворення інформації можна діяти реконфігуруючим впливом, який змінює його динамічну поведінку, структуру, симетрію та ін. Описані вище об'єкти $S$ називатимемо динамічними системами перетворення інформації або комірками нелінійної керованої ґратки.

Зв'язок вхідних впливів з вихідними, необхідний для одержання відповідей на питання про спосіб програмування всієї системи, оптимізацію потоку інформаційних сигналів, взаємозв'язок глобальних системних властивостей ґратки (стійкості, керованості та ін.) з відповідними локальними властивостями різних підсистем, описується математичною моделлю $L$ такої нелінійної ґратки. Вирішення цих питань необхідне для розв'язання задач розпізнавання образів, побудови асоціативної пам'яті тощо. У праці дається узагальнений опис ґратки, що містить велику кількість підсистем (наприклад, нейромережа). Керований процес в окремій підсистемі ґратки адекватно описується комутативною діаграмою, яка узагальнює поняття нелінійної керованої динамічної системи на многовиді. Потрібно поняття симетрії, характерне для класичної механіки, перенести на нелінійну ґратку, елементи якої є комутативними діаграмами, і показати, що запропонована модель допускає локальні та/або глобальні декомпозиції на підсистеми меншої розмірності зі зворотним зв'язком.

## 1. Необхідні поняття та означення

У цьому розділі наведені деякі означення та поняття, необхідні для опису структури нелінійної керованої ґратки та умов її декомпозованості. Необхідні поняття про многовиди, зв'язності та розподіли подані у праці [2]. Введемо означення нелінійної керованої ґратки.

**Означення 1.** *Під нелінійною керованою ґраткою (НКҐ) розумітимемо складну динамічну систему, кожна підсистема (комірка) якої описується комутативною діаграмою. Між: окремими комірками — найближчими сусідами — існують зв'язки (як у клітинковому автоматі) (див. рис. 1).*

**Означення 2.** *Коміркою нелінійної керованої ґратки (коміркою НКҐ) будемо називати трійку $\hat{F}(B, M, \psi)$, де $B$ — гладке розшарування над $M$ з проекцією $\pi : B \to M$; $\pi_M$ — натуральна проекція $TM$ на $M$; $\psi$ — гладке відображення, таке що діаграма, наведена на рис. 2, комутативна.*

Вважатимемо, що керовану ґратку також можна звести до комутативної діаграми наступного типу (рис. 2).

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[rr] \arrow[dr, "\pi"'] & & TM \arrow[dl, "\pi_M"] \\
& M &
\end{tikzcd}
$$

*Рис. 2.* Діаграма комірки нелінійної керованої ґратки

Многовид $M$ будемо інтерпретувати як простір станів комірки НКГ, а шар $\pi^{-1}(x) \in B$ — як простір значень вхідних впливів, який залежить, у загальному випадку, від поточного стану системи. Якщо вибрати координати, що відповідають шару $B_x$, як $(x,u)$, то локально це означення комірки НКГ $\hat{F}$ відповідає нелінійному перетворенню $\psi:(x,u) \to (x, \psi(x,u))$ і динамічній системі

$$\dot{x}(t) = \psi(x(t), u(t)), \quad u(t) \in U, \qquad (1)$$

де $x$ — вектор стану комірки НКГ; $u = (u^1, u^2)$ — вплив, що керує; $u^1(\cdot,\cdot)$ — вектор закодованого вхідного інформаційного впливу, який залежить, загалом, як від часу, так і від поточного стану; $u^2(\cdot,\cdot)$ — вплив, що призначений для реконфігурації динамічних властивостей комірки НКГ та її навчання.

Алгоритм керування $u^2$ наділяє систему здатністю перетворювати множину вхідних впливів на таку множину вихідних сигналів, яка дає змогу однозначно ідентифікувати вхідні образи. По суті, він реалізує процес декодування, під час якого здійснюється ідентифікація вхідних образів. У найпростішому випадку його можна реалізувати на основі методу послідовної сегментації вхідних впливів. Такий метод дає можливість однозначно розділяти вхідні образи, використовуючи найпростіше правило бінарного декодування.

Спираючись на роботи [3, 11–14], перейдемо від динамічного до групового описання об'єкта нашого дослідження.

