

## ХВИЛЬОВІ РОЗВ'ЯЗКИ З ОСОБЛИВОСТЯМИ ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ СКЛАДНИХ СЕРЕДОВИЩ

У роботі розглянуто хвильові розв'язки нелокальних моделей складних середовищ. Особливу увагу звернено на вивчення локалізованих режимів з використанням методів якісного та числового аналізу динамічних систем. Встановлено, що моделі володіють неаналітичними розв'язками.

**Ключові слова:** нелокальні моделі, усамітнені хвилі.

### Вступ

У сильно нерівноважених умовах реальні середовища активно проявляють особливості своєї внутрішньої структури [6]–[8]. Адекватний опис середовищ за таких умов можна провести в рамках механіки суцільного середовища, врахувавши в рівнянні стану середовища динаміку внутрішніх процесів [6]. За такого підходу були побудовані та обґрунтовані за допомогою методів феноменологічної термодинаміки незворотних процесів нелокальні моделі, які у гідродинамічному довгохвильовому наближенні мають вигляд [5]:

$$\begin{aligned} \dot{\rho} + \rho u_x &= 0, \quad \rho \dot{u} + p_x = 0, \\ p &= \kappa \rho + \sigma \left( p_{xx} + \rho_x p_x \rho^{-1} - \right. \\ &\quad \left. - \chi (\rho_0 / \rho)^2 \{ \rho_{xx} - \rho^{-1} \rho_x^2 \} \right) - \\ &\quad - h \left( \ddot{p} + \chi (\rho_0 / \rho)^2 \{ 2\rho^{-1} \dot{\rho}^2 - \ddot{\rho} \} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

де  $\rho$  – густина,  $p$  – тиск,  $u$  – швидкість, величини  $\sigma$  та  $h$  є параметрами просторової та часової нелокальності,  $\rho_0$  – густина середовища в рівноважному стані, параметри  $\kappa$ ,  $\chi$ ,  $\eta$  пропорційні квадратам швидкостей звуку у середовищі,  $(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + u \frac{\partial(\cdot)}{\partial x}$  – субстанційна похідна.

Попередні дослідження нелокальних моделей виду (1) [3, 9] виявили серед інваріантних хвильових розв'язків періодичні, мультиперіодичні, квазіперіодичні, хаотичні, солітоноподібні режими, які описувались аналітичними функціями за винятком задач з ударними хвилями.

Таким чином, для моделей (1) розв'язки з особливостями, наприклад, у вигляді розривів похідних функцій в окремих точках, вивчались недостатньо, хоча притаманні багатьом моделям [10, 11, 12] і нелокальним, зокрема [4, 13, 14].

### Якісний аналіз структури автохвильових розв'язків

Дослідимо структуру автохвильових розв'язків виду:

$$u = U(\omega) + D, \quad \rho = R(\omega), \quad p = P(\omega), \\ \omega = x - Dt, \quad (2)$$

де  $D$  – стала швидкість хвильового фронту. Підставивши (2) в (1), отримаємо дві квадратури  $UR = -D\rho_0$ ,  $P = (D^2 + \kappa + DU)\rho_0$  та динамічну систему:

$$U' = W, \quad W' = \Delta^{-1} \left( D(D+U) \times \right. \\ \left. \times (\kappa + DU) + (D^2 - \chi) W^2 (\sigma + hU^2) \right), \quad (3)$$

де  $\Delta = U(D^2 - \chi)(\sigma - hU^2)$ . Динамічна система (3) допускає пониження порядку. Поділивши друге рівняння на перше та ввівши нову змінну  $W^2 = Z$ , отримаємо

$$\frac{dZ}{dU} = \frac{2D(D+U)(\kappa + DU)}{U(D^2 - \chi)(\sigma - hU^2)} + \\ + \frac{2Z(\sigma + hU^2)}{U(\sigma - hU^2)}. \quad (4)$$

Рівняння (4) є лінійним відносно функції  $Z$ . Тому його загальний розв'язок має вигляд:

$$W^2 = \left( \frac{U}{\sigma - hU^2} \right)^2 \left( C_* + \right. \\ \left. + \frac{2D}{\chi - D^2} \left\{ \frac{D\kappa\sigma}{2U^2} + \frac{(D^2 + \kappa)\sigma}{U} + \right. \right. \\ \left. \left. + h(D^2 + \kappa)U + \frac{DhU^2}{2} + \right. \right. \\ \left. \left. + D(h\kappa - \sigma) \ln |U| \right\} \right), \quad (5)$$

