УДК 517.5

Кашпіровський О. І., Наумова В. А.

ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗВИНЕНЬ В РЯДИ ДІРІХЛЕ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ОПЕРАТОРНОГО ПІДХОДУ

Роботу присвячено побудові Гільбертового простору H і заданого в ньому оператора A таких, що розвинення в ряд Діріхле функцій аналітичних всередині квадрата буде розкладом за власним базисом оператора A; визначення явних формул для обрахунку коефіцієнтів розвинення у ряд Діріхле і встановлення зв'язку між гладкістю функції на сторонах квадрата та швидкістю збіжності ряду Діріхле за методом [3].

Ключові слова: ряди Діріхле, Фур'є, операторний підхід, Гільбертів простір, аналітична функція.

Функціональний ряд:

$$f(s) = \sum_{i=1}^{n} a_n e^{-\lambda_n s} \ , \qquad (1)$$

де a_n — комплексні коефіцієнти, λ_n — зростаюча послідовність дійсних чисел,

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty,$$

$s = \sigma + it$ — комплексна змінна, називається рядом Діріхле.

Ряди Діріхле були вперше представлені німецьким математиком Діріхле (Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet) і, головним чином, призначені для використання у теорії чисел. Велику кількість важливих теорем стосовно рядів Діріхле було встановлено наприкінці XIX — початку XX ст.

Рядам Діріхле взагалі і теорії розвинень функцій в ряди Діріхле зокрема присвячено численні наукові праці, уявлення про які можна скласти за далеко не повними бібліографіями, представленими у монографіях С. Мандельбройта, О. Ф. Леонтьєва. Найбільш важливі результати з дослідження збіжності рядів Діріхле у XX ст. одержані Ж.Дельзартом, С. Верблюнським, Л. Шварцем, О. Ф. Леонтьєвим та ін.

Однак у цих роботах збіжність завжди досліджувалася в опуклих відкритих областях. Вперше досліджувати збіжність рядів Діріхле в замкненій області розпочав О. Ф. Леонтьєв у кінці 60-х р. XX ст. У 70-х р. Під час дослідженя рядів Діріхле для функцій аналітичних всередині опуклого n-кутника і неперервних на його сторонах у роботах В. К. Дзядика, Е. К. Крутиголови [9], В. К. Дзядика [10] та О. Ф. Леонтьєва [1],[4] – [8] був запропоновано розклад на суму n функцій:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z), \qquad (2)$$

де кожна з функцій $f_k(z)$ є періодичною на одній із сторін n-кутника і допускає аналітичне продовження у напівплощину, що містить цей n-кутник.

Зауважимо, що розвинення функцій $f(z)$ у ряд Діріхле складається із суми розвинень в ряди Фур'є функцій $f_k(z)$ на відповідних сторонах n-кутника. У випадку квадрата $Q = \{z = x + iy : |x| \leq \pi, \ |y| \leq \pi\}$ розвинення в ряд Діріхле набуває вигляду [9][10]:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{4} f_k(z) = \sum_{k=1}^{4}\sum_{n=1}^{\infty} a_{kn}\varphi_{kn}(z), \qquad (3)$$

де $\varphi_{kn}(z) = e^{i^{-k+2}nz}$, причому експоненти

$\varphi_{1n}(z) = e^{inz}$ відповідають стороні $\Gamma_1 = [-\pi(1+i), \pi(1-i)]$,

$\varphi_{2n}(z) = e^{nz}$ відповідають стороні $\Gamma_2 = [\pi(1-i), \pi(1+i)]$,

$\varphi_{3n}(z) = e^{-inz}$ відповідають стороні $\Gamma_3 = [\pi(1+i), \pi(-1+i)]$,

$\varphi_{4n}(z) = e^{-nz}$ відповідають стороні $\Gamma_4 = [\pi(-1+i), -\pi(1+i)]$.

Зауважимо, що у роботі О. Ф. Леонтьєва [1] розвинення (3) розглядається з точністю до деякого квадратного многочлена $q(z)$, тобто

$$f(z) = \sum_{k=1}^{4}\sum_{n=1}^{\infty} a_{kn}\varphi_{kn}(z) + q(z). \qquad (4)$$

У цій замітці пропонується дещо інший підхід до розкладу (2) як до розвинення за власним базисом самоспряженого розширення оператора диференціювання $D = i\frac{d}{dz}$ у деякому належним чином побудованому Гільбертовому просторі функцій аналітичних всередині Q функцій. Оскільки, за (3), ряд Діріхле функцій аналітичних всередині квадрата і неперервних на його сторонах є сумою чотирьох рядів Фур'є, то, зрозуміло, що властивості рядів Фур'є можуть бути перенесені і на ряди Діріхле (3).

