

## ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ГІЛЬБЕРТА ДЛЯ ОБМЕЖЕНОЇ ОБЛАСТІ З НЕГЛАДКОЮ МЕЖЕЮ

*Побудовано алгоритм чисельного розв'язування задачі Гільберта про знаходження аналітичної функції в обмеженій області з негладкою межею. Алгоритм ґрунтується на використанні методу граничних інтегральних рівнянь. Здійснено чисельний експеримент з розв'язання тестової задачі Гільберта. Проаналізовано отримані результати та зроблено висновки щодо застосування методу граничних інтегральних рівнянь.*

### Вступ

Крайові задачі математичної фізики в областях, межа яких містить кутові точки, можуть виникати під час моделювання багатьох фізичних процесів, що завжди зумовлює актуальність дослідження впливу таких особливостей на шуканий розв'язок. Задача Гільберта (або, в іншій термінології, задача Рімана–Гільберта) – задача відновлення аналітичної функції  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  комплексної змінної  $z = x + iy$  в області  $D$  за заданим значенням лінійного співвідношення функцій  $u(x, y), v(x, y)$  на межі  $\partial D$  цієї області, тобто крайова умова задачі Гільберта має вигляд

$$a(x, y)u(x, y) + b(x, y)v(x, y) = c(x, y), \quad (1)$$

де  $(x, y) \in \partial D$ ,  $a(x, y), b(x, y), c(x, y)$  – задані дійсні функції (коефіцієнти задачі Гільберта), що задовольняють деякі умови, наприклад, вказані функції – кусково-неперервні на  $\partial D$ . Але за будь-яких інших обмежень завжди виключається випадок, коли одночасно функції  $a(x, y), b(x, y)$  набувають нульових значень, тобто вважається, що

$$a^2(x, y) + b^2(x, y) \neq 0, (x, y) \in \partial D. \quad (2)$$

Глибокий аналіз та класичні розв'язки задачі Гільберта (1) отримано в роботах Б. Рімана (1826–1866), Д. Гільберта (1862–1943), Й. Племелья (1873–1967), М. І. Мусхелішвілі (1891–1976), Ф. Д. Гахова (1906–1980) та ін. Розвиток теорії крайових задач Гільберта активно триває і в наш час, що пов'язано з новими особливостями задач, обумовленими, зокрема, широким їх застосуванням в традиційно прикладних проблемах гідроаеродинаміки, пружності, а також в обернених задачах термов'язкості, розсіювання, томографії, електролізу, теорії нейтронних зірок та ін. Математичні проблеми розв'язування задач Гільберта, як правило, пов'язані з неканонічністю області  $D$  та властивостями коефіцієнтів

$a(x, y), b(x, y), c(x, y)$ . Точки межі  $\partial D$  області, де задані вказані особливості, називають вузлами. Однією з проблем, пов'язаних з розташуванням вузлів, є кроудінг – проблема побудови конформного відображення області  $D$  на канонічну область, коли  $\partial D$  – багатокутник, вершини якого розташовані вкрай нерівномірно (роботи Т. Driscoll, Л. Trefethen та ін.).

Суть методу граничних інтегральних рівнянь [1], використаного в цій роботі, полягає в зведенні крайової задачі Гільберта до інтегро-диференціального рівняння (або систем інтегро-диференціальних рівнянь) шляхом використання основного співвідношення теорії гармонічних функцій – тотожності Гріна [2]:

$$\Omega(P)\varphi(P) = \dots = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial \varphi(Q)}{\partial n_Q} \ln \frac{1}{r(P, Q)} - \varphi(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \ln \frac{1}{r(P, Q)} \right\} ds(Q), \quad (3)$$

де  $\varphi(x, y)$  – функція, гармонічна в області  $D$ ,  $P = P(x, y) = P(p(s), q(s))$  – фіксована точка межі  $\partial D$ ,  $Q = Q(\xi, \eta) = Q(p(\sigma), q(\sigma))$  – точка інтегрування межі  $\partial D$ ,  $n_Q$  – зовнішня нормаль в точці  $Q$ ,  $r(P, Q) = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$  – відстань між точками  $P$  і  $Q$ ,

$$\Omega(P) = \begin{cases} 1, & P \in D; \\ \frac{\omega(P)}{2\pi}, & P \in \partial D; \\ 0, & P \notin \bar{D}. \end{cases}$$

У тотожності (3)  $\omega(P)$  – кут, під яким видно область  $D$  з точки  $P^1$ . Якщо в точці  $P$  межа гладка, то, очевидно,  $\omega(P) = \pi$ .