де  $C_*$  – стала інтегрування, яка визначається з початкових умов. Зазначимо, що у випадку коли початковою умовою є точка з  $(x_U; 0)$ , то

$$C_*(x_U) = \frac{2D}{D^2 - \chi} \left\{ \frac{D\kappa\sigma}{2x_U^2} + \right. \\ \left. + \frac{(D^2 + \kappa)\sigma}{x_U} + h(D^2 + \kappa)x_U + \right. \\ \left. + \frac{Dhx_U^2}{2} + D(h\kappa - \sigma) \ln |x_U| \right\}. \quad (6)$$

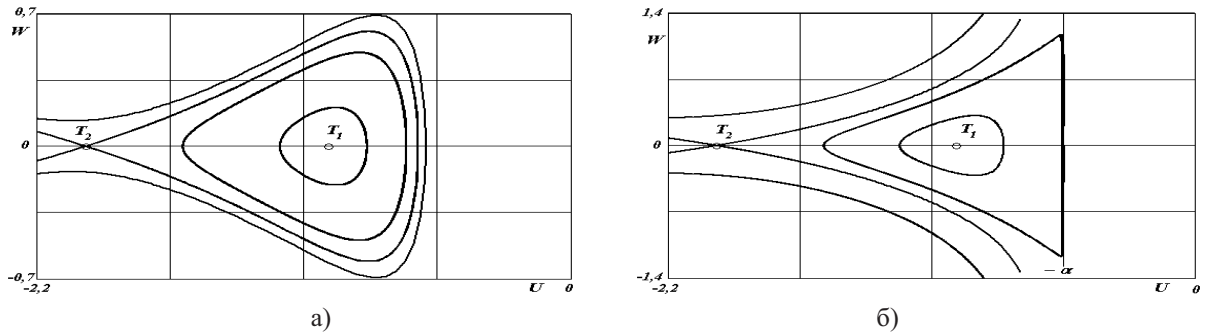


Рис. 1. Фазові портрети динамічної системи (3) при  $\sigma = 0$  (а) та  $\sigma = 0,3$  (б)

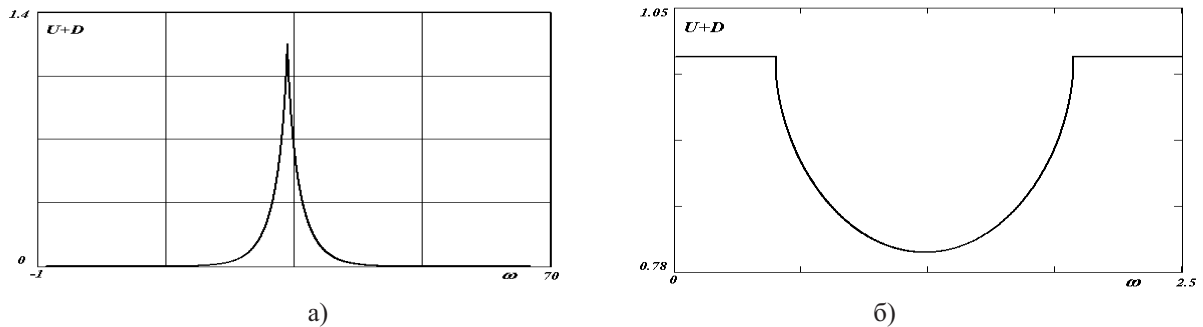


Рис. 2. Графіки компоненти  $U(\omega) + D$  гомоклінічної петлі при  $\sigma = 0,3$  (а) та  $\sigma = \sqrt{\kappa D^{-1}}$  (б)

Формально з останнього виразу можна отримати в неявній формі залежність  $U(\omega)$ . Однак ця залежність є громіздкою, тому доповнимо аналітичний розв’язок результатами вивчення системи (3) методами якісного аналізу [2]. Прирівнявши праві частини системи (3) до нуля, знайдемо стаціонарні точки  $T_1(-\kappa/D; 0)$  і  $T_2(-D; 0)$ . Дослідження стійкості цих точок у лінійному наближенні показали, що точка  $T_1$  характеризується власними значеннями

$$\pm \sqrt{\frac{(D^2 - \kappa) D^4}{(\chi - D^2) \kappa (D^2 \sigma - h \kappa^2)}}, \text{ тоді як точка } T_2$$

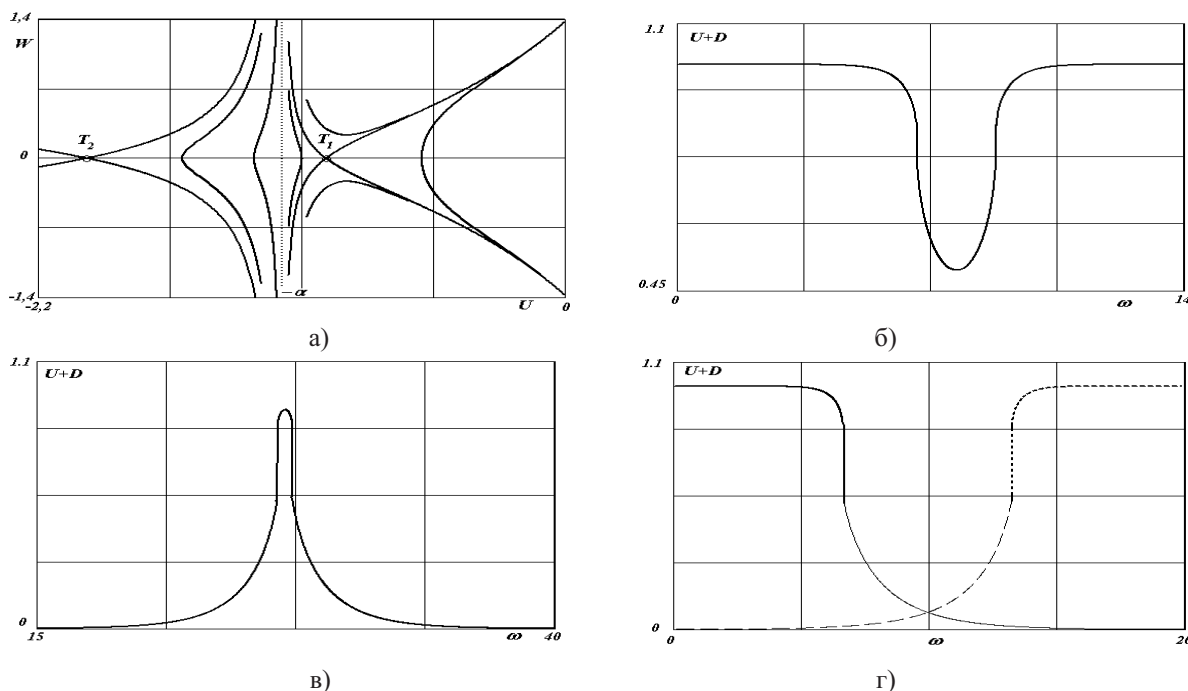
$$- \pm \sqrt{\frac{D^2 - \kappa}{(\chi - D^2) (D^2 h - \sigma)}}.$$

Із фізичного змісту параметрів моделі випливає, що  $\kappa < D^2 < \chi$ . Тому типи стаціонарних точок визначаються знаками виразів  $D^2 \sigma - h \kappa^2$  та  $D^2 h - \sigma$ , які з використанням характеристичної швидкості  $\alpha^2 = \sigma h^{-1}$  запишемо у вигляді  $L_1 = \alpha^2 - \kappa^2 D^{-2}$  та  $L_2 = D^2 - \alpha^2$ . Таким чином, розбиття фазового простору динамічної системи (3) на траєкторії залежить від співвідношення між  $\alpha$  та іншими швидкостями у середовищі. Тому дослідимо структуру фазової площини системи (3) залежно від параметра  $\alpha$ . Для цього зафіксуємо значення параметрів  $\kappa = 2, D^2 = 4, \chi = 7, h = 1$ , а параметр  $\sigma$  використаємо в як бифуркаційний. Враховуючи ха-

рактер стійкості стаціонарних точок системи (3), структура фазових портретів системи визначається взаємним положенням граничних циклів і сепаратрис [2]. При цьому спостерігаємо наступні типові випадки:

1.  $\sigma = 0$ . Тоді  $L_1 < 0, L_2 > 0$ , локально точка  $T_1$  – центр,  $T_2$  – сідлова точка. Як зображено на рисунку 1 а), фазовий портрет динамічної системи (3) містить гомоклінічну петлю, яка проходить через точку  $T_2$ . Аналітичний вираз цієї петлі можна отримати за допомогою співвідношення (5), де стали інтегрування визначимо з умови проходження траєкторії через точку  $T_2$ , тобто  $C_* = C_*(-D)$ . Гомоклінічній орбіті відповідає гладкий солітоноподібний розв’язок моделі (1) з необмеженим носієм.

2.  $0 < \sigma < h \kappa^2 D^{-2}$ . Тоді  $L_1 < 0$  і  $T_1$  – центр,  $L_2 > D^2 - \frac{\kappa^2}{D^2} > D^2 - \kappa > 0$  і  $T_2$  – сідлова точка. Фазовий портрет зображено на рис. 1, б. Область існування граничних циклів обмежена сепаратрисною кривою, рівняння якої визначається виразом (5), де  $C_* = C_*(-\alpha)$ . У сідловій точці  $T_2$  перетинаються дві сепаратрисы, яким відповідає розв’язок з особливістю у вершині – каспін (рис. 2, а) [12]. У випадку, коли лінія розриву  $U = -\alpha$  проходить через стаціонарну точку  $T_1$ , у динамічній системі (3) реалізується компактний режим [11, 12],



**Рис. 3.** Фазові портрети динамічної системи (3) та графіки компоненти  $U(\omega) + D$  гомоклінічних петель (а) та (б)  $\sigma = 0$ , (в) та (г)  $\sigma = 0,3$

зображений на рисунку 2, б.

3.  $h\kappa^2 D^{-2} < \sigma < hD^2$ . Тоді  $L_1 > 0$  та  $L_2 > 0$ , точки  $T_1$  і  $T_2 \in$  сідловими. Сингулярна лінія  $U = -\alpha$  (рис. 3, а) знаходиться між стаціонарними точками. Зауважимо випадок  $\sigma = h\kappa$ . Очевидно, що  $h\kappa^2 D^{-2} < \sigma = h\kappa < hD^2$ . За цієї умови вираз (5) має вигляд :

$$(\sigma - hU^2)^2 U'^2 = \frac{D^2 \kappa \sigma}{\chi - D^2} + \frac{2D(D^2 + \kappa)\sigma U}{\chi - D^2} + U^2 C_* + \frac{2Dh(D^2 + \kappa)}{\chi - D^2} U^3 + \frac{D^2 h}{\chi - D^2} U^4.$$

Отримане диференціальне рівняння докладно досліджується методами теорії еліптичних функцій [1]. Для побудови окремих розв'язків динамічної системи (3) розглядалися контури на фазовій площині, які проходять через стаціонарні точки, перетинаючи лінію розриву. Типові траєкторії, які відповідають таким контурам, зображені на рис. 3, б та 3, в (тіпони), 3, г (кінки з особливостями на фронті) [12].

4.  $hD^2 < \sigma$ . Тоді  $L_1 > D^2 - \frac{\kappa^2}{D^2} > 0$ ,  $T_1$  – сідлова точка,  $L_2 < 0$ ,  $T_2$  – центр (рис. 4, а). За невеликого перевищення параметром  $\sigma$  величини  $hD^2$  випадок 4 схожий на випадок 2, тільки максимуми функції  $U(\omega)$  лежать в іншій півплощині відносно стаціонарного режиму.

При достатньо великих  $\sigma$  спостерігаються два

різні види взаємного розташування сепаратрисної кривої, яка обмежує періодичні режими в околі точки  $T_2$  і сепаратрис сідлової точки  $T_1$  (пор. рис. 4, а та рис 4, б). Аналітичні вирази для сепаратрис визначаються співвідношенням (5) при  $C_* = C_*(-\alpha)$  та  $C_* = C_*(-\kappa D^{-1})$ . Таким чином, при зростанні параметра  $\sigma$  діаметр межі періодичних режимів зростає, поки контур не досягне точки  $T_1$ . Умову злиття сепаратрисного контуру і точки  $T_1$  можна записати у вигляді рівняння відносно параметра  $\sigma$ :

$$C_*(-\alpha) = C_*(-\kappa D^{-1}).$$

Числовим розв'язком алгебраїчного рівняння є значення  $\sigma = 17,142$  при значеннях інших параметрів, зафіксованих вище. Знайдене значення  $\sigma$  слід розглядати як біфуркаційне, оскільки при  $\sigma > 17,142$  у фазовому просторі динамічної системи з'являється гомоклінічна петля сідлової точки  $T_1$ .

### Висновки

Таким чином, наведені результати свідчать про наявність серед розв'язків нелокальної моделі середовища (1) траєкторій, які описуються неаналітичними функціями. У даному випадку їх наявність пов'язана з урахуванням динаміки структурних елементів середовища.

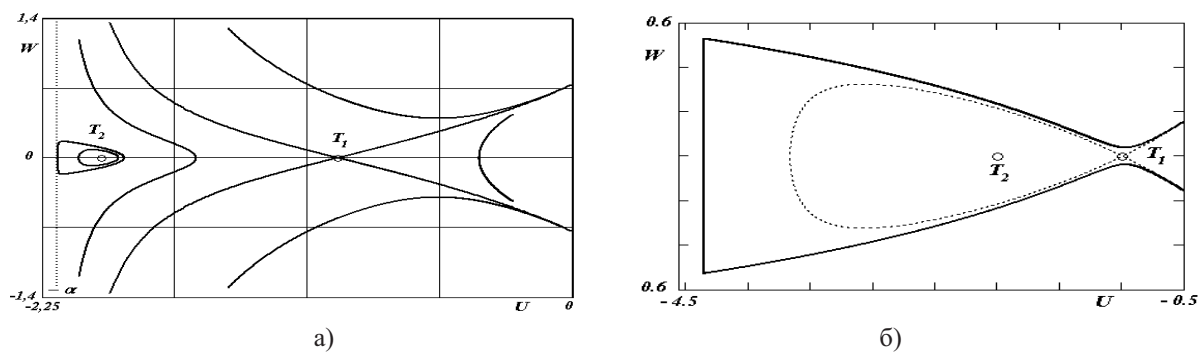


Рис. 4. Фазові портрети динамічної системи (3) та графіки компоненти  $U(\omega) + D$  гомоклінічних петель

- Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций / Н. И. Ахиезер – М. : Наука, 1970. – 304 с.
- Баутин Н. Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н. Н. Баутин, Е. А. Леонтович. – М. : Наука, 1976. – 496 с.
- Владіміров В. А. Нелінійні хвильові структури в моделях середовищ, що релаксують : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня д-ра фіз.-мат. наук – Одеса, 2000. – 36 с.
- Владіміров В. А. Усамітнені хвилі з компактним носієм у континуальному аналізі моделі гетерогенного середовища / В. А. Владіміров, С. І. Скуратівський // Доповіді НАН України. – 2009. – № 3. – С. 122–125.
- Даниленко В. А. Нелінійні математичні моделі середовищ з часовою та просторовою нелокальностями / В. А. Даниленко, Т. Б. Даневич, С. І. Скуратівський. – К. : Інститут геофізики ім. С. І. Субботіна НАН України, 2008. – 86 с.
- Ляхов Г. М. Волны в грунтах и пористых многокомпонентных средах / Г. М. Ляхов. – М. : Наука, 1982. – 288 с.
- Нигматулин Р. И. Динамика многофазных сред / Р. И. Нигматулин – М. : Наука, 1987. – Т. 2. – 360 с.
- Проблемы нелинейной сейсмологии / [под ред. А. В. Николаева и И. Н. Галкина]. – М. : Наука, 1987. – 288 с.
- Скуратівський С. І. Автохвильові розв'язки моделі середовища з просторовою та часовою нелокальностями: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук – Одеса, 2002. – 20 с.
- Скуратовская И. А. Точные волновые решения моделей геофизических сред с осциллирующими включениями / И. А. Скуратовская, С. И. Скуратовский // Материалы XIX Международной научной школы им. академика С. А. Христиановича, Крым, г. Алушта, 21–27 сентября 2009 г. – 2009 – С. 291–293.
- Li Y. A. Non-analytic solutions of nonlinear wave models / Y. A. Li, P. J. Olver, P. Rosenau // Nonlinear Theory of Generalized Functions. – Vienna: Chapman & Hall–CRC Press, 1999. – P. 129–145.
- Rosenau P. On nonanalytic solitary waves formed by a nonlinear dispersion / P. Rosenau // Physics letters. – 1997. – A 230. – P. 305–318.
- Vladimirov V. A. Compacton-like solutions to some nonlocal hydrodynamic-type model. – arXiv:0804.2022v1 [nlin.PS].
- Vladimirov V. A. Compacton-like solutions of the hydrodynamic system describing relaxing media. – arXiv:0710.1191v1 [nlin.PS].

*S. I. Skurativskyy, I. A. Skurativska*

## WAVE SOLUTIONS WITH PECULIARITIES FOR THE NONLOCAL MODELS OF COMPLEX MEDIA

*Wave solutions to nonlocal models of complex media are investigated. Using the qualitative and numerical analysis of dynamical systems, localized wave regimes are studied in detail. It was shown that the models possess the nonanalytic solutions.*

**Keywords:** nonlocal models, solitary waves.