УДК 512.76

Михалевич В. М.

ДО НЕВИЗНАЧЕНОСТІ В НЕПАРАМЕТРИЧНИХ СИТУАЦІЯХ ЗАДАЧ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Ця робота присвячена дослідженню невизначенности в задачі прийняття рішення для достатньо широкого кола тих, хто приймає рішення. Вона продовжує й узагальнює відповідні результати праці [1].

Ключові слова: невизначенність в задачі прийняття рішень, основна задача прийняття рішень.

Аналізується система прийняття рішень, тобто пара — **той, хто приймає рішення (ТПР)**, і **непараметрична ситуація, в якій розглядається задача рішення (СЗР)** (див.: [2]).

Задачею рішення (ЗР) є встановлення ТПР відношення переваг на множині наслідків X — перша основна ЗР — та на множині рішень Y — друга основна ЗР [3, *с. 258*]. При цьому СЗР задається за допомогою схеми СЗР (ССЗР) — впорядкованої трійки вигляду (X, U, R), де R є графіком відповідності з довільної непорожньої множини U в довільну непорожню множину X, для якого $domR = U$. Основна мета цієї роботи — навести критерій для математично коректної (без невизначенності) постановки ЗР, які задаються лише ССЗР для достатньо широкого класу ТПР.

Введемо необхідні поняття і позначення.

Означення 1. ***ССЗР*** *називається впорядкована трійка вигляду (X, U, R), де R — це відповідність із довільної непорожньої множини U в довільну непорожню множину X, для якої $domR = U$, $imR = X$ і для будь-якого $u \in U$*

$$R(u) \in \Xi. \tag{1}$$

При цьому X називається ***множиною наслідків****, U —* ***множиною рішень,*** *R —* ***відповідністю наслідків ССЗР*** *(X, U, R).*

Умовно ССЗР можна зобразити графіком Γ_R відповідності R, причому «проекція на горизонталь» графіка буде співпадати з множиною U, а «проекція на вертикаль» графіка — з множиною X. (див. рис. 3 у кінці тексту).

Нехай $\hat{\mathbb{Z}}$ — клас усіх впорядкованих трійок виду $\hat{Z} := (X, U, R)$. Тоді $\hat{\mathbb{Z}}(X_1) := \{(X, U, R) \in \hat{\mathbb{Z}} : X = X_1\} := \{(X_1, \cdot, \cdot)\}$, $\hat{\mathbb{Z}}(X_1, U_1) := \{(X, U, R) \in \hat{\mathbb{Z}}(X_1) : U = U_1\} := \{(X_1, U_1, \cdot)\}$ і т. д.

Означення 2. *Дві ССЗР (X_1, U_1, R_1), $(X_2, U_2, R_2) \in \hat{\mathbb{Z}}$ називаються* ***ізоморфними*** *в класі $\hat{\mathbb{Z}}$, будемо позначати*

$$(X_1, U_1, R_1) \approx^{\hat{\mathbb{Z}}} (X_2, U_2, R_2),$$

якщо знайдуться такі бієкції $i : X_1 \to X_2, j : U_1 \to U_2$, що

$$(i, j)(R_1) = R_2. \tag{2}$$

Розглянемо клас ССЗР із заданими відношеннями переваг на відповідних множинах наслідків. Тоді кожній такій непараметричній ССЗР цього класу відповідає впорядкована трійка виду $\hat{\mathcal{Z}} := := ((X, \succcurlyeq), U, R)$. Тоді через $\hat{\mathbf{Z}}$ позначимо клас всіх ССЗР виду $\hat{\mathcal{Z}}$. При цьому $\hat{\mathbf{Z}}(X) := \{((X', \cdot), \cdot, \cdot) \in \hat{\mathbf{Z}} : X' \subseteq X\}$, $\hat{\mathbf{Z}}(X, \succcurlyeq) := := \{((X', \succcurlyeq'), \cdot, \cdot) \in \hat{\mathbf{Z}} : X' \subseteq X, (\succcurlyeq') = (\succcurlyeq|_{X'})\}$.

