

УДК 535.14, 539.184

*Голод П. І., Безвершенко Ю. В.*

## НЕЛІНІЙНА ДИНАМІКА ІНВЕРСНОЇ ЗАСЕЛЕНОСТІ РІВНІВ ТА ДИПОЛЬНОГО МОМЕНТУ АТОМА В НАПІВКЛАСИЧНІЙ МОДЕЛІ ДЖЕЙНСА-КАММІНГСА

*Досліджено нелінійну динаміку середніх значень спостережуваних величин у моделі Джейнса—Каммінгса, яка описує взаємодію дворівневого атома з одномодовим електромагнітним полем. Отримано явні формули для опису процесів поглинання світла атомом, спонтанного випромінювання та осциляцій Рабі інверсної населеності енергетичних рівнів.*

© Голод П. І., Безвершенко Ю. В., 2008

## 1. Вступ

Модель Джейнса—Каммінгса [1] — одна з найпростіших у квантовій оптиці. Вона описує взаємодію ідеалізованого дворівневого атома з одномодовим електромагнітним полем (стоячою електромагнітною хвилею в резонаторі). Під напівкласичною версією моделі ми розумітимемо систему рівнянь, яка описує динаміку середніх значень дипольного моменту та ймовірностей перебування атома в основному чи збудженому стані під час взаємодії його з класичним електромагнітним полем.

У квантовій моделі електромагнітне поле — операторозначна функція часу. Модель розглядається як у представленні Гейзенберга, так і в представленні Шредінгера. У першому випадку система операторних рівнянь Гейзенберга лінеаризується і розв'язки записуються в термінах елементарних функцій [2]. Причиною лінеаризації є нефізичні тотожності для операторів дипольного моменту у дворівневому наближенні. Очевидно, подібну картину маємо і в представленні Шредінгера.

Напівкласична версія моделі є суттєво нелінійною і розв'язки в елементарних функціях можемо дістати лише у вироджених випадках. Хоча повна інтегровність класичної моделі встановлена досить давно (як і її зв'язок з класичним магнетиком Годена [3]), явних розв'язків за довільно фізично допустимих початкових умов ми в науковій літературі не знайшли. В той час як нелінійні осциляції заселеностей енергетичних рівнів описані ще в першій праці [1], опис динаміки середніх значень дипольного моменту атома, на наш погляд, неповний. У цій праці ми наводимо явні формули для всіх динамічних змінних, які є в моделі Джейнса—Каммінгса.

Коротко обговоримо фізичну вартість наслідків, що впливають з моделі Джейнса—Каммінгса. Окрім добре встановленого й експериментально перевіреного опису осциляцій заселеностей енергетичних рівнів, їх колапсу та відродження, у деяких працях стверджується, що модель Джейнса—Каммінгса описує також явища спонтанного випромінювання. При цьому причиною вважають «нульові» коливання електромагнітного поля. На помил-

ковості такого твердження неодноразово наголошували авторитетні фізики [5]. Як стверджує квантова електродинаміка, спонтанне випромінювання виникає через «квазістаціонарність» енергетичних станів атома. Природна ширина енергетичного рівня (а отже, і його скінченний час життя) зумовлена квантовими флуктуаціями кулонівського поля в атомі. Ці флуктуації пов'язують з поляризаційними вакуумними ефектами. Поляризаційні поправки до стаціонарних значень енергії є комплексними величинами; дійсні частини описують лембівський зсув рівнів, а уявні — природну ширину [6], а отже, ефект спонтанного випромінювання. Оскільки в моделі Джейнса—Каммінгса значення енергій дворівневого атома строго фіксовані, то природу спонтанного випромінювання в рамках цієї моделі виявити неможливо. Що ж до «нульових» коливань поперечного електромагнітного поля, то в квантовій електродинаміці у випадку необмеженого простору вони спокійно усуваються зміною початку відліку енергії. Це означає, що жодної фізичної місії вони не несуть. (На відміну від випадку масивного осцилятора, де необхідність нульових коливань зумовлена принципом невизначеності.) Якщо залишити їх в гамільтоніані електромагнітного поля, то, очевидно, треба по-іншому рахувати його енергію. Енергія, що дорівнює одному фотону, разом з «нульовими» коливаннями є півторафотонною. Після того як атом поглинув один фотон і перейшов у збуджений стан, в системі залишається енергія, що дорівнює половині фотона, яка власне й стимулює випромінювання.

У напівкласичній моделі можна імітувати спонтанне випромінювання, ввівши розлад частот

$$\Delta = \Omega - \omega,$$

де  $\Omega$  — частота випромінювання атома,  $\omega$  — частота поля. Ця величина (помножена на сталу Планка  $\hbar$ ) ефективно відіграє роль ширини збудженого рівня. Така картина процесу подана в частині 3 цієї праці.

Як зазначалось, основною метою дослідження було дати явний опис динаміки середніх значень дипольного моменту атома. Відповідні формули наведені в частині 4. Тут звернемо увагу на цікаве явище набігання фази

дипольного моменту після перебування атома у збудженому стані й повернення в основний стан. Очевидно, це явище на мові квантових станів еквівалентне появі фази Беррі.