Використання методу граничних інтегральних рівнянь не обмежується умовою канонічності області  $D$ , більш того, допускає наявність вузлів на межі  $\partial D$  області. Цим методом для

<sup>1</sup> У тривимірному випадку кут  $\alpha(P)$  ще називають *тілесним*.

області з негладкою межею можна розв'язувати задачу кількома способами, наприклад, використовувати тотожність Гріна для областей з кусково-гладкою межею або згладжувати область і використовувати тотожність Гріна для областей з гладкою межею.

### Постановка задачі

Розглянемо задачу Гільберта про відновлення аналітичної функції  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  в замкненій області  $D$ , якщо на її кусково-гладкій межі  $\partial D$  задана крайова умова (1) при обмеженні (2). Межу  $\partial D$  області будемо задавати параметрично залежно від  $s$  – довжини дуги, що змінюється вздовж заданого відрізка  $[0, S]$ :

$$\begin{cases} x = p(s); \\ y = q(s), s \in [0, S]. \end{cases} \quad (4)$$

Функції  $p(s), q(s)$  в (4) – кусково-неперервно диференційовні, причому

$$p'^2(s) + q'^2(s) = 1, s \in [0, S]. \quad (5)$$

Рівність (5) діє і для тих значень  $s$ , що відповідають вузлам межі  $\partial D$ ; в цьому випадку рівність необхідно сприймати як граничну за наближення до вузла з будь-якого боку.

Дійсні функції, що задані на межі  $\partial D$ , будемо позначати тими ж літерами, але залежно від довжини дуги  $s$  (наприклад,  $u(s) := u(p(s), q(s))$ ). Таким чином, крайова умова задачі Гільберта запишеться так:

$$a(s)u(s) + b(s)v(s) = c(s), s \in [0, S]. \quad (6)$$

Будемо вважати, що відновлення аналітичної функції безпосередньо пов'язано з відновленням її спряжених гармонічних функцій. У зв'язку з цим, надалі всю увагу зосередимо саме на функціях  $u(x, y), v(x, y)$ . Більш того, вважатимемо відновлення гармонічної функції вирішеним, якщо на межі  $\partial D$  будуть знайдені її значення та значення її нормальної похідної. Останнє твердження пов'язано з можливістю відновлення гармонічної функції в області квадратурами за допомогою тотожності Гріна ((3), випадок  $P \in D$ ). Якщо ще зважити на умови Коші–Рімана, то операція знаходження нормальної похідної однієї гармонічної функції здійснюється як тривіальне диференціювання по дузі спряженої. Це означає, що для відновлення аналітичної функції достатньо знайти значення її дійсної та уявної частин на межі області.

Нормаль  $\vec{n} = \vec{n}(s) = \{n_x(s), n_y(s)\}$  вважається зовнішньою по відношенню до області  $D$ , її координати залежать від значення дуги  $s$  межі  $\partial D$  і тому для її визначення у випадку параметрично-

го завдання кривої  $\partial D$  використовуються відомі рівності:

$$n_x(s) = q'(s), n_y(s) = -p'(s). \quad (7)$$

Будемо вважати напрямком  $\vec{s}$  дуги  $s$  таким, що відповідає додатному обходу області  $D$ : область залишається ліворуч.