Умовно ССЗР класу $\hat{\mathbf{Z}}$ будемо зображати вказуючи напрям (стрілочки) на лінії множини X (див., наприклад, рис. 10). Множину наслідків у таких ССЗР будемо називати **множиною доходів**. А ССЗР класу $\hat{\mathbf{Z}}$ будемо називати **ССЗР з доходами**.

Означення 3. *Дві ССЗР* $((X_1, \succcurlyeq_1), U_1, R_1)$, $((X_2, \succcurlyeq_2), U_2, R_2) \in \hat{\boldsymbol{Z}}$ *називаються* ***ізоморфними в класі*** $\hat{\boldsymbol{Z}}$, *що будемо позначати*

$$((X_1, \succcurlyeq_1), U_1, R_1) \approx^{\hat{\boldsymbol{Z}}} ((X_2, \succcurlyeq_2), U_2, R_2),$$

якщо $(X_1, U_1, R_1) \approx^{\hat{\mathbb{Z}}} (X_2, U_2, R_2)$ *і при цьому* $(\approx^{\hat{\mathbb{Z}}})$ *зберігає відношення переваг* $(X_1, \succcurlyeq_1)$, $(X_2, \succcurlyeq_2)$.

Означення 4. ***Підсхемою*** *ССЗР* $(X, U, R) \in \hat{\mathbb{Z}}$ *називається ССЗР* $(X', U', R') \in \hat{\mathbb{Z}}$, *де* $X' \subseteq X$, $U' \subseteq U$, $R' = (U' \times X') \cap R$, $domR' = U'$, $imR' = X'$ *і для будь-якого* $u \in U'$ $R'(u) \in \Xi$.

Підсхему (X', U', R') ССЗР $\hat{Z} := (X, U, R) \in \hat{\mathbb{Z}}$ будемо позначати $\hat{Z}|_{X',\, U'}$.

Означення 5. ***Фрагментом*** *ССЗР* $(X, U, R) \in \hat{\mathbb{Z}}(((X, \succcurlyeq), U, R) \in \hat{\boldsymbol{Z}})$ *називається ССЗР* $(X', U', R') \in \hat{\mathbb{Z}}$ $(((X', \succcurlyeq'), U', R') \in \hat{\boldsymbol{Z}})$, *де* $R' \subseteq R$, $U' = domR'$, $X' = imR'$ $(X' = imR', (X', \succcurlyeq') = (X', \succcurlyeq))$ *і для будь-якого* $u \in U'$ $R'(u) \in \Xi$.

Зауваження 1. *Очевидно, що будь-яка підсхема — фрагмент, але не навпаки.*

Означення 6. ***Підсхемою*** *ССЗР* $((X, \succcurlyeq), U, R) \in \hat{\boldsymbol{Z}}$ *називається ССЗР* $((X', \succcurlyeq'), U', R') \in \hat{\boldsymbol{Z}}$, *де ССЗР* $(X', U', R') \in \hat{\mathbb{Z}}$ *є підсхемою ССЗР* $(X, U, R) \in \hat{\mathbb{Z}}$, *а* $(\succcurlyeq') = (\succcurlyeq|_{X'})$.

Підсхему $((X', \succcurlyeq'), U', R')$ ССЗР $\hat{\mathcal{Z}} := ((X, \succcurlyeq), U, R) \in \hat{\boldsymbol{Z}}$ будемо позначати $\hat{\mathcal{Z}}|_{X',\, U'}$.

Означення 7. ***Правилом вибору переваг*** *(ПВП) для ЗР у класі ССЗР* $\hat{\mathbb{Z}}' \subseteq \hat{\mathbb{Z}}$ *(коротко ПВП в* $\hat{\mathbb{Z}}' \subseteq \hat{\mathbb{Z}}$*) будемо називати будь-яке відображення* $\pi = (\pi_1, \pi_2)$, *визначене на* $\hat{\mathbb{Z}}'$ *і те, яке ставить у відповідність кожній* $\hat{Z} = (X, U, R) \in \hat{\mathbb{Z}}'$ *деяку пару співвідношень* $(X, \succcurlyeq_{\hat{Z}})$ *і* $(U, \succcurlyeq^*_{\hat{Z}})$, *тобто* $\pi = (\pi_1, \pi_2) \in (2^{(X^2)} \times 2^{(U^2)})^{\hat{\mathbb{Z}}'}$, *що будемо позначати також* $\pi_{\hat{Z}} = (\pi_{1\hat{Z}}, \pi_{2\hat{Z}}) = ((X, \succcurlyeq_{\hat{Z}}), (U, \succcurlyeq^*_{\hat{Z}}))$.