## 2. Модель взаємодії дворівневого атома з одномодовим електромагнітним полем

Якщо електромагнітне поле близьке до монохроматичного з частотою  $\omega$ , то в процесі взаємодії з атомом братимуть участь лише ті атомні стани, енергії яких резонують із полем, тобто частота атомного переходу близька до частоти поля:

$$\Omega = \frac{E_2 - E_1}{\hbar} \simeq \omega. \quad (1)$$

З огляду на це багаторівневий атом можна наближено замінити дворівневою системою.

За незначних амплітуд електромагнітного поля і довжинах хвиль, набагато більших за розміри атома, процеси поглинання та випромінювання описують у дипольному наближенні. При цьому гамільтоніан взаємодії має вигляд

$$\hat{H}_{\text{int}} = -e\hat{\mathbf{r}}(t)\hat{\mathbf{E}}(t), \quad (2)$$

де  $\hat{\mathbf{r}}(t)$  — оператор координати електрона в атомі,  $\hat{\mathbf{E}}(t)$  — квантоване електромагнітне поле. Центр мас атома вважається нерухомим. (Цю ситуацію можна реалізувати у випадку стоячої хвилі в резонаторі.)

Електромагнітне поле розглядається в гамільтоновій калібровці, тобто

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)}{\partial t},$$

де  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$  — векторний потенціал,  $\text{div} \mathbf{A} = 0$ . Одномодове квантоване поле у фіксованій точці  $\mathbf{x}_0$  будемо описувати гайзенбергівським оператором:

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{x}_0, t) = \imath \sqrt{\frac{\hbar \omega}{2\varepsilon_0 V}} \mathbf{u}(\mathbf{x}_0) [\hat{a}(t) - \hat{a}^+(t)], \quad (3)$$

де  $V$  — об'єм резонатора,  $\mathbf{u}$  — вектор поляризації, пропорційний амплітуді поля,  $\hat{a}$ ,  $\hat{a}^+$  — оператори народження і знищення квантових станів поля, для яких:

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1.$$

Позначимо через  $|1\rangle$  і  $|2\rangle$  стани атома, що відповідають енергіям  $E_1$  і  $E_2$ ,  $E_2 > E_1$ . Атомний гамільтоніан на цих станах, очевидно, має вигляд діагональної матриці:

$$\begin{aligned} \hat{H}_A &= \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} E_2 - E_1 & 0 \\ 0 & E_1 - E_2 \end{pmatrix} + \\ &+ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} E_2 + E_1 & 0 \\ 0 & E_1 + E_2 \end{pmatrix}. \quad (4) \end{aligned}$$

Оператор дипольного моменту представляється антидіагональною матрицею:

$$\hat{p} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{p}_{21} \\ \mathbf{p}_{12} & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{p}_{21} \hat{S}_+ + \mathbf{p}_{12} \hat{S}_-,$$

де  $\mathbf{p}_{21} = e\langle 2 | \mathbf{r} | 1 \rangle = \mathbf{p}_{12}^*$ ,

$$\hat{S}_+ = \hat{S}_-^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$[\hat{S}_+, \hat{S}_-] = 2\hat{S}_3$ . Тоді оператор дипольної взаємодії матиме вигляд:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{int}} &= -\imath \frac{\hbar \omega}{2\varepsilon_0 V} [(\mathbf{u}, \mathbf{p}_{21}) \hat{S}_+ + \\ &+ (\mathbf{u}, \mathbf{p}_{12}) \hat{S}_-] (\hat{a} - \hat{a}^+). \quad (5) \end{aligned}$$

Внаслідок поперечності електромагнітного поля у взаємодії беруть участь лише поперечні (відносно осі квантування  $Oz$ ) компоненти дипольного моменту. Покладаючи

$$(\mathbf{u}, \mathbf{p}_{21}) = \imath |\mathbf{u}| |\mathbf{p}_{21}|,$$

отримуємо гамільтоніан взаємодії:

$$\hat{H}_{\text{int}} = \hbar g (\hat{S}^+ - \hat{S}^-) (\hat{a} - \hat{a}^+),$$

де позначено  $\sqrt{\frac{\omega}{2\hbar\varepsilon_0 V}} |\mathbf{u}| |\mathbf{p}_{21}| = g$ . Повний гамільтоніан «атом-поле» з точністю до неістотних сталих доданків матиме вигляд

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hbar \Omega \hat{S}_3 + \hbar \omega \hat{a}^+ \hat{a} + \\ &+ \hbar g (\hat{S}^+ - \hat{S}^-) (\hat{a} - \hat{a}^+). \quad (6) \end{aligned}$$

**2.1. Наближення хвилі, що обертається (RWA).** Гамільтоніан взаємодії (6) містить доданки  $\hat{S}^+\hat{a} + \hat{S}^-\hat{a}^+$  та  $-(\hat{S}^+\hat{a}^+ + \hat{S}^-\hat{a})$ , які мають різну частоту осциляцій. За відсутності взаємодії  $\hat{S}_\pm(t) = \hat{S}_\pm(0)e^{\pm i\Omega t}$ ,  $\hat{a}(t) = \hat{a}(0)e^{i\omega t}$ , тому перший доданок осцилює з частотою  $\Delta = \Omega - \omega$ , а другий — з частотою  $\Omega + \omega$ . Усереднюючи гамільтоніан взаємодії по швидких осциляціях [7], ми, окрім доданку  $\hbar g(\hat{S}^+\hat{a} + \hat{S}^-\hat{a}^+)$ , отримаємо усереднений доданок  $\frac{\hbar g}{\Omega + \omega}(\hat{S}^+\hat{a} + \hat{S}^-\hat{a}^+)$ , який вважатимемо малою поправкою (це зумовлено великою частотою  $\Omega + \omega$  у знаменнику). Далі цією поправкою нехтуватимемо. Отже, розглядатимемо гамільтоніан

$$\hat{H} = \hbar\Omega\hat{S}_3 + \hbar\omega\hat{a}^+\hat{a} + \hbar g(\hat{S}^+\hat{a} + \hat{S}^-\hat{a}^+), \quad (7)$$