**Означення 3.** *Нехай $M$ — гладкий многовид. Лівою дією ($G$-дією) групи Лі $G$ на $M$ називатимемо гладке відображення $Q: G \times M \to M$, таке що: 1) для всіх $x \in M$, $Q(e,x) = x$; 2) для будь-яких $g$ і $h \in G$, $Q(g, Q(h,x)) = Q(gh, x)$ при всіх $x \in M$.*

Для різних моментів часу зафіксуємо одну зі змінних і розглянемо дію $Q$ як функцію від решти змінних. Нехай $Q_g: M \to M$ позначає функцію $x \mapsto Q(g,x)$, а $Q_x: G \to M$ — функцію $g \mapsto Q(g,x)$. Зазначимо, що оскільки $(Q_g)^{-1} = Q_{g^{-1}}$, то $Q_g$ — дифеоморфізм.

Введемо поняття дії групи на многовиді.

**Означення 4.** *Нехай $Q$ — дія $G$ на $M$. Орбітою ($Q$-орбітою) точки $x \in M$ називатимемо множину $G \cdot x = \{Q_g(x) | g \in G\}$. Дія є вільною на $x$, якщо $g \mapsto Q_g(x)$ — взаємно однозначне. Воно є вільним на $M$ тоді і тільки тоді, коли воно є вільним на всіх $x \in M$.*

Введемо тепер поняття глобальної симетрії комірки нелінійної керованої ґратки.

**Означення 5.** *Нехай $\hat{F}(B, M, \psi)$ — комірка нелінійної керованої ґратки, $\Theta$, $Q$ — дії на $B$ і $M$ відповідно. Тоді $\hat{F}$ має симетрію $(G, \Theta, Q)$, якщо діаграма, наведена на рис. 3, є комутативною для всіх $g \in G$.*

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[rrr, "\Theta_g"] \arrow[dr, "\psi"] \arrow[dd, "\pi"'] & & & B \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[dd, "\pi"] \\
& TM \arrow[r, "TQ_g"'] \arrow[dl, "\pi_M"] & TM \arrow[dr, "\pi_M"'] & \\
M \arrow[rrr, "Q_g"'] & & & M
\end{tikzcd}
$$

*Рис. 3.* Комутативна діаграма комірки НКГ з симетріями

У межах наведеного означення розглянемо окремий випадок, коли симетрія лежить «повністю у просторі станів».

**Означення 6.** *Нехай $B = M \times U$, де $U$ — деякий многовид, тоді $(G, Q)$ — симетрія простору станів ґратки $\hat{F}(B, M, \psi)$, якщо $(G, \Theta, Q)$ — симетрія $\hat{F}$ при $\Theta_g = (Q_g, Id_U)$ : $(x,u) \mapsto (Q_g(x), u)$.*

Глобальну симетрію простору станів можна визначити лише для такої комірки НКГ, шар якої $B_x$ — тривіальне розшарування, оскільки в протилежному випадку вхідні простори будуть залежати від стану і задача суттєво ускладнюється.

Введемо означення локальної симетрії.

**Означення 7.** *Нехай $Q: G \times M \to M$ — дія та $\xi \in T_eG$. Тоді*

$$Q^{\xi}(R \times M \to M) : (t, x) \mapsto Q(\exp t\xi, x),$$

*де $\exp : T_eG \to G$ — звичайне експоненціальне відображення, с $R$-дією на $M$, $Q^{\xi}$ — повний потік на $M$. Відповідне векторне поле на $M$, що визначається виразом*

$$\xi_M(x) = \frac{d}{dt} Q(\exp\ t\xi, x)|_{t=0}, \qquad (2)$$

*називатимемо інфінітезимальним генератором дії, який відповідає $\xi$.*

Для векторного поля $X$ нехай $X_t$ позначає його потік, тобто $\dot{X}_t = F_t(X_0)$. З означення інфінітезимального генератора видно, що якщо $(G, \Theta, Q)$ — симетрія ґратки $\hat{F}(B, M, \psi)$, то діаграма, наведена на рис. 4, комутативна для всіх $t \in R$ і $\xi \in T_eG$.

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rrr, "(\xi_B)_t"] \arrow[dr, "\psi"] \arrow[dd, "\pi"'] & & & B \arrow[dl, "\psi"'] \arrow[dd, "\pi"] \\
& TM \arrow[r, "T(\xi_M)_t"'] \arrow[dl, "\pi_M"] & TM \arrow[dr, "\pi_M"'] & \\
M \arrow[rrr, "(\xi_M)_t"'] & & & M
\end{tikzcd}$$

*Рис. 4.* Діаграма комірки НКГ, яка має симетрію.