Клас усіх ПВП в $\hat{\mathbb{Z}}' \subseteq \hat{\mathbb{Z}}$ будемо позначати $(\hat{\mathbb{Z}}')$.

Зауваження 2. *Кожний ТПР має визначене (своє) ПВП для класу* $\hat{\mathbb{Z}}'$, *яке є моделлю ТПР відносно вирішення ним ЗР в класі* $\hat{\mathbb{Z}}'$. *Знаючи ПВП для* $\hat{\mathbb{Z}}' \subseteq \hat{\mathbb{Z}}$ *довільного ТПР, ми можемо дізнатись його (ТПР) рішення основної ЗПР для* $\hat{Z} \in \hat{\mathbb{Z}}' \subseteq \hat{\mathbb{Z}}$.

Означення 8. ***ПВП*** *в* $\hat{\mathbf{Z}}' \subseteq \hat{\mathbf{Z}}$ *будемо називати всяке відображення* π, *визначене на* $\hat{\mathbf{Z}}'$, *яке ставить у відповідність кожній* $\hat{\mathcal{Z}} = ((X, \succcurlyeq), U, R) \in \hat{\mathbf{Z}}'$ *деяку відповідність* $(U, \succcurlyeq^*_{\hat{\mathcal{Z}}})$, *тобто* $\in [2^{(U^2)}]^{\hat{\mathbf{Z}}'}$, *що будемо позначати також* ${}_{\hat{\mathcal{Z}}} = (U, \succcurlyeq^*_{\hat{\mathcal{Z}}})$. *Клас всіх ПВП в* $\hat{\mathbf{Z}}' \subseteq \hat{\mathbf{Z}}$ *будемо позначати* $\Pi(\hat{\mathbf{Z}}')$.

Для математично коректної (без невизначеності) постановки ЗР (знаходження ПВП) задання лише ССЗР, — за винятком тривіального випадку, коли множина наслідків X і множина рішень U, відповідно, складаються з єдиного елемента, тобто $cardX = cardV = 1$, — недостатньо. Потрібні додаткові дані, що звужують клас ТПР, перед якими стоїть ЗР для даної ССЗР. Наприклад, у випадку, якщо обмежитися класом ТПР, ПВП яких збігаються з деяким ПВП π для довільного класу ССЗР К, що містить дану ССЗР, то для ТПР із цього класу постановка ЗР без невизначеності. У цьому разі ми говоритимемо, що ССЗР класу К без невизначеності в класі ПВП $\Pi'(K) = \{\pi\}$. Це, безумовно, один із крайніх випадків, який є тривіальним і представляє інтерес лише як приклад, коли невизначеності немає. Нетривіальні приклади ССЗР без невизначеності в конкретних класах ПВП ми продемонструємо спочатку на інтуїтивному рівні.

Якщо $\hat{\mathcal{Z}} := ((X, \succeq), u, r) \in \hat{\mathbf{Z}}$ і відповідність R однозначна, тобто є відображенням (див. рис. 2 у кінці тексту), то для більшості невизначеності при порівнянні рішень немає. Таким чином, однозначності відповідності R для більшості *досить*, щоб ЗР для такої ССЗР була математично точно поставлена.