Як відомо, ряд Фур'є функції $f(x)$ на відрізку $[-\pi, \pi]$ можна розглядати як розвинення за власним ортогональним базисом $\{e^{inx}\}_{n\in Z}$ самоспряженого розширення оператора диференціювання $i\frac{d}{dx}$ з періодичними граничними умовами $f(-\pi) = f(\pi)$.

У цій замітці показано, що ряд Діріхле (3) також є розвиненням за власними функціями $\varphi_{kn}(z),\ k = \overline{1,4},\ n \in N$ нормального розширення оператора диференціювання $i\frac{d}{dz}$, визначених на аналітичних у Q і неперервно диференційованих на його сторонах функціях $f(z)$ із певними граничними умовами на значення у вершинах квадрата. Отже, для дослідження апроксимації функцій аналітичних у Q рядами Діріхле може бути застосований запропонований у статті В. І. Горбачука та М. Л. Горбачука [3] так званий операторний підхід до теорії апроксимації. Такий підхід дає змогу істотно спростити доведення й уточнити багато результатів отриманих раніше у працях О. Ф. Леонтьєва, В. К. Дзядика й учнів, Е. К. Крутиголови та Ю. І. Мельника [12] – [14], а також А. М. Седлецького [15] – [17], Б. Я. Левіна, Ю. І. Любарського [20].

До системи функцій $\varphi_{kn}(z),\ k = \overline{1,4},\ n \in N$ у роботі долучено також функцію $\varphi_0(z) \equiv 1$. У випадку розглянутих у (2) розвинень у ряд Діріхле функції $f(z) = e^{qz},\ q \notin Z,\ iq \notin Z$ доповнення базиса функцією $\varphi_0(z) \equiv 1$ дає змогу одержати збіжність ряду Діріхле на сторонах Q, окрім вершин. Отримано явні формули для коефіцієнтів a_{kn}.

Нехай $L_2(\Gamma)$ — простір усіх комплекснозначних функцій $f(z)$, визначених на границі квадрата Q $(\Gamma = \partial Q)$, які мають інтегрований квадрат модуля:

$$\int\limits_{\Gamma} |f(z)|^2 |dz| < +\infty.$$

Скалярний добуток в $L_2(\Gamma)$ визначається формулою

$$(f, z) = (f, g)_{L_2(\Gamma)} = \int\limits_{\Gamma} f(z)\overline{g(z)}|dz|. \quad (5)$$

У $L_2(\Gamma)$ позначимо підпростір $H = H_2(Q)$ типу Гарді, який складається з функцій $f(z)$ із $L_2(\Gamma)$, що допускають аналітичне продовження у середину квадрата Q. Відносно скалярного добутку (5) $H_2(Q)$ утворює також Гільбертів простір. У H розглянемо сімейство функціоналів $\aleph_{jm}(f),\ j = \overline{1,4},\ m \in N$, які є «індикаторами» функцій $\varphi_{kn}(z)$. Дію функціоналів $\aleph_{jm}(f)$ на функцію $f(z)$ із $H_2(Q)$ визначимо за допомогою контурного інтеграла

$$\aleph_{jm}(f) = \int\limits_{\Gamma_j} f(z)\overline{\varphi_{jm}(z)}dz - \int\limits_{\Gamma_{j+1}} f(z)\overline{\varphi_{j+2,m}(z)}dz + \int\limits_{\Gamma_{j+2}} f(z)\overline{\varphi_{jm}(z)}dz - \int\limits_{\Gamma_{j+3}} f(z)\overline{\varphi_{j+2,m}(z)}dz. \quad (6)$$

Вважаємо, що $\Gamma_{k+4} = \Gamma_k,\ \varphi_{k+4,m}(z) = \varphi_{k,m}(z)$. Інтегрування у (6) ведеться у додатному напрямку, функціонали F_{jm} є неперервними в $H_2(Q)$.