На основі властивості локальної комутативності дамо таке означення інфінітезимальної симетрії комірки НКГ.

**Означення 8.** *Нехай $\hat{F}(B, M, \psi)$ — комірка НКГ, тоді $(G, \Theta, Q)$ — інфінітезимальна симетрія $\hat{F}$, якщо для кожного $x_0 \in M$ існує відкритий окіл $\hat{O}$ точки $x_0$ і $\epsilon > 0$ таке, що*

$$(\xi_M)_t * \psi(b) = \psi((\xi_B)_t(b)) \qquad (3)$$

*для всіх $b \in \pi^{-1}(\hat{O})$, $|t| < \epsilon$ і $||\xi|| < 1$, $\xi \in T_eG$, де $||\cdot||$ — довільна фіксована норма на $T_eG$.*

Нескінченно малу симетрію простору станів можна визначити для нетривіальних розшарувань многовиду вхідних впливів у випадку, коли можна ввести інтегровну зв'язність. З цією метою введемо таке означення.

**Означення 9.** *[4, 5] Нехай $H(\cdot)$ — інтегровна зв'язність на $B$, $(G, \Theta, Q)$ — симетрія $F$. Тоді $(G, \Theta, Q)$ — інфінітезимальна симетрія простору станів, якщо $\xi_B(b) \in H(b)$ для всіх $\xi \in T_eG$; тобто інфінітезимальні генератори $\Theta$ є горизонтальними.*

Введемо означення еквівалентності по оберненому зв'язку двох комірок НКГ за аналогією з роботою [4].

**Означення 10.** *Комірка $\hat{F}(B, M, \psi)$ — еквівалентна по оберненому зв'язку комірці $F'(B, M, \tilde{\psi})$, якщо існує такий ізоморфізм $\gamma : B \to B$, що діаграма, наведена на рис. 5, комутативна.*

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, bend left, "\gamma"] \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "\pi"'] & TM \arrow[d, "\pi_M"] & B \arrow[l, "\psi"'] \arrow[dl, "\pi"] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

*Рис. 5.* Діаграма комірок НКГ, еквівалентних по оберненому зв'язку.

Ізоморфізм означає, що для $x \in M$, $\gamma_x$ є відображення з шару над $x'$ в шар над $x$, при цьому $\gamma_x$ — дифеоморфізм. Отже, це відповідає «оберненому зв'язку» по керуванню.

## 2. Локальна структура комірки НКГ з симетріями

Оскільки нас цікавить локальна структура комірки НКГ, необхідно припустити, що ґратка має інфінітезимальну симетрію, яка задовольняє деяку умову невиродженості. Для цього розмірність $M$ покладемо рівною $n$, а розмірність $G$ рівною $k$ при $k < n$. Зазначимо, що дія $Q : G \times M \to M$ вільна в точці $m \in M$, якщо $Q_m : G \to M$ взаємно однозначне. Це еквівалентно тому, що дотичне відображення $Q$ має повний ранг, тобто $\mathrm{rank} = \dim G$. Звідси, $Q$ — вільне на $M$, якщо і тільки якщо воно вільне в деякому околі $m$. Говоритимемо, що дія, яка задовольняє цю умову, є невиродженою в точці $m$.

Основний результат цього розділу полягає в тому, що в околі невиродженої точки наявність інфінітезимальної симетрії в комірці

НКҐ дає змогу декомпозувати її на каскадне поєднання простіших підсистем. Структура цих підсистем залежить, у загальному випадку, від групи симетрії $G$. Якщо, наприклад, $G$ має нетривіальний центр, тоді одна з підсистем фактично є підсистемою квадратурного типу.

Нехай також $C = \{h{\in}G|hg = gh\,\forall\, g{\in}G\}$ – центр групи $G$, якому відповідає ядро $C_+$ підалгебри Лі $T_eG$, яке має таку саму розмірність, що і $C$. Звідси, якщо $G$ має $l$-вимірний центр, то існують лінійно незалежні вектори $\xi^1, \dots, \xi^k \in T_eG$, такі що $[\xi^i, \xi^j] = 0$ при всіх $1 \le i \le l$ і $1 \le j \le k$.

Застосовуючи результати досліджень Вандер-Шафта і Грізлі [4, 5] про властивості систем із симетріями до комірки НКҐ, можна сформулювати такі теореми.

**Теорема 1.** *Припустимо, що* $\hat{F}(B, M, \psi)$ *– комірка нелінійної керованої ґратки з інфінітезимальною симетрією простору станів* $(G, \Theta, Q)$; *$G$ має $l$-вимірний центр, $Q$ невироджене в точці $m \in M$. Тоді в околі $m$ існують координати $(x_1, \dots, x_n, u)$ для $B$, такі що в цих координатах $F$ задається виразом*

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_{n-k}, u), \quad i = 1, \dots, n-k \quad (4)$$

$$\dot{x}_j = f_j(x_1, \dots, x_{n-1}, u), \quad j = n-k = 1, \dots, k.$$

За результатами, отриманими для ґраток з інфінітезимальними симетріями простору станів, можна запропонувати структуру декомпозованої ґратки. Для цього достатньо показати, що декомпозована ґратка з інфінітезимальною симетрією локально еквівалентна по оберненому зв'язку вихідній ґратці з інфінітезимальною симетрією простору станів.

**Означення 11.** *Нехай* $\hat{F}(B, M, \psi)$ *– комірка НКҐ, $\hat{O}$ – відкрита підмножина $M$. Тоді $F|O$ ($F$ обмежена на $O$) називатимемо ґратку виду* $\hat{F}(\pi^{-1}(\hat{O}), \hat{O}, \psi|\pi^{-1}(\hat{O}))$.

**Теорема 2.** *Нехай* $\hat{F}(B, M, \psi)$ *має інфінітезимальну симетрію* $(G, \Theta, Q)$, *$Q$ невироджене в точці $m$. Тоді існує окіл $m$ і ґратка $\hat{F}$ з інфінітезимальною симетрією* $(G, \tilde{\Theta}, Q)$ *така, що $\hat{F}|\hat{O}$ еквівалентна по оберненому зв'язку ґратці $\hat{F}$.*

Нехай $\hat{F}(B, M, \psi)$ – ґратка НКҐ із симетрією $(G, \Theta, Q)$ і $Q$ невироджене в точці $m$. Тоді в околі $m$ $\hat{F}$ еквівалентна по оберненому зв'язку $F$ з інфінітезимальною симетрією і має структуру, зображену на рис. 6, де $\gamma$ – функція оберненого звязку, $L^i$ – нелінійні підсистеми розмірності $(n-k)$ і $(k-l)$ відповідно, а $Q$ – $l$-вимірна система «квадратурного» типу.

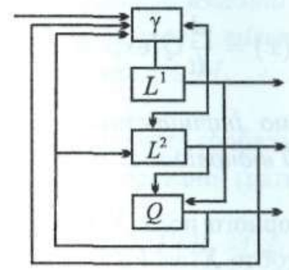


*Рис. 6.* Локальна структура нелінійної керованої ґратки з інфінітезимальними симетріями.

### 3. Глобальна структура комірки НКҐ

Декомпозованість НКҐ із глобальними симетріями є результатом факторизації простору станів НКҐ, яка випливає з властивостей симетрії.

Введемо означення правильності дії.

**Означення 12.** *Нехай $Q$ – $G$-дія на $M$. Казатимемо, що $Q$ діє правильно, якщо $(g, m) \mapsto (m, Q(g, m))$ – правильне відображення, тобто праобраз компактних множин є компактним.*

Наведене означення еквівалентне такому твердженню: кожен раз, коли послідовність $\{x_n\}$ є збіжною в $M$, послідовність $\{Q_{g_n}(x_n)\}$ збігається на $M$ та $\{g_n\}$ має підпослідовність, що збігається в $G$. Звідси, якщо $G$ компактне, то ця умова задовольняється автоматично. Належність до тієї ж $Q$-орбіти є відношенням еквівалентності на $M$. Нехай $M/G$ – множина класів еквівалентності, $p: M \to M/G$ визначене як $p(m) = G \cdot m$. Наділимо $M/G$ топологією, тобто $V, \subset M/G$ – відкрите тоді й тільки тоді, коли $p^{-1}(V)$ відкрите в $M$. Взагалі, $M/G$ може бути вельми поганим простором.

Якщо $G$ діє на $M$ вільно і правильно, то $M/G$ – гладкий многовид, $p: M \to M/G$ – головне розшарування з групою Лі $G$.

Введемо такі обмеження на головне розшарування:

1. $p$ — гладка функція, яка має повний ранг.
2. $p: M \to M/G$ допускає поперечний перетин (тобто гладке відображення $\sigma: M/G \to M$ таке, що $p \cdot \sigma$ — тотожне відображення на $M/G$) тоді і тільки тоді, коли $M$ еквівалентне $M/G \times G$ [2].
3. Задано топологічні умови, які гарантують існування перетину, тобто, якщо $M/G$ або $G$ є стискаючим, то має існувати поперечний перетин [2].

Сформулюємо теорему, яка необхідна для отримання глобальної факторизації простору станів НКГ.

Нехай $Q_m: G \to G \cdot m$ задане $g \mapsto Q(G, m)$. Справедливим є такий результат щодо глобальної структури НКГ із симетріями.

**Теорема 3.** *Припустимо, що $\hat{F}(M \times U, M, \psi)$ — комірка НКГ з симетрією простору станів $(G, Q)$. Тоді, якщо $Q$ є вільним і правильним, $p: M \to M/G$ допускає поперечний перетин $\sigma$, то $\hat{F}$ ізоморфне системі*

$$\begin{aligned}
\dot{y} &= \widetilde{\psi}(y, u) \\
\dot{g} &= (T_e L_g)(T_e Q_{\sigma(y)})^{-1} \times \\
&\quad \times [\psi(\sigma(y), u) - (T_y \sigma)\widetilde{\psi}(y, u)],
\end{aligned} \tag{5}$$

*визначеній на $M/G \times G$.*

Сформулюємо твердження про еквівалентність по оберненому зв'язку комірок НКГ із симетріями.

**Твердження 1.** *Нехай комірка НКГ $\hat{F}(M \times U, M, \psi)$ має симетрію $(G, \Theta, Q)$, таку що $Q$ є вільним і правильним. Тоді існує ґратка $\hat{F}$ із симетрією $(G, Q)$, якій $\hat{F}$ еквівалентна по оберненому зв'язку за умови, що $p: M \to M/G$ допускає поперечний перетин $\sigma$.*

Об'єднуючи теорему 3 і твердження 1, отримуємо такий наслідок:

**Наслідок 1.** *Нехай комірка НКГ $\hat{F}(M \times U, M, \psi)$ має симетрію $(G, \Theta, Q)$, $Q$ вільне і правильне, $p: M \to M/G$ допускає поперечний перетин. Тоді існує модель комірки НКГ $\hat{F}$ із симетрією простору станів $(G, Q)$, якій $\hat{F}$ еквівалентна по оберненому зв'язку. Отже, $\hat{F}$ має глобальну структуру, наведену на рис. 7.*

## 4. Деякі можливості застосування отриманих результатів

Становить інтерес дослідження декомпозованості систем, які допускають описання системою рівнянь

$$\dot{x}(t) = \psi(x(t), u(t)). \tag{6}$$

Для (6) можна визначити декомпозовану систему (ґратку) $L$ як нетривіальний каскад підсистем (комірок) $L^1$ і $L^2$. Якщо алгебра Лі $\hat{L}(L)$ становить напівпряму суму скінченновимірних підалгебр $L^1$ та ідеалу $L^2$, тоді вона має нетривіальний каскадний розклад на підсистеми $L^1$ і $L^2$, такі що $\hat{L}(L^1) = L^1$ і $\hat{L}(L^2) = L^2$. З цього факту й теореми Леві можна показати, що якщо $\hat{L}(L)$ — скінченновимірна, то система допускає нетривіальний розклад на паралельний каскад підсистем $L^i$ з простими підалгебрами Лі, за якими йде каскад одновимірних систем $L^j$. В результаті основне інформаційне перетворення виконується в підсистемах з простими алгебрами


*Рис. 7.* Глобальна структура комірки НКГ із симетріями

Лі. При цьому як простір станів цих систем береться простір станів $M$ вихідної системи $L$. Тому, попри те що систему було розкладено на простіші частини, сумарна розмірність цих частин в цілому більша за розмірність початкової системи (на локальному рівні цю розмірність можна зменшити, замінивши системи $L^1$ матричними еквівалентами, визначеними на експоненціальних функціях відповідних їм алгебр Лі). Ці результати можна зіставити з умовами декомпозованості, отриманими в результаті аналізу симетрій нелінійної керованої ґратки, описаних у цьому розділі, для яких розмірність підсистем дорівнює розмірності вихідної системи. При цьому немає потреби робити жодних припущень про кінцеву розмірність алгебри Лі. Розглянемо клас систем, які описуються лінійно-аналітичними рівняннями

$$\dot{x}(t) = f(x) + \sum_{i=1}^{k} u_i g_i(x). \tag{7}$$

Для цього класу можна сформулювати необхідні та достатні умови паралельно-каскадної розкладності з використанням алгебр Лі. При цьому можна ставити умову, щоб кожна компонента вхідного впливу входила тільки в одну з підсистем, тобто процедура декомпозиції має розбивати входи на підмножини, що не перетинаються. Однак такий підхід не дає змоги розкласти ґратку зі скалярним входом.

## 5. Висновки

У даній роботі розглянуто клас динамічних керованих ґраток, які описуються комутативною діаграмою. Сформульовано обмеження на ці системи з симетрією, за яких можна виявити приховану структуру керованого процесу. Встановлено, що вплив ґратки на процес перетворення інформації суттєво залежить від типу симетрії. При цьому інформаційний процес підлягає впливу або групових перетворень каскадного типу, або дії оператора динамічного перетворення з оберненим зв'язком. Отримані результати можуть бути розвинуті на випадок систем з адаптацією та навчанням шляхом введення відповідних моделей оптимізації. При цьому, якщо функціонал якості інваріантний відносно перетворень, що зберігають симетрію, то можна очікувати, що подібна ґратка буде адекватно описуватись нелінійною системою з оптимальним оберненим зв'язком і матиме цікаву з погляду прикладень диференціально-геометричну структуру.

Робота виконана в рамках проекту УНТЦ № 4930 «Використання GRID-технологій для проведення розрахунків особливої складності у фізиці конденсованого стану та нанофізиці».

[1]. *Butkovsky A. G., Samoilenko Yu. I.* Control of Quantum-Mechanical Processes and Systems,— Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. — 1990. — 252 p.

[2]. *Husemoller D.* Fiber Bundles. — New-York: Springer-Verlag, 1975.

[3]. *Самойленко Ю. И.* Приведение к элементарной ячейке линейных систем с дискретной группой симметрии // Кибернетика и вычислительная техника. - 1970. - 6- № 1. - С. 22-40.

[4]. *Nimier H., Van der Schaft A.* Controlled Invariancefor Nonlinear Systems // IEEE Transactions on Automatic Control. - 1982. - AC-27, № 4. - P. 904-914.

[5]. *Grizzle J. W.* Ph.D. Dissertation // The University of Texas at Austin, Department of Electrical Engineering. — 1983.

[6]. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 399 с.

[7]. *Ибрагимов Н. Х.* Группы преобразований в математической физике. — М.: Наука, 1983. — 260 с.

[8]. *Ибрагимов Н. Х.* Азбука группового анализа,— М.: Знание, 1989. - 48 с.

[9]. *Ибрагимов Н. Х.* Опыт группового анализа обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Знание, 1991.— 48 с.

[10]. *Мищенко А. С.* Векторные расслоения и их применения.— М.: Наука, 1984. — 208 с.

[11]. *Самойленко Ю. И.* Проблемы и методы физической кибернетики. — К., 2006. — 642 с.

[12]. *Голод П. И., Климык А. У.* Математические основы теории симметрии. — Москва-Ижевск: РХД, 2001.— 528 с.

[13]. *Павловский Ю. Н., Смирнова Т. Г.* Проблема декомпозиции в математическом моделировании,— М.: Фазис, 1998. - 272 с.

[14]. *Elkin V. I., Pavlovsky J. N.* Decomposition of models of control processes // Journal of Mathematical Science. - 1998. - 88, № 5. - P. 723-761.

*Iu. V. Shatokhina, V. O. Yatsenko*

## SYMMETRIES AND DECOMPOSITION OF THE CONTROLLED NONLINEAR LATTICE MODEL

*Decomposition of nonlinear controlled lattices with local and global symmetries has been obtained in the paper. Some methods from differential geometry have been applied to studying of group information transformation by nonlinear dynamical systems.*