Проте неважко навести приклад багатозначної відповідності R у ССЗР $((X, \succcurlyeq\!\!\!\!/),$ $u, r) \in \hat{\mathbf{Z}}$ з відсутністю для більшості невизначеності. Позначимо

$$\hat{\mathcal{Z}} := ((\{x_1, x_2, x_3\},\\ \{(x_1, x_1), (x_2, x_1), (x_2, x_2)\}), \quad \{u_1, u_2\},\\ \{(u_1, x_1), (u_2, x_2), (u_2, x_3)\}) \in \hat{\mathbf{Z}}$$

(див. рис. 3 у кінці тексту). Цілком природно тут вважати, що u_2 ліпше, ніж u_1. При цьому багатозначна відповідність $R = \{(u_1, x_2), (u_2, x_1), (u_2, x_3)\}$ у ССЗР

$$\hat{\mathcal{Z}} = ((\{x_1, x_2, x_3\}, \{(x_1, x_1), (x_2, x_1),\\ (x_2, x_2)\}), \ \{u_1, u_2\}, \ R) \in \hat{\mathbf{Z}},$$

зображена на рис. 4, вже дає приклад ССЗР з невизначеністю. Насправді, оптиміст вибере дію u_2, а песиміст — u_1.

З іншого боку, проекція ССЗР, зображена на рис. 4 (див. у кінці тексту), у класі $\hat{\mathbb{Z}}$ дає, з тих самих причин, ССЗР:

$$\hat{Z} := (\{x_1, x_2, x_3\}, \quad \{u_1, u_2\},\\ \{(u_1, x_2), (u_2, x_1), (u_2, x_3)\}) \in \hat{\mathbb{Z}}$$

з невизначеністю (див. рис. 5 у кінці тексту).

Дійсно, якщо вибирати ПВП π_1 таким, що x_3 ліпше ніж x_2, x_2 краще за x_1, а x_3 – за x_1, то прийдемо до ССЗР класу $\hat{\mathbf{Z}}$, що на рис. 4, тобто з невизначеністю.

Наступний приклад ССЗР з невизначеністю у класі $\hat{\mathbb{Z}}$ відмінний від попереднього, зображений на рис. 1. Справді, невизначеність у вказаній ССЗР випливає з міркувань симетрії. Дамо точніше визначення поняттю невизначеності в ССЗР.

Означення 9. *Говоритимемо, що ССЗР класу К з* ***невизначеністю відносно першої основної ЗР*** *у класі ПВП П′(К), якщо знайдуться такі ПВП* $\pi', \pi'' \in$ *П′(К), що для цієї ССЗР* $\pi'_1 \neq \pi''_1$.

Як ми зазначали раніше, аналіз невизначеності, що виникає при рішенні *першою основною* ЗР, по суті, стосується психології. Тому безпосередньо нас цікавитиме аналіз невизначеності, що виникає при рішенні *другої основної* ЗР. При цьому ми зовсім не передбачаємо першу основну ЗР вирішеною. Ці міркування ведуть нас до наступного визначення.

Означення 10. *Говоритимемо, що ССЗР класу К з* ***невизначеністю*** *у класі ПВП П′(К)(*Π'*(К)), якщо знайдуться такі ПВП* $\pi', \pi'' \in$ *П′(К) (′,″* $\in \Pi'$*(К)), що для цієї ССЗР* $\pi'_1 = \pi''_1$ *і* $\pi'_2 \neq \pi''_2$ *(n′ ≠n″).*

Зауваження 3. *Очевидно, що якщо ССЗР класу* $\subseteq \mathbb{Z}$ *(* $\subseteq \hat{\mathbb{Z}}$*) з невизначеністю в деякому класі П′(К) (*Π'*(К)), то ця ССЗР також буде з невизначеністю і в ширшому класі, тобто в класі П″(К)⊃ П′(К) (*Π''*(К)⊃* Π'*(К)).*

Інтуїтивно ясно, якщо в якійсь ССЗР класу $\hat{\mathbb{Z}}$ є фрагмент (йому відповідає підграфік) один із типів зображених на рис. 5 або рис. 1, то ця ССЗР для більшості з невизначеністю. Цей факт ми строго доведемо далі (теорема 4).

Природно виникає питання: чи є інші ССЗР класу $\hat{\mathbb{Z}}$ із невизначеністю? Відповідь на це питання для більшості виявляється заперечною. Цей факт також доведений далі (теорема 2).

Розглянемо докладніше визначення невизначеності у непараметричних СЗР.

Означення 11. *Говоритимемо, що ССЗР* Z *будь-якого класу* $\hat{\mathbb{Z}}' \subseteq \hat{\mathbb{Z}}$ ***з невизначеністю щодо першої основної ЗР*** *у класі ПВП* $'(\widehat{\mathbb{Z}'})$, *якщо знайдуться такі ПВП* $\pi', \pi'' \in {}'(\widehat{\mathbb{Z}'})$, *що* $\pi'_{1z} \neq \pi''_{1z}$.