який представляє модель Джейнса—Каммінгса в «наближенні хвилі, що обертається» [1], [2]. Гейзенбергові рівняння, які відповідають гамільтоніанові (7), матимуть вигляд

$$\begin{aligned} i\frac{d\hat{S}_+}{dt} &= -\Omega\hat{S}_+ + 2g\hat{a}^+\hat{S}_3, \\ i\frac{d\hat{S}_-}{dt} &= \Omega\hat{S}_- - 2g\hat{a}\hat{S}_3, \\ i\frac{d\hat{S}_3}{dt} &= g(\hat{S}_+\hat{a} - \hat{S}_-\hat{a}^+), \\ i\frac{d\hat{a}}{dt} &= \omega\hat{a} + g\hat{S}_-, \\ i\frac{d\hat{a}^+}{dt} &= -\omega\hat{a}^+ - g\hat{S}_+. \end{aligned} \quad (8)$$

Квантовий гамільтоніан (7) разом з усіма динамічними змінними визначений у гільбертовому просторі, який є тензорним добутком двовимірного простору атомних станів та нескінченновимірного простору станів електромагнітного поля. За базисні стани поля виберемо фотонні стани  $|n\rangle$ , для яких

$$\begin{aligned} \hat{a}^+\hat{a}|n\rangle &= n|n\rangle & \hat{a}|n\rangle &= \sqrt{n}|n-1\rangle, \\ \hat{a}^+|n\rangle &= \sqrt{n+1}|n+1\rangle. \end{aligned}$$

Довільний нормований квантовий стан системи «атом-поле» записуватимемо у вигляді

$$|\Psi\rangle = \sum_n \{c_1(n) |1, n\rangle + c_2(n) |2, n\rangle\}, \quad (9)$$

$$\sum_n |c_1(n)|^2 + |c_2(n)|^2 = 1.$$

Очевидно, стани ортогональні та задовольняють умову повноти. Усереднимо по станах (9) праву та ліву частини рівняння (8). «Напівкласичність» такого усереднення полягатиме в тому, що знехтуємо квантовими кореляціями між змінними поля та атомними операторами й покладемо

$$\langle\Psi|\hat{a}^+\hat{S}_3|\Psi\rangle = \langle\Psi|\hat{a}^+|\Psi\rangle\langle\Psi|\hat{S}_3|\Psi\rangle.$$

Тоді для середніх значень  $S_\pm = \langle\Psi|\hat{S}_\pm|\Psi\rangle$ ,  $a^+ = \langle\Psi|\hat{a}^+|\Psi\rangle$ ,  $a^- = \langle\Psi|\hat{a}|\Psi\rangle$  дістанемо систему рівнянь, що матиме такий самий вигляд, як система (8).

Перейдемо від комплекснозначних функцій  $S_\pm, a^\pm$  до дійсних величин

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2}(S_+ + S_-), & S_2 &= \frac{1}{2i}(S_+ - S_-), \\ a_1 &= \frac{1}{2}(a + a^+), & a_2 &= \frac{1}{2i}(a - a^+). \end{aligned}$$

Фіксуємо класичний гамільтоніан

$$\mathcal{H} = \Omega S_3 + \omega(a_1^2 + a_2^2) + g(a_1 S_1 + a_2 S_2).$$

Тоді у п'ятивимірному просторі змінних  $\{S_1, S_2, S_3, a_1, a_2\}$  матимемо систему гамільтонових рівнянь:

$$\frac{dS_i}{dt} = \{S_i, \mathcal{H}\}, \quad \frac{da_\nu}{dt} = \{a_\nu, \mathcal{H}\}. \quad (10)$$

Дужка Пуассона цієї системи є неканонічною (виродженою) і має вигляд:

$$\begin{aligned} \{f_1, f_2\} &= \sum_{ij} W_{ij} \frac{\partial f_1}{\partial S_i} \frac{\partial f_2}{\partial S_j} + \\ &+ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial f_1}{\partial a_1} \frac{\partial f_2}{\partial a_2} - \frac{\partial f_2}{\partial a_1} \frac{\partial f_1}{\partial a_2} \right], \end{aligned}$$

де  $W_{ij} = \varepsilon_{ijk} S_k$ ,  $\det[W_{ij}] = 0$ . Система (10) буде основним об'єктом наших досліджень.

### 3. Інтегрування гамільтонових рівнянь класичної моделі Джейнса—Каммінгса

Система гамільтонових рівнянь (10) завдяки наявності двох комутуючих інтегралів руху

$$h_0 = S_3 + a^+ a^-, \quad (11a)$$

$$h_{-1} = \lambda_0 S_3 + S_+ a^+ + S_+ a^- \quad (11b)$$

та в'язі

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = S_+ S_- + S_3^2 = \frac{1}{4} \quad (11в)$$

є інтегрованою в сенсі теореми Ліувілля [7]. Фазовий простір цієї системи — чотиривимірний многовид, що є прямим добутком сфери на двовимірний плоский простір  $\mathbb{R}^2$ :

$$\mathcal{M} \simeq S^2 \times \mathbb{R}^2.$$

Змінні на сфері — це проекції дипольного моменту  $S_1$  і  $S_2$  та інверсна заселеність рівнів  $S_3$ , які пов'язані співвідношенням (11). Відповідно до теореми Ліувілля сумісна поверхня рівня інтегралів руху  $h_0 = \text{const}$ ,  $h_{-1} = \text{const}$  дифеоморфна двовимірному тору  $T^2$  (цей об'єкт називатимемо *тором Ліувілля*). Систему рівнянь (10) можна подати у формі Лакса

$$i \frac{d\hat{L}}{dt} = [\nabla h, \hat{L}], \quad (12)$$

де

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{\lambda - \lambda_0} \hat{S}_3 & \frac{1}{\lambda - \lambda_0} \hat{S}_+ + a^* \\ \frac{1}{\lambda - \lambda_0} \hat{S}_- + a & -\left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{\lambda - \lambda_0} \hat{S}_3\right) \end{pmatrix},$$

а  $\nabla h$  — матричний градієнт від функції

$$h = g(S_3^2 + S_+ S_-) + \omega(a^+ S_- + a S^+ + a_3 S_3),$$

який обраховується за формулою

$$\nabla h = (\lambda - \lambda_0)^{-1} \left( \frac{\partial h}{\partial S_+} \hat{S}_- - \frac{\partial h}{\partial S_-} \hat{S}_+ \right) + (\lambda - \lambda_0)^{-2} \left( \frac{\partial h}{\partial a_+} \hat{S}_- + \frac{\partial h}{\partial a} \hat{S}_+ + \frac{\partial h}{\partial a_3} \hat{S}_3 \right), \quad a_3 \rightarrow 0.$$

Наявність представлення Лакса дає змогу при дослідженні системи (10) застосовувати методи теорії скінченнозонного інтегрування нелінійних рівнянь солітонного типу [8]. На основі представлення (12) можна зробити деякі загальні твердження про систему (10), зокрема можна стверджувати, що вона є алгебраїчно-інтегрованою. Це означає, що фазовий простір системи можна розширити на комплексні динамічні змінні й комплексний час  $z = t + i\tau$ . При цьому тор Ліувілля  $T^2$  розширюється до

комплексного абелевого тору  $T_{\mathbb{C}}^2$ , який, відповідно до відображення Абеля та формул обернення Якобі, отожднюється з прямим симетризованим добутком двох екземплярів ріманової поверхні:

$$T_{\mathbb{C}}^2 \simeq (\mathfrak{R} \times \mathfrak{R})_{sym}.$$

Поверхня  $\mathfrak{R}$  визначається як алгебраїчна крива алгебраїчними рівняннями:

$$\mathfrak{R}: \det[\hat{L}(\lambda) - \mu] = 0$$

або

$$w^2 = \lambda^4 - 2\lambda^3 \lambda_0 + (4h_0 + \lambda_0^2)\lambda^2 + 4(h_{-1} - 2\lambda_0 h_0)\lambda + 4(h_{-2} + \lambda_0^2 h_0 - \lambda h_{-1}), \quad (13)$$

де  $w = 2\mu(\lambda - \lambda_0)$ . Рід поверхні  $\mathfrak{R}$  дорівнює одиниці. Відносно неї тор  $T_{\mathbb{C}}^2$  буде узагальненим якобіаном, тому відображення Абеля задаватиметься інтегралом не тільки першого, а й другого роду.

Ці факти ми використаємо в наступній праці для побудови змінних розділення та переходу до канонічних змінних «дія-кут». Але спочатку проінтегруємо систему (10) простішим способом, виокремивши дві змінні, для кожної з яких можна отримати замкнені рівняння. Такими змінними будуть  $S_3(t)$  та  $\xi(t) = -\frac{S_-(t)}{a^-(t)}$ .

**3.1. Замкнене рівняння на змінну  $S_3$  та його розв'язки.** Для змінної  $S_3(t) \equiv S(t)$  маємо диференціальне рівняння

$$\frac{d^2 S}{d(gt)^2} = 6S^2 - (4h_0 + \lambda_0^2)S - \left(\frac{1}{2} - \lambda_0 h_{-1}\right), \quad (14)$$

яке можна інтерпретувати як рівняння Ньютона для частинки масою  $m = 1$  в потенціальному полі

$$U(S) = -2S^3 + \frac{4h_0 + \lambda_0^2}{2} S^2 + \left(\frac{1}{2} - \lambda_0 h_{-1}\right) S.$$

Для такої системи виконується закон збереження енергії

$$\begin{aligned} \left[ \frac{dS}{d(gt)} \right]^2 &= 2[E - U(S)] = \\ &= 4S^3 - (4h_0 + \lambda_0^2)S^2 - (1 - 2\lambda_0 h_{-1})S + 2E. \end{aligned} \quad (15)$$

З другого боку, з рівнянь (10) маємо

$$\left[\frac{dS}{d(gt)}\right]^2 = -[(S_+ a_-)^2 + (S_- a_+)^2] + 2a_+ a_- S_+ S_- = -(h_{-1}^2 + \lambda_0^2 S^2 - 2\lambda_0 S h_{-1}) + 2(h_0 - S)\left(\frac{1}{4} - S^2\right). \quad (16)$$

Зіставляючи (15) та (16), знаходимо, що:

$$E = \frac{1}{2}(h_0 - h_{-1}^2).$$

Нехай  $e_1 \geq e_2 \geq e_3$  — нулі полінома у правій частині (15). Тоді для функції  $S(gt)$  маємо розв'язок:

$$S(gt) = \wp(gt + u_2) + \frac{1}{3}(e_1 + e_2 + e_3),$$

де  $\wp(u)$  — еліптична функція Вейерштрасса, яка визначається параметрами

$$E_i = e_i - \frac{1}{3}(e_1 + e_2 + e_3), \quad E_1 + E_2 + E_3 = 0.$$

Перейдемо від функції Вейерштрасса до еліптичної функції Якобі за формулою

$$\wp(u) = E_3 + \frac{E_1 - E_3}{\operatorname{sn}^2(u\sqrt{E_1 - E_2}; k)},$$

де  $k = \frac{E_2 - E_3}{E_1 - E_2} = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_2}$ . Вибравши уявну частину фази функції  $\operatorname{sn}(z; k)$  з умови

$$\sqrt{e_1 - e_2} u_2 = K',$$

де  $K'$  — чверть уявного періоду еліптичної функції, отримаємо формулу ( $S_3(gt) \equiv S(gt)$ ):

$$S(gt) = e_3 + (e_2 - e_3) \operatorname{sn}^2(\sqrt{e_1 - e_2} gt; k), \quad (17)$$

яка при  $\lambda_0 = 0$  з точністю до вибору  $e_1, e_2, e_3$  та фази збігається з відповідною формулою з роботи [1].

За допомогою формули (17) можна описати три характерні режими поведінки дворівневого атома: *збудження атома слабким електромагнітним полем («одnofотонне» збудження), спонтанне випромінювання та осциляції Рабі інверсної заселеності енергетичних рівнів*. Нулі  $e_1, e_2, e_3$  пов'язуються зі значеннями інтегралів  $h_0, h_{-1}$  та параметром  $\lambda_0$  очевидними співвідношеннями

$$\begin{aligned} e_1 + e_2 + e_3 &= h_0 + \left(\frac{\lambda_0^2}{4}\right), \\ e_1 e_2 + e_2 e_3 + e_1 e_3 &= \frac{\lambda_0}{2} h_{-1} - \frac{1}{4}, \\ e_1 e_2 e_3 &= \frac{1}{4}(h_{-1}^2 - h_0). \end{aligned} \quad (18)$$

**3.2. Збудження атома слабким електромагнітним полем.** Нехай у початковий момент  $S_3(0) = -\frac{1}{2}$ , а при  $t \rightarrow \infty$  маємо  $S_3 \rightarrow \frac{1}{2}$ . Тоді слід покласти

$$e_3 = -\frac{1}{2}, \quad e_2 = \frac{1}{2}, \quad e_1 \geq e_2.$$

З рівняння (18) випливає, що

$$e_1 = h_0 + \frac{\lambda_0^2}{4}, \quad h_0 \geq \frac{1}{2}, \quad h_0 = -\frac{1}{2} + n,$$

де  $n = a^+ a^-$  — квадрат амплітуди електромагнітного поля або «число фотонів» у квантовій теорії. Нехай  $\lambda_0 = 0, n = 1, h_0 = \frac{1}{2}$ . У цьому випадку  $k = 1, e_1 - e_3 = 1$  і

$$S_3(gt) = -\frac{1}{2} + \operatorname{th}^2(gt) = \frac{\operatorname{sh}^2(gt) - 1}{2 \operatorname{ch}^2(gt)}. \quad (19)$$

Поведінка функції  $S_3(gt)$  зображена на рис. 1. Якщо дворівневий атом вважати строго резонансним (з нульовою шириною збудженого рівня), то відповідно до співвідношення невизначеностей перехід відбуватиметься за нескінченно довгий час.

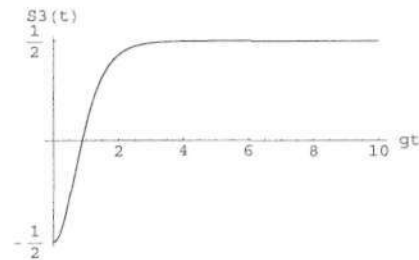


Рис. 1.  $S_3(0) = -\frac{1}{2}, \lambda_0 = 0$ .

Якщо ж збудженому станові  $|2\rangle$  приписати скінченну (як завгодно малу) ширину  $\Delta E$ , то час переходу буде скінченним. З формули (19) можна дістати оцінку часу збудження

$$\tau_{36} = \frac{1}{2g} \ln \left( \frac{6}{\Delta S} - 2 \right),$$

де  $\Delta E = \Delta S(E_2 - E_1)$ . Як зазначається у вступі, параметр  $\hbar \lambda_0 g$  ефективно відіграє роль ширини рівня. Тому при  $\lambda_0 \neq 0, n = 1$  ми отримуємо нелінійні осциляції інверсної заселеності (див. рис. 2).

$$S_3(gt) = -\frac{1}{2} + \operatorname{sn}^2 \left( \sqrt{1 + \frac{\lambda_0^2}{4}} gt; k \right). \quad (20)$$

Період осциляцій

$$\tau = \frac{4K}{g\sqrt{1 + \frac{\lambda_0^2}{4}}}$$

де  $4K$  — дійсний період еліптичної функції.

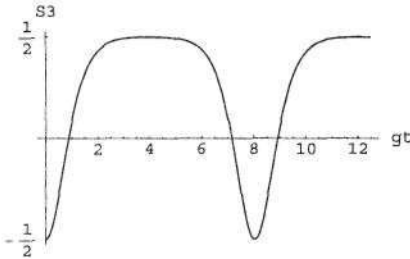


Рис. 2.  $S_3(0) = -\frac{1}{2}, \lambda_0 \neq 0$ .

**3.3. Спонтанне випромінювання.** Якщо у початковий момент часу  $S_3(0) = \frac{1}{2}, n = 0$ , то  $h_0 = S_3 = \text{const}$ . Отже, атом перебуватиме у стані  $S_3 = \frac{1}{2}$  як завгодно довго. Коли ж  $\lambda_0 \neq 0$ , то формула (20) описує також процеси випромінювання, якщо початковий момент часу змістити на половину періоду, тобто на величину  $t_1 = \frac{2K}{g\sqrt{1 + \frac{\lambda_0^2}{4}}}$ . Це еквівалентно рухові з початковою умовою

$$S_3(0) = \frac{1}{2} - \frac{\lambda_0}{2}$$

Ця початкова умова відповідає ситуації, коли атом перебуває у збудженому стані й наявне поле з квадратом амплітуди  $n = \frac{\lambda_0}{2}$ .

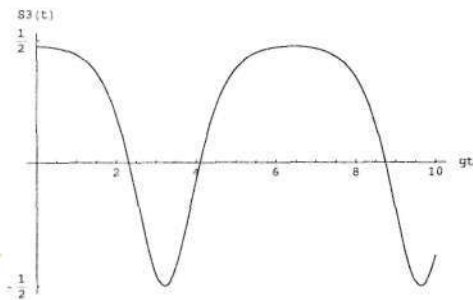


Рис. 3.  $S_3(0) = \frac{1}{2}, \lambda_0 \neq 0$ .

**3.4. Нелінійні осциляції Рабі.** Це осциляції динамічної змінної  $S_3(gt)$  у випадку, коли в системі є один або більше фотонів. Початковий стан атома може бути довільною суперпозицією станів  $|\Psi\rangle = C_1|1\rangle + C_2|2\rangle$  або одним із стаціонарних станів. Наявність параметра  $\lambda_0$

несуттєво впливає на характер осциляцій. Тому покладемо  $\lambda_0 = 0$ . Тоді поведінка інверсної заселеності енергетичних рівнів задається формулою загального виду (17), де вибір нулів визначається вибором конкретної початкової умови.

#### 4. Динаміка дипольного моменту дворівневого атома

Оператори  $S_+, S_-$  безпосередньо пов'язані з поперечними компонентами дипольного моменту атома. Для знаходження явних формул, які описують відповідні середні значення  $S_+(t), S_-(t)$ , введемо нову змінну розділення

$$\xi(t) = -\frac{S_-(t)}{a^-(t)}. \tag{21}$$

Безпосереднє диференціювання відповідно до рівнянь (8) дає:

$$i \frac{d\xi}{d(gt)} = \xi^2 + \lambda_0 \xi + 2S_3, \tag{22}$$

де  $\lambda_0 g = \Omega - \omega$ . Підніmemo праву й ліву частини рівняння (22) до квадрата. Використовуючи інтеграл руху та в'язь (11), отримаємо:

$$\left[ i \frac{d\xi}{d(gt)} \right]^2 = \xi^4 + 2\lambda_0 \xi^3 + (4h_0 + \lambda_0^2) \xi^2 + 4h_{-1} \xi + 1. \tag{23}$$

Легко помітити, що підстановкою  $\xi = \lambda - \lambda_0$  поліном у правій частині (23) зводиться до полінома (15), який визначає криву  $\mathfrak{R}$ . Отже, динамічна змінна  $\xi(t)$  еволюціонує на дволісній рімановій поверхні  $\mathfrak{R}$  (рис. 4).

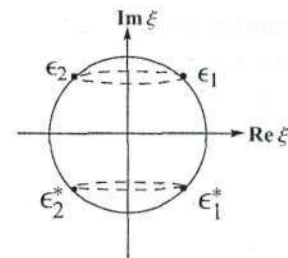


Рис. 4. Точки галузнення ріманової поверхні  $\mathfrak{R}$ .

Рівняння (23) можна переписати у вигляді

$$\begin{aligned} \left[ i \frac{d\xi(t)}{d(gt)} \right]^2 &= \\ &= \pm \sqrt{(\xi - \epsilon_1)(\xi - \epsilon_2)(\xi - \epsilon_1^*)(\xi - \epsilon_2^*)}, \end{aligned}$$

де  $\varepsilon_1 = R_1 e^{i\varphi_1}$ ,  $\varepsilon_2 = R_1 e^{i\varphi_2}$ ,  $\varepsilon_1^*$ ,  $\varepsilon_2^*$  — корені полінома у правій частині (23). При цьому виконуються рівності

$$\begin{aligned} R_1 \cos \varphi_1 + R_2 \cos \varphi_2 &= -\lambda_0; \\ R_1^2 + R_2^2 + 4R_1 R_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 &= 4h_0 + \lambda_0^2; \\ R_1 R_2 (R_1 \cos \varphi_2 + R_2 \cos \varphi_1) &= -2h_{-1}; \\ R_1^2 R_2^2 &= 1 + \lambda_0. \end{aligned} \quad (24)$$

Чотири попарно спряжені корені розташовуються на колі з центром у точці  $C$  і радіусом  $R$ :

$$\begin{aligned} C &= \frac{R_1^2 - R_2^2}{2(R_1 \cos \varphi_1 - R_2 \cos \varphi_2)}, \\ R^2 &= R_1^2 + C^2 - 2CR_1 \cos \varphi_1 = \\ &= R_2^2 + C^2 - 2CR_2 \cos \varphi_2. \end{aligned}$$

Відобразимо дробово-лінійним перетворенням коло, зображене на рис. 4, на дійсну вісь, задавши відображення формулою

$$\xi = \frac{\alpha z + \gamma}{z + \delta}.$$

При цьому вимагатимемо, щоб  $\varepsilon_1 \rightarrow -1/k$ ,  $\varepsilon_2 \rightarrow -1$ ,  $\varepsilon_2^* = 1$ ,  $\varepsilon_1^* = 1/k$ . Тоді

$$\begin{aligned} \alpha &= C + R, \gamma = (C - R)\delta, \\ \delta &= i \frac{(C + R) - R_2 \cos \varphi_2}{R - C + R_2 \cos \varphi_2}, \\ k^2 &= \frac{(C + R - R_1 \cos \varphi_1)(C - R - R_2 \cos \varphi_2)}{(C - R - R_1 \cos \varphi_1)(C + R - R_2 \cos \varphi_2)}. \end{aligned}$$

На комплексній площині (сфері Рімана) комплексної змінної  $z$  проведемо розрізи як показано на рис. 4. Склеївши по цих розрізах два екземпляри сфери Рімана, отримаємо ріманову поверхню роду 1, яка еквівалентна алгебраїчній кривій

$$w^2 = (1 - z^2)(1 - k^2 z^2).$$

Цю криву уніформізує еліптична функція Якобі та її похідна:

$$z = \operatorname{sn}(u; k), \quad w = \frac{d}{du} \operatorname{sn}(u; k).$$

Тоді розв'язок рівняння (23) має вигляд

$$\xi(gt) = \frac{(C + R) \operatorname{sn}(u; k) + (C - R)\delta}{\operatorname{sn}(u; k) + \delta}, \quad (25)$$

де  $u(gt) = agt + w_2$ ,

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{(R + C - R_2 \cos \varphi_2) \times} \\ &\quad \times \sqrt{(R - C + R_1 \cos \varphi_1)}. \end{aligned}$$

Вибір параметра  $u_2$  пов'язаний з вибором початкових умов.

Для знаходження функції  $S_-(t)$  скористаємося безпосередньо рівняннями (10). Покладемо  $S_- = |S_-| e^{i\theta(t)}$ . Тоді

$$i \frac{d}{dt} \ln S_- = \Omega + 2g\xi^{-1} S_3;$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\Omega + 2S_3 \operatorname{Re} \xi^{-1}, \quad \frac{d}{dt} \ln |S_-| = 2gS_3 \operatorname{Im} \xi^{-1}.$$

Модуль функції  $S_-(t)$  легко знайти з алгебраїчного співвідношення (11в):

$$|S_-|^2 = \frac{1}{4} - S_3^2.$$

**4.1. Приклади динаміки  $\xi(gt)$ . Вироджений випадок.** Виберемо корені на уявній осі:  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = i$ . Тоді

$$\xi(gt) = i \frac{\operatorname{sh}(gt)}{\operatorname{ch}(gt)},$$

а  $S_3(gt)$  описується формулою (19). Тобто таке розташування нулів відповідає процесу збудження атома слабким електромагнітним полем (за умови, що  $\lambda_0 = 0$ .) У цьому випадку поведінка компонент дипольного моменту така:

$$S_+ = i \frac{\operatorname{sh}(gt)}{\operatorname{ch}^2(gt)} e^{i\Omega t}, \quad S_- = -i \frac{\operatorname{sh}(gt)}{\operatorname{ch}^2(gt)} e^{-i\Omega t},$$

а компонент електромагнітного поля:

$$a_+ = i \frac{1}{\operatorname{ch}^2(gt)} e^{i\omega t}, \quad a_- = -i \frac{1}{\operatorname{ch}^2(gt)} e^{-i\omega t}.$$

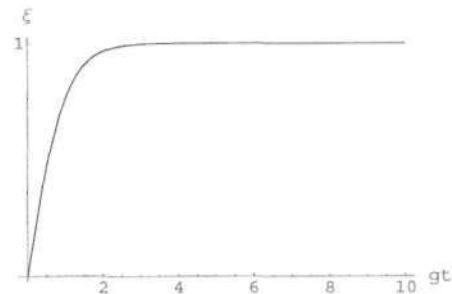


Рис. 5. Функція  $\xi(gt)$  при  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = i$ .



*Симетричне розташування коренів.* Нехай  $h_{-1} = 0$ ,  $\lambda_0 = 0$ , тоді на корені матимемо такі обмеження:  $R_1 = R_2 = 1$ ,  $\cos \varphi_1 = -\varphi_2$ . З урахуванням того, що зсув уявної частини фази  $u_2 = -\frac{K'}{2}$ , маємо:

$$\xi = \frac{2(1+k)(1+k \operatorname{sn}^2(u; k)) \operatorname{sn}(u; k)}{(1+k)^2 \operatorname{sn}^2(u; k) + [1+k \operatorname{sn}^2(u; k) + |\alpha|]^2},$$

де  $\alpha = \operatorname{sn}(u; k) \operatorname{dn}(u; k)$ , а  $S_3(gt)$  описується формулою (20). Таке розташування нулів відповідає процесові поглинання атомом світла за умови, що є ненульовий розлад частот ( $\lambda_0 \neq 0$ ).

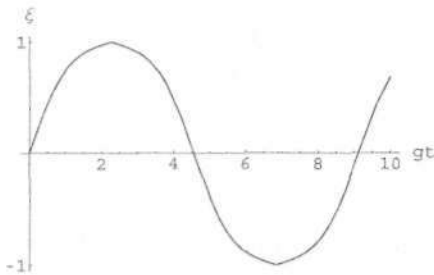


Рис. 6. Функція  $\xi(gt)$  при симетричному розташуванні коренів.

*Асиметричне розташування коренів.* Нехай  $h_{-1} \neq 0$ ,  $\lambda_0 = 0$ . Для прикладу можна розглянути ситуацію, коли  $\varepsilon_2 = \varepsilon_2^*$  і  $\varepsilon_1$  — деяке комплексне число. Тоді змінна  $\xi(gt)$  має і дійсну, й уявну частини:

$$\frac{2(R_1^4 + 1) - R\sqrt{R_1^4 - 1}(\pm i \sin u)}{R\sqrt{R_1^4 - 1}(\pm i \sin u + 4R_1)},$$

- [1]. Jaynes E. T. and Cummings F. W. Comparison of Quantum and Semiclassical radiation theory with application to the beam maser // Proc. IEEE. - 1963. - V. 51. - R 89-109.
- [2]. Скалли М. О., Зубайри М. С. Квантовая оптика // Москва: Физматлит, 2003. - 510 с.
- [3]. Jurco B. On quantum integrable models related to nonlinear quantum optics // J. Math. Phys. - 1989. - V. 30. - P. 1739-1743.
- [4]. Shore B. W., Knight P. L. The Jaynes-Cummings Model // J. Mod. Optics. - 1993. - V. 40. - P. 1195-1238.

а  $S_3(t)$  описується загальною формулою (25). У такому випадку спостерігаються нелінійні коливання інверсної заселеності рівнів та компонент дипольного моменту.

## 5. Висновки

Напівкласична модель Джейнса—Каммінгса з урахуванням розладу частот, розглянута у даній статті, адекватно описує процеси поглинання та спонтанного випромінювання, дає правильну частоту коливань Рабі.

Зауважено, що обмеження кількості рівнів (дворівневий атом) впливає на алгебраїчні властивості оператора дипольного моменту. Зокрема, відбувається «неприродна» лінеаризація гейзенбергових рівнянь руху внаслідок нефізичних тотожностей для операторів  $S_+$ ,  $S_-$ , які мають місце у випадку матриці  $2 \times 2$ .

У випадку напівкласичної моделі ми пов'язуємо спонтанне випромінювання з природною шириною рівнів атома, а не з квантовими нульовими коливаннями поперечного поля випромінювання (точка зору В. Л. Гінзбурга [5]).

Автори мають приємну нагоду подякувати Ю. М. Бернацькій, В. П. Гусиніну, М. Я. Агрета Б. І. Леву за плідне обговорення та ряд зауважень.

Робота підтримана грантом Міжнародного благодійного фонду відродження Києво-Могилянської академії. Автори висловлюють подяку грантодавцям.

- [5]. Гинзбург В. Л. О природе спонтанного излучения // УФН. - 1983. - Т. 140. - С. 687.
- [6]. Ахизер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. - М., 1969. - С. 511-515.
- [7]. Арнольд И. В. Математические методы классической механики. - М.: 1974. - С. 431.
- [8]. Бернацька Ю. М., Голод П. І. Канонічні координати в скшченнозонному секторі нелінійних рівнянь солітонного типу // Наукові записки НаУКМА. Фіз.-мат. науки. - 2001. - Т. 19. - С. 31-42.
- [9]. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. Ч. II. - М., 1963.

*P. I. Holod, Yu. V. Bezvershenko*

**NONLINEAR DYNAMICS OF INVERSE LEVEL POPULATION AND DIPOLE  
MOMENTUM IN THE SEMICLASSICAL JAYNES-CUMMINGS MODEL**

*The nonlinear dynamics of expectation values of observable quantities in Jaynes—Cummings model is studied. This model is used to describe a single two-level atom interacting with single-mode electromagnetic field. The explicit formulas are obtained for description of processes of light absorbtion, spontaneous emission and Rabi oscillations of inverse population of energy levels.*