Лема 1. *Дія функціонала $\aleph_{jm}(f),\ j = \overline{1,4},\ m \in N$ на функцію $\varphi_{kn}(z),\ k = \overline{1,4},\ n \in N$ визначається за формулою:*

$$\aleph_{jm}(\varphi_{kn}) = 2\pi i^{j-1}(e^{2\pi m} - e^{-2\pi m})\delta_{jk}\delta_{mn}, \quad (7)$$

де δ_{pq} — символ Кронекера

$$\delta_{pg} = \begin{cases} 1, & \text{если } p = q; \\ 0, & \text{если } p \neq q. \end{cases}$$

Доведення. Запишемо зображення функціонала $\aleph_{jm}$ у вигляді:

$$\aleph_{jm}(f) = \sum_{k=1}^{4} (-1)^{r-1} \aleph_{jm}^{(r)}(f), \quad (8)$$

де функціонал $\aleph_{jm}^{(r)}$ відповідає інтегралу за Γ_r (6). Будемо розглядати випадок $j = 1$ внаслідок очевидної симетрії, випадки $j = \overline{2,4}$ можуть бути зведені до випадку $j = 1$. При $k = 1$ маємо :

$$\aleph_{1m}^{(1)}(\varphi_{1n}) + \aleph_{1m}^{(3)}(\varphi_{1n}) = \int\limits_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3} e^{inz}\overline{e^{imz}}dz = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{in(x-i\pi)}\overline{e^{im(x-i\pi)}}dx + \int\limits_{\pi}^{-\pi} e^{in(x+i\pi)}\overline{e^{im(x+i\pi)}}dx = e^{\pi(m+n)}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}dx - e^{-\pi(m+n)}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}dx = 2\pi(e^{2\pi n} - e^{-2\pi n})\delta_{mn}; \quad (9)$$

$$\aleph^{(2)}_{1m}(\varphi_{1n})+\aleph^{(4)}_{1m}(\varphi_{1n})= = \int\limits_{\Gamma_2\cup\Gamma_4} e^{inz}\overline{e^{-imz}}dz = = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{in(\pi+iy)}\overline{e^{-im(\pi+iy)}}idy + + \int\limits_{\pi}^{-\pi} e^{in(-\pi+iy)}\overline{e^{-im(-\pi+iy)}}idy = = (e^{i\pi(n-m)}-e^{-i\pi(n-m)})\times \times\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{(m-n)y}dy = 0. \quad (10)$$

Отже $\aleph_{1m}(\varphi_{1n}) = 2\pi(e^{2\pi m}-e^{-2\pi m})\delta_{mn}$, при $k=2$ маємо

$$\aleph_{1m}(\varphi_{2n}) = \int\limits_{\Gamma_1\cup\Gamma_3} e^{nz}\overline{e^{imz}}dz - - \int\limits_{\Gamma_2\cup\Gamma_4} e^{nz}\overline{e^{-imz}}dz = = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{n(x-i\pi)}\overline{e^{im(x-i\pi)}}dx - - \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{n(\pi+iy)}\overline{e^{-im(\pi+iy)}}idy - - \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{n(x+i\pi)}\overline{e^{im(x+i\pi)}}dx + + \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{n(-\pi+iy)}\overline{e^{-im(-pi+iy)}}idy = = e^{\pi(-in+m)}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{(-im+n)x}dx - - ie^{\pi(n+im)}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{(m+in)y}dy - - e^{\pi(-m+in)}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{(-im+n)x}dx + + ie^{\pi(-im-n)}\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{(m+in)y}dy = = \frac{e^{\pi(m-in)}}{im+n}\, e^{(-im+n)x}\Big|_{-\pi}^{\pi} + + \frac{ie^{\pi(im+n)}}{m+in}\, e^{(m+in)y}\Big|_{-\pi}^{\pi} - - \frac{e^{\pi(-m+in)}}{-im+n}\, e^{(-im+n)x}\Big|_{-\pi}^{\pi} - - \frac{ie^{\pi(-im-n)}}{m+in}\, e^{(m+in)y}\Big|_{-\pi}^{\pi}.$$

Враховуючи, що $e^{i\pi n} = e^{-i\pi n} = (-1)^n$, $e^{i\pi m} = e^{-i\pi m} = (-1)^m$, $\frac{1}{-im+n} = \frac{i}{m+in}$ одержимо:

$$\aleph_{1m}(\varphi_{2n}) = \frac{(-1)^{m+n}}{-im+n}(e^{\pi n}(e^{\pi n}-e^{-\pi n})- - e^{\pi n}(e^{\pi m}-e^{-\pi m}) - e^{-\pi m}(e^{\pi n}-e^{-\pi n}) + + e^{-\pi n}(e^{\pi m}-e^{-\pi m})) = = \frac{(-1)^{m+n}}{-im+n}(e^{\pi(m+n)}-e^{\pi(m-n)}- - e^{\pi(m+n)}+e^{\pi(-m+n)}-e^{\pi(-m+n)}++ e^{\pi(-m-n)}+e^{\pi(m-n)}-e^{\pi(-m-n)}) = 0. \quad (11)$$

Змінюючи в (9) — (11) n на $-n$ отримаємо: $\aleph_{1m}(\varphi_{3n}) = 0,\ \aleph_{1m}(\varphi_{4n}) = 0$.

Для $j = \overline{2,4}$ співвідношення (7) внаслідок очевидної симетрії можуть бути доведені аналогічно.

Лему 2 доведено.

Безпосередньою перевіркою можна довести, що $\aleph_{jm}(1) = 0$ для $j = \overline{1,4},\ m \in N$.

Наслідок 1. *Коефіцієнти ряду Діріхле* $a_{nk} = a_{nk}(f)$ *визначають за формулою* $a_{nk}(f) = \frac{i^{1-j}}{2\pi}(e^{2\pi n}-e^{-2\pi n})^{-1}\aleph_{nk}(f)$.

У просторі H виділимо одновимірний підпростір констант $H(0) = \{f \in H : f = C \in C^1\}$ та підпростори $H(k),\ k = \overline{1,4}$, що складаються з аналітичних періодичних на Γ_k функцій $f_k(z)$ (2). Отже, $H(k)$ — це замкнена лінійна оболонка, породжена функціями $\varphi_{kn}(z),\ n \in N,\ k = \overline{1,4}$. У просторі H введемо оператор $P(k)$ проектування на $H(k)$

$$P(k)f = \frac{1}{2\pi i^{k-1}}\times \times\sum_{n=1}^{\infty}(e^{2\pi n}-e^{-2\pi n})^{-1}\aleph_{kn}(f)\varphi_{kn}(z). \quad (12)$$

У просторах $H(k),\ k = \overline{1,4}$ введемо нові скалярні добутки $(f,g) = \int\limits_{\Gamma_k} f(z)\overline{g(z)}dz$.

Розглянемо пряму суму Гільбертових просторів $\bigoplus\limits_{k=0}^{4} H(k)$. Одержаний простір буде топологічно збігатися з H. Норма прямої суми еквівалентна нормі простору H [21]. Нехай

$$H(I) = H(1) \bigoplus H(3)$$
$$H(II) = H(2) \bigoplus H(4)$$

Отже, матимемо $H = H(0) \bigoplus H(I) \bigoplus H(II)$. У просторі $H(I)$ визначимо самоспряжений оператор $A(I)$ за формулою $A(I)f(z) = i\frac{d}{dz}f(z)$ з періодичними граничними умовами $f(-\pi + iy) = f(\pi + iy)$ для всіх $y \in [-\pi, \pi]$. У просторі $H(II)$, відповідно, визначимо самоспряжений оператор $A(II)f(z) = \frac{d}{dz}f(z)$ із періодичними граничними умовами $f(x - i\pi) = f(x + i\pi)$, $x \in [-\pi, \pi]$. У просторі $H(0)$ вважатимемо, що $A(0)f = 0$.

Теорема 1. *Пряма сума операторів $A(0)$, $A(I)$, $A(II)$ утворює в H самоспряжений оператор A з граничною умовою $f(-\pi(1+i)) - f(\pi(1-i)) + f(\pi(1+i)) - f(\pi(-1+i)) = 0$. Функції 1, $\varphi_{kn}(z)$, $k = \overline{1,4}$, $n \in N$ утворюють власний ортонормований базис, причому $A\varphi_{kn}(z) = (-1)^{k-1}n\varphi_{kn}(z)$.*

Теорема 1 є наслідком Леми 1 та означення прямої суми Гільбертових просторів і прямої суми операторів. З теореми 1 випливає, що (12) є розвиненням за власним базисом оператора A. Для дослідження рядів функцій $f(z)$, що мають неперервні похідні на сторонах квадрата, можна застосувати методи з праці В. І. Горбачук та М. Л. Горбачука [3].

1. Леонтьев А. Ф. Ряды експонент / А. Ф. Леонтьев. — М. : Наука, 1976. — 576 с.

2. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов / Ю. М. Березанский. — К. : Наук. думка, 1965. — 798 с.

3. Горбачук В. И. Операторный подход к задачам апроксимации / В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук. — Алгебра и анализ. — 1997. — Т. 9. — Вып 6. — С. 90–108.

4. Леонтьев А. Ф. Ряды полиномов Дирихле и их обобщения / А. Ф. Леонтьев – Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова. – 1951. — Т. XXXIX. — С. 3–214.