Означення 12. *Говоритимемо, що ССЗР* Z *будь-якого класу* $\hat{\mathbb{Z}}' \subseteq \hat{\mathbb{Z}}$ $(\hat{\mathbf{Z}}' \subseteq \hat{\mathbf{Z}})$ ***із невизначеністю*** *у класі ПВП* $'(\hat{\mathbb{Z}}')(\Pi'(\hat{\mathbf{Z}}'))$, *якщо знайдуться такі ПВП* $\pi', \pi'' \in {}'(\hat{\mathbb{Z}}')$ $(',\!'' \in \Pi'(\hat{\mathbf{Z}}'))$, *що* $\pi'_{1z} = \pi''_{1z}$ *і* $\pi'_{2z} \neq \pi''_{2z}$ $({}'_Z \neq {}''_Z)$.

Далі, для того, щоб уточнити значення слів «для більшості», введемо в розгляд для всякого нестрогого порядку $(X, \succcurlyeq)$ його продовження (розширення) на множину $2^X \setminus \emptyset$, позначаючи це продовження тим же символом $(\succcurlyeq)$. Для будь-якої непорожньої множини $X', X'' \in 2^X$

$$X' \succcurlyeq X'' \stackrel{def}{\Longleftrightarrow}$$
$$\stackrel{def}{\Longleftrightarrow} x' \succcurlyeq x'' \ \ \forall x' \in X', \ \ \forall x'' \in X''. \quad (3)$$

Зрозуміло, що відповідність $(2^X, \succ)$ буде строгим частковим порядком.

Лема 1. *Якщо відношення переваг* $(X, \succcurlyeq)$ *— нестрогий порядок, а* A, B *— пара незв'язних відношенням* $(\succcurlyeq)$ *підмножин множини* X, *тобто* $A \not\succcurlyeq B$, $B \not\succcurlyeq A$, *то знайдеться по парі точок (можливо рівних)* x_1, x_2 *і* y_1, y_2 *з кожної множини вказаної пари множин, які або* $y_2 \succ x_1 \succ y_1$, *або* $x_1 \sim y_1$, $x_2 \sim y_2$ *і* $x_1 \neq x_2$.

Доведення. З умови $A \not\succcurlyeq B$ $B \not\succcurlyeq A$, за співвідношенням (2.2.1) випливає, що знайдуться такі $a, a'' \in A$ і $b, b'' \in B$, що $b \succ a$, а $a'' \succ b''$. Розглянемо всі можливі і взаємозаперечні варіанти співвідношень порядку $(\succcurlyeq)$ між елементами a, a'', b, b'' і залежно від цього вкажемо точки x_1, x_2, y_1, y_2.

Якщо $b'' \succcurlyeq b$, то покладемо $y_2 = a'$, $x_1 = b'$ (або b) $y_1 = a$. Тоді отримаємо, що $y_2 \succ x_1 \succ y_1$, — і твердження леми справедливе.

Якщо $b \succ b'$ і $a \succ b'$, то покладемо $y_2 = b$, $x_1 = $, $y_1 = b'$. Тоді отримаємо, що $y_2 \succ x_1 \succ y_1$, і твердження леми також справедливе.

Якщо $b \succ b'$ $a \sim b'$ і $a' \sim b$. Тоді покладемо $y_2 = a'$, $x_1 = b$, $y_1 = a$. Звідси — $y_2 \succ x_1 \succ y_1$, і твердження леми знову справедливе.

Якщо $b \succ b'$ $a \sim b'$ і $a' \sim b$, то покладемо $x_1 = {}'$ $x_2 = $ $y_1 = b$, $y_2 = b'$. Тоді отримаємо, що $x_1 \succ y_1$ і $x_2 \succ y_2$. Твердження леми і в цьому випадку залишається справедливим.