### Чисельне розв'язування задачі

Скористаємось тотожністю Гріна (3) для однієї з шуканих спряжених гармонічних функцій, наприклад,  $u(x, y)$ , для  $P \in \partial D$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma(P)}{2\pi} u(P) = \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial u(Q)}{\partial n_Q} \ln \frac{1}{r(P, Q)} - u(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \ln \frac{1}{r(P, Q)} \right\} ds(Q), P \in \partial D. \end{aligned} \quad (8)$$

Використовуючи умови Коші–Рімана для спряжених гармонічних функцій

$$\begin{cases} \frac{\partial u(s)}{\partial n} = \frac{\partial v(s)}{\partial s}, \\ \frac{\partial v(s)}{\partial n} = -\frac{\partial u(s)}{\partial s}, \end{cases} \quad (9)$$

тотожність (8) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \omega(P)u(P) = \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial v(Q)}{\partial s_Q} \ln \frac{1}{r(P, Q)} - \right. \\ \left. - u(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \ln \frac{1}{r(P, Q)} \right\} ds(Q), P \in \partial D, \end{aligned} \quad (10)$$

Аналогічно перетворюється тотожність Гріна для спряженої гармонічної функції  $v(x, y)$ :

$$\begin{aligned} \omega(P)v(P) = \int_{\partial D} \left\{ -\frac{\partial u(Q)}{\partial s_Q} \ln \frac{1}{r(P, Q)} - \right. \\ \left. - v(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \ln \frac{1}{r(P, Q)} \right\} ds(Q), P \in \partial D. \end{aligned} \quad (11)$$

Рівняння (10) (або (11)) разом з крайовою умовою (6) утворюють інтегро-диференціальну систему рівнянь<sup>1</sup>. Вибір одного з останніх двох рівнянь підпорядковується стратегії наявності в інтегро-диференціальному рівнянні невідомого позаінтегрального члена. Тобто, якщо назвати рівняння (10) рівнянням для функції  $u(x, y)$ , а рівняння (11) – для функції  $v(x, y)$ , то формуємо систему рівнянь з (10) і (11), вибирається рівняння для тієї функції, значення якої невідоме у заданій точці  $P$ . Таким чином, отримаємо наступну систему рівнянь:

<sup>1</sup> Безпосереднє виключення однієї з шуканих функцій завдяки рівності (6) не завжди можливе.

$$\left\{ \begin{aligned} \omega(P)u(P) &= \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial v(Q)}{\partial s_Q} \ln \frac{1}{r(P,Q)} - u(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \ln \frac{1}{r(P,Q)} \right\} ds(Q), P \in \partial D; \\ \omega(P)v(P) &= \int_{\partial D} \left\{ -\frac{\partial u(Q)}{\partial s_Q} \ln \frac{1}{r(P,Q)} - v(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \ln \frac{1}{r(P,Q)} \right\} ds(Q), P \in \partial D; \\ a(s)u(s) + b(s)v(s) &= c(s), s \in [0, S]. \end{aligned} \right. \quad (12)$$

Зрозуміло, для достатньо складної області розв'язування системи (12) можливе лише чисельними методами. Реалізація чисельних алгоритмів, як правило, потребує апроксимації шуканих функцій. Однією з поширених апроксимацій функцій є лінійна сплайн-функція. Це пояснюється можливістю отримати достатньо точні результати і водночас – простою реалізацією методу. Скориставшись таким наближенням шуканих функцій, маємо, наприклад, для функції  $u(s)$  та її похідної  $u'(s)$ :

$$u(s) = T_1(s)u_{i-1} + T_2(s)u_i, i = \overline{1, n}; \quad (13)$$

$$u'(s) = Z_1(s)u_{i-1} + Z_2(s)u_i, i = \overline{1, n}; \quad (14)$$

де позначено

$$T_1 = \frac{s_i - s}{h_i}; T_2 = \frac{s - s_{i-1}}{h_i}; h_i = s_i - s_{i-1};$$

$$Z_1 = -Z_2 = -1/h_i.$$

Крім того, в цих формулах  $s \in \Delta_i = [s_{i-1}, s_i], i = \overline{1, n}$ , де  $s_i$  – точки розбиття межі області,  $n$  – кількість проміжків розбиття. Аналогічно записуються формули для функції  $v(s)$  та її похідної  $v'(s)$ :

$$v(s) = T_1(s)v_{i-1} + T_2(s)v_i, i = \overline{1, n}; \quad (15)$$

$$v'(s) = Z_1(s)v_{i-1} + Z_2(s)v_i, i = \overline{1, n}. \quad (16)$$

Невідомими є значення  $u_i, v_i, i = \overline{0, n}$  – всього  $2*(n+1)$  чисел. Система рівнянь для знаходження цих значень генерується системою інтегродиференціальних рівнянь (12) з використанням наближень (13)–(16). Отримана система рівнянь буде системою лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР):

$$\left\{ \begin{aligned} \omega_i u_i + \sum_{j=1}^n \{ -u_{j-1} \alpha_{1j} - u_j \alpha_{2j} + v_{j-1} \beta_{1j} + v_j \beta_{2j} \} &= 0, i = \overline{0, n}; \\ \omega_i v_i + \sum_{j=1}^n \{ v_{j-1} \alpha_{1j} + v_j \alpha_{2j} + u_{j-1} \beta_{1j} + u_j \beta_{2j} \} &= 0, i = \overline{0, n}; \\ a_i u_i + b_i v_i &= c_i, i = \overline{0, n}. \end{aligned} \right. \quad (17)$$

Тут значенню індексу відповідає значення функцій відповідного аргументу в точках розбиття, крім того, позначено:

$$\alpha_{kj} = \int_{s_{j-1}}^{s_j} T_k(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} \ln \frac{1}{r(P,Q)} ds(Q), k = 1, 2;$$

$$\beta_{kj} = \int_{s_{j-1}}^{s_j} Z_k(Q) \ln \frac{1}{r(P,Q)} ds(Q), k = 1, 2.$$

Не важко помітити, що перша половина отриманої СЛАР задається щільно заповненою матрицею її коефіцієнтів, а друга – діагональними підматрицями.

**Зауваження 1.** Якщо  $P \neq Q$ , то обчислення  $\mu(P, Q) = \frac{\partial}{\partial n_Q} \ln \frac{1}{r(P, Q)}$  здійснюється за відомим визначенням похідної за напрямком:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n_Q} \ln \frac{1}{r(P, Q)} &= \vec{n}_Q \cdot \text{grad} \left( \ln \frac{1}{r(P, Q)} \right) = \\ &= \frac{q'(s)[p(\sigma) - p(s)] - p'(s)[q(\sigma) - q(s)]}{r^2(P, Q)}, \end{aligned}$$

де  $r^2(P, Q) = [p(\sigma) - p(s)]^2 + [q(\sigma) - q(s)]^2$ . Якщо  $P = Q$ , то безпосередньо обчислювати вираз  $\mu(P, P)$  неможливо, виникає невизначеність 0/0. В цьому випадку для обчислення  $\mu(P, P)$  необхідно використати відоме правило Лопітала. Після всіх необхідних диференціювань можна отримати формулу:

$$\mu(P, P) = \frac{1}{2} [p''(s)q'(s) - q''(s)p'(s)]$$

або, позначаючи радіус кривизни через  $R(s) = -q''(s)p'(s) + p''(s)q'(s)$ , маємо:

$$\mu(P, P) = -\frac{1}{2R(s)}.$$

**Зауваження 2.** За відсутності сингулярності визначені інтеграли можна обчислювати за відомими квадратурними формулами, наприклад, квадратурною формулою трапецій. Якщо на межі інтегрування присутня інтегрована сингулярність підінтегральної функції (в даному випадку – логарифмічна), то необхідно використовувати або квадратурні формули найвищої алгебраїчної степені точності з відповідною вагою, або з безпосереднім виділенням особливості.

**Зауваження 3.** Вигляд апроксимації шуканих функцій (13), (15) не змінюється за використання сплайн-функцій іншої степені, наприклад, кубічних, що дає певні зручності під час удосконалення алгоритму чисельного розв'язку.

### Аналіз результатів розв'язування задачі

Запропонований алгоритм перевірявся на тестовій крайовій задачі Гільберта для області, що зображена на Рис. 1. Тут  $\gamma$  – половина кута  $C$ , що долинається одиничного кола в точках  $D$  і  $B$  ( $0 < \gamma \leq \pi/2$ ). Точка  $A$  має координати  $(0, -1)$ .

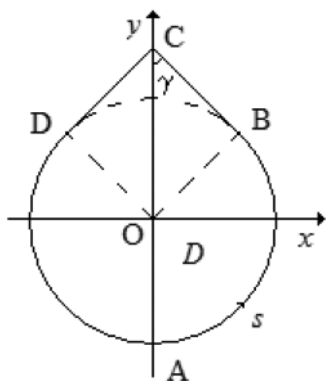


Рис. 1. Область  $D$

Таким чином, задається область  $D$ , що утворюється кривою  $ABCD$  (межа  $\partial D$ ) та знаходиться по лівий бік при обході межі проти годинникової стрілки. Область симетрична відносно осі  $Oy$ , тому параметричний запис рівняння межі  $\partial D$  достатньо записати для дуг  $AB$  і  $BC$ .

Нехай початок дугової координати пов'язаний з точкою  $A$ , тобто  $s(A) = 0$ . Визначення дугових координат решти точок приводить до значень:  $s(B) = \pi/2 + \gamma$ ,  $s(C) = s(B) + ctg\gamma$ ,  $s(D) = s(C) + ctg\gamma$ . Повна довжина  $S$  межі  $\partial D$  обчислюється за формулою  $S = s(D) + \pi/2 + \gamma$ . Параметричний запис (4) дуг  $AB$  і  $BC$  приводить до таких пар функцій:

$$\begin{cases} p(s) = \sin s; \\ q(s) = -\cos s, s \in [0, s(B)] \\ p(s) = (s(C) - s) \sin \gamma; \\ q(s) = \frac{1}{\sin \gamma} - (s(C) - s) \cos \gamma, s \in [s(B), s(C)] \end{cases}$$

Як тестові аналітичні функції  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  використовувались такі, що:

$$\begin{cases} u(x, y) = x^2 - y^2; \\ v(x, y) = 2xy \\ u(x, y) = \exp(x) \cos y; \\ v(x, y) = \exp(x) \sin y \end{cases}$$

Задача Діріхле для аналітичної функції  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , де  $u(x, y) = x^2 - y^2$ ;  $v(x, y) = 2xy$  є частинним випадком задачі Гільберта за  $a(x, y) = 0, b(x, y) = 1, c(x, y) = v(x, y), (x, y) \in \partial D$ . Чисельні розрахунки представлені на рис. 2. Шукана функція  $u(x, y)$  знайдена з точністю  $10^{-2}$ .

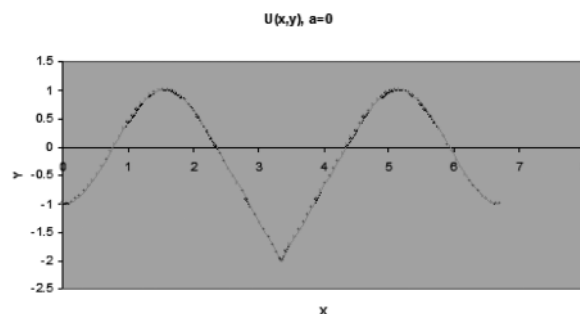


Рис. 2. Розв'язок тестової задачі 1

Задача Діріхле для аналітичної функції  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , де  $u(x, y) = \exp(x) \cos y$ ;  $v(x, y) = \exp(x) \sin y$  є частинним випадком задачі Гільберта при  $a(x, y) = 0, b(x, y) = 1, c(x, y) = v(x, y), (x, y) \in \partial D$ . Чисельні розрахунки представлені на рис. 3. Шукана функція  $u(x, y)$  знайдена з точністю  $10^{-2}$ .

У наведених прикладах на межі області задана функція  $v(x, y)$ , і тому використовувалась тотожність Гріна для функції  $u(x, y)$ . Спроба отримати розв'язок через тотожність Гріна для функції  $v(x, y)$  приводила до очікуваних високочастотних збурень розв'язку і, як наслідок, до значних похибок, що свідчить про некоректність СІАР. Природа цієї некоректності така сама, як і природа некоректності інтегральних рівнянь Фредгольма I роду: в чисельному експерименті також відсутні позаінтегральні члени з шуканою функцією.

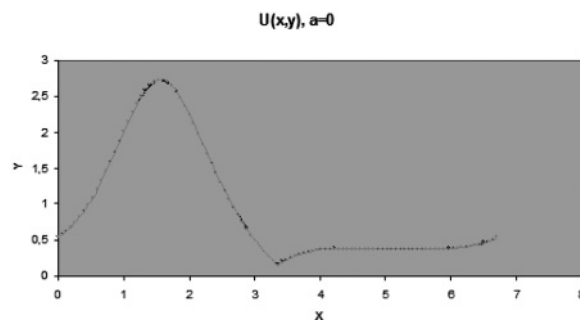


Рис. 3. Розв'язок тестової задачі 2

Для вказаних вище тестових аналітичних функцій чисельно розв'язувалась задача Гільберта за умови

$$a(x, y) = b(x, y) = 1, c(x, y) = u(x, y) + v(x, y), (x, y) \in \partial D.$$

Отримані чисельні розв'язки мають похибку порядку  $10^{-2}$  (графіки ідентичні тим, що зображені на рис. 1–2).

Аналіз отриманих результатів дає змогу зробити такі висновки:

1. Метод граничних інтегральних рівнянь є ефективним методом розв'язування крайової задачі Гільберта для області з негладкою межею.

1. Риццо Ф. Метод граничных интегральных уравнений – современный вычислительный метод прикладной механики / Ф. Риццо // Механика. Новое в зарубежной науке. – М. : Мир, 1978. – № 15. – С. 11–17.

2. Для отримання стійких розв'язків методом граничних інтегральних рівнянь вибір однієї з двох тотожностей Гріна підпорядковується стратегії наявності в інтегро-диференціальному рівнянні невідомого позаінтегрального члена. Ця стратегія приводить до вибору в кожній точці межі області тотожності Гріна для тієї з двох спряжених гармонічних функцій, значення якої там невідоме.

2. Кошляков Н. С. Уравнения в частных производных математической физики. Учебн. пособие для мех.-мат. фак. ун-тов / Н. С. Кошляков и др. – М. : Высшая школа, 1970. – 712 с.

V. Popov, E. Vakal, M. Shitikov

## NUMERICAL SOLUTION OF GILBERT PROBLEM IN A BOUNDED FIELD WITH NON-SMOOTH BOUNDARY

*In this article authors show how to construct numeric solution of Gilbert problem of finding out holomorphic function in a bounded domain with non-smooth bound. The algorithm of construction is based on using of the boundary-integral equation method. There was done a numeric experiment of the test Gilbert problem solving with its further conclusions over the using of the boundary-integral equation method.*

УДК 004

Анісімова Л. А., Глибовець А. М., Субота О. М.

## МОДЕЛЮВАННЯ БІРЖОВИХ ПРОЦЕСІВ ЗА ДОПОМОГОЮ АГЕНТНОГО ПІДХОДУ

*Розглянуто базові підходи до розв'язання задачі дослідження біржової діяльності маркет-мейкера на основі побудови агентної моделі.*

### Вступ

Технологія мультиагентних систем все ще перебуває на стадії становлення. Тривають активні дослідження в області теоретичних засад формалізації основних понять і компонент систем, особливо в області формалізації ментальних понять, роботи з погано структурованими або визначеними поняттями.

Створення ефективно працюючих реальних додатків вимагає значних зусиль у знайденні спеціалізованих методів організації кооперативного розв'язання задач агентами, методів організації переговорів під час розв'язання конфліктів

і створення відповідних протоколів в мультиагентних системах [1–3]. Відзначимо, що ці результати можуть бути використані і для моделювання біржових процесів та у задачах типу «electronic market place».

Розглянемо базові підходи до розв'язання задачі дослідження біржової діяльності на основі побудови агентної моделі.

### Математична модель біржової діяльності

Більшість задач аналізу біржової діяльності в традиційних математичних моделях вирішуються застосуванням методів динамічного програ-