5. Леонтьев А. Ф. О представлении функций последовательностью полиномов Дирихле / А. Ф. Леонтьев // Мат. сб. — 1966. — Т. 70, №1. — С. 132–144.

6. Леонтьев А. Ф. О представлении функций обобщёнными рядами Дирихле / А. Ф. Леонтьев // Успехи мат. наук. — 1969. — Т. 24, №2. — С. 97–164.

7. Леонтьев А. Ф. К вопросу о представлении аналитических функций рядами Дирихле / А. Ф. Леонтьев // Мат. сб. — 1969. — Т. 80, №1. — С. 117–157.

8. Леонтьев А. Ф. Целые функции. Ряды експонент / А. Ф. Леонтьев. — М. : Наука, 1983. — С. 91–97.

9. Дзядык В. К. О представлении аналитических функций рядами Дирихле на границе области сходимости / В. К. Дзядык, Е. К. Крутиголова // Мат. заметки. — 1973. — Т. 14, № 6. — С. 769–780.

10. Дзядык В. К. Об условиях сходимости рядов Дирихле на замкнутых многоугольниках / В. К. Дзядык // Мат. сб. — 1974. — Т. 95, №4. — С. 475–493.

11. Математическая энциклопедия (Советская энциклопедия). — 1979. — Т. 2 — С. 183–186.

12. Мельник Ю. И. О представлении регулярных функций рядами Дирихле в замкнутом круге / Ю. И. Мельник // Мат. сб. — 1975. — 94, № 4. — С. 493–501.

13. Мельник Ю. И. О представлении регулярных функций рядами Дирихле в замкнутых выпуклых многоугольниках / Ю. И. Мельник // Укр. мат. журн. — 1977. — Т. 29, № 6. — С. 826–830.

14. Мельник Ю. И. О представлении аналитических функций в виде суммы периодических / Ю. И. Мельник // Мат. заметки. — 1984. — Т. 36, № 6. — С. 847–856.

15. Седлецкий А. М. Базисы из экспонент в пространствах Ер на выпуклых многоугольниках / А. М. Седлецкий — Изд. АН СССР. Сер. мат. — 1978. — Т. 42, № 5. — С. 1101–1119.

16. Седлецкий А. М. О разложениях функций в ряды Дирихле на замкнутых выпуклых многоугольниках / А. М. Седлецкий // Сиб. мат. журн. — 1978. — Т. 19, № 4. — С. 878–887.

17. Седлецкий А. М. Разложение аналитической функции на сумму периодических / А. М. Седлецкий // Изд. АН СССР. Сер. мат. — 1984. — Т. 48, № 4. — С. 833–853.

18. Hardy G. H. The General Theory of Dirichlet's Series / G. H. Hardy. — Cambridge at the University Press, 1915. — P. 1–5.

19. Landau E. Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen / E. Landau — B. G. Teubner. — 1909. — Sechtes Buch. — P. 723–726.

20. Левин Б. Я. Интерполяция целыми функциями специальных классов и связанные с нею разложения в ряды экспонент / Б. Я. Левин, Ю. И. Любарский // Изд. АН СССР. Сер. мат. — 1975. — 39, № 3. — С. 657–702.

21. Кашпіровський О. І. Про застосування комплекснозначної псевдометрики для дослідження розвинень в ряди Діріхле аналітичних функцій всередині квадрата / О. І. Кашпіровський // Наукові записки НаУКМА. — 2009. — Т. 54. — С. 31–35.

22. Мандельбройт С. Ряды Дирихле, принципы и методы / Мандельбройт С. — М : Наука, 1973. — 271 с.

23. Белый В. И. Исследования В. К. Дзядыка по теории приближения функций комплексного переменного / В. И. Белый, А. П. Голуб, И. А. Шевчук // Укр. мат. жур. — 1989. — Т. 41, № 4. — С. 441–154.

O. Kashpirovskyi, V. Naumova

DECOMPOSITIONS RESEARCH IN THE DIRICHLET SERIES OF ANALYTIC FUNCTIONS WITH OPERATIONAL APPROACH

The aim of the work is to construct Hilbert space H and selfadjoint operator A in it, such that the expansion in Dirichlet series of analytic functions inside the square will be decomposition of operator's proper basis. This work continues investigations of scientists Leontev A. F., Dzyadyk V. K., Krutygolova E. K. in the theory of Dirichlet series.

Keywords: Dirichlet series, Fourier, operator approach, Hilbert space, analytical function.