Нарешті, (внаслідок того, що $(X, \succcurlyeq)$ — нестрогий порядок) якщо $b \succ b'$, $\sim b'$ і $b \succ a'$, то покладемо $y_2 = b$, $x_1 = a'$, $y_1 = b'$. Тоді отримаємо, що $y_2 \succ x_1 \succ y_1$, і отже, твердження леми також справедливе.

Лему доведено.

Окрім того, через $\mathbf{Z}_0$ $(\hat{\mathbf{Z}}_0)$ позначимо підклас таких ССЗР $\mathcal{Z} := ((X, \succcurlyeq_{\mathcal{Z}}), \Theta, U, g)$ $(\hat{\mathcal{Z}} := ((X, \succcurlyeq_{\hat{\mathcal{Z}}}), U, R))$ класу $\mathbf{Z}(\hat{\mathbf{Z}})$, у яких $(X, \succcurlyeq_{\mathcal{Z}})$ $((X, \succcurlyeq_{\hat{\mathcal{Z}}}))$ є нестрогим порядком.

Нарешті, для будь-якого підкласу ССЗР $\hat{\mathbf{Z}}'$ класу $\hat{\mathbf{Z}}$ через $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}')$ позначимо всі такі ПВП класу $\hat{\mathbf{Z}}'$, що для будь-якої ССЗР $\hat{\mathcal{Z}} := ((X, \succcurlyeq), U, R) \in \hat{\mathbf{Z}}'$ виконуються такі умови:

X1. $(U, \succcurlyeq^*)$ — нестрогий порядок.

X2. Для будь-яких $u_1, u_2 \in U$:

— якщо $R(u_1) \succ R(u_2)$, то $u_1 \succ^* u_2$,

— якщо $R(u_1) \sim R(u_2)$, то $u_1 \sim^* u_2$.

Означення 13. *ССЗР класу* $\hat{\boldsymbol{Z}}' \subseteq \hat{\boldsymbol{Z}}$ *з невизначеністю в класі ПВП* $\Pi_1(\hat{\boldsymbol{Z}}')$ *називається* ***елементарним фрагментом*** *для* $\Pi_1(\hat{\boldsymbol{Z}}')$, *якщо будь-який фрагмент цієї ССЗР буде без невизначеності (тобто не буде з невизначеністю) у класі ПВП* $\Pi_1(\hat{\boldsymbol{Z}}')$.

Лема 2. *В елементарному фрагменті для* $\Pi_1(\hat{\boldsymbol{Z}}_0)$ *множина рішень складається з двох елементів.*

Доведення. Твердження леми є безпосереднім наслідком визначення бінарного відношення. Точніше з того, що будь-яке бінарне відношення R на множині U визначається всіма бінарними відносинами вигляду $R|_{\{u_1, u_2\}}$, де $u_1, u_2 \in U$.

Лему доведено.

Лема 3. *ССЗР класу* $\hat{\mathbf{Z}}$, *ізоморфні в класі* $\hat{\mathbf{Z}}$ *ССЗР :*

— $((\{x_1, x_2, y_1, y_2\}, \{(x_1, x_1), (x_1, y_1), (y_1, x_1), (y_1, y_1), (x_2, x_1), (x_2, y_1), (x_2, x_2), (x_2, y_2), (y_2, x_1), (y_2, y_1), (y_2, x_2), (y_2, y_2)\}), \{u_1, u_2\}, \{(u_1, x_1), (u_1, x_2), (u_2, y_1), (u_2, y_2)\}),$

– $((\{x_1, x_2, y\}, \{(x_1, x_1), (y, x_1), (y, y), (y, x_2), (x_2, x_1), (x_2, y), (x_2, x_2)\}, \{u_1, u_2\}, \{(u_1, x_1), (u_1, y), (u_2, x_1), (u_2, y)\})$,

– $((\{x_1, x_2\}, \{(x_1, x_1), (x_2, x_1), (x_2, x_2)\}, \{u_1, u_2\}, \{(u_1, x_1), (u_1, x_2), (u_2, x_1), (u_2, x_2)\})$,

– $((\{x_1, x_2, x_3\}, \{(x_1, x_1), (x_2, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_1), (x_3, x_2), (x_3, x_3)\}), \{u_1, u_2\}, \{(u_1, x_1), (u_1, x_3), (u_2, x_2)\})$,

*які, відповідно, називаються схемами **типу I–IV** (див. рис. 6–9), є елементарними фрагментами для* $\Pi_1(\hat{\boldsymbol{Z}}_0)$.

Доведення. Те, що схеми типу I–IV належать класу ССЗР $\hat{\mathbf{Z}}_0$ випливає з того, що відношення переваг на множинах їх наслідків є нестрогими порядками.

Для будь-якої схеми типу I–IV $\mathcal{Z} := ((X, \succcurlyeq), U, R) \in \hat{\mathbf{Z}}_0$ як відношення переваг на множині рішень $U = \{u_1, u_2\}$ через незв'язність відповідності $(2^X, \succcurlyeq)$ елементів $R(u_1)$ та $R(u_2)$ можна, не порушуючи умови $X2$, вибрати будь-який нестрогий порядок, наприклад: $(U, \succcurlyeq^*) := (\{u_1, u_2\}, \{(u_1, u_1), (u_2, u_1), (u_2, u_2)\})$ і $(U, \succcurlyeq^{**}) := (\{u_1, u_2\}, \{(u_1, u_1), (u_1, u_2), (u_2, u_2)\})$. Оскільки $(U, \succcurlyeq^*) \neq (U, \succcurlyeq^{**})$, то ССЗР $\mathcal{Z}$ буде з невизначеністю в класі $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_0)$.

А те, що будь-який фрагмент цих ССЗР буде без невизначеності в класі ПВП $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_0)$, легко перевірити безпосередньо, спираючись на умови X1 і X2.

Лему доведено.

Фрагмент ССЗР, що є схемою одного з типів I–IV також називатимемо фрагментом відповідного типу I–IV.

Означення 14. *Система елементарих фрагментів для* $\Pi_1(\hat{\boldsymbol{Z}}_0)$ *називається **повною**, якщо будь-який елементарний фрагмент для* $\Pi_1(\hat{\boldsymbol{Z}}_0)$ *ізоморфний у класі* $\hat{\boldsymbol{Z}}$ *якомусь представникові цієї системи.*

Теорема 4. *Повна система елементарних фрагментів для* $\Pi_1(\hat{\boldsymbol{Z}}_0)$ *складається з фрагментів типу I–IV.*

Доведення. Нехай $\Phi := ((X, \succcurlyeq), U, R)$ є елементарним фрагментом для $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}'_0)$. Тоді через лему 2 множина рішень в Φ складається з двох елементів, тобто $U = \{u_1, u_2\}$.

Якщо множини $R(u_1)$ і $R(u_2)$ порівняні відносно $(X, \succcurlyeq)$, то з умови $X1$ випливає, що на $U = \{u_1, u_2\}$ визначено, за умовою $X2$, відношення переваг $(U, \succcurlyeq^*)$. А це суперечить елементарності фрагмента Φ.

Якщо ж $R(u_1)$ і $R(u_2)$ незв'язані співвідношенням $(\succcurlyeq)$, то, за лемою 1, через умову $X1$ у фрагменті Φ знайдеться підфрагмент вигляду: $((\{x_1, x_2, x_3\}, \{(x_1, x_1), (x_2, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_1), (x_3, x_2), (x_3, x_3)\}), \{u_1, u_2\}, \{(u_1, x_1), (u_1, x_3), (u_2, x_2)\})$; або вигляду $((\{x_1, x_2, y_1, y_2\}, \{(x_1, x_1), (x_1, y_1), (y_1, y_1), (x_2, x_1), (x_2, y_1), (x_2, x_2), (x_2, y_2), (y_2, x_1), (y_2, y_1), (y_2, x_2), (y_2, y_2)\}), \{u_1, u_2\}, \{(u_1, x_1), (u_1, x_2), (u_2, y_1), (u_2, y_2)\})$, якщо $x_1 \neq y_1$, $x_2 \neq y_2$ або вигляду $((\{x_1, x_2, y\}, \{(x_1, x_1), (x_1, y), (y, x_1), (y, y), (x_2, x_1), (x_2, y), (x_2, x_2)\}, \{u_1, u_2\}, \{(u_1, x_1), (u_1, x_2), (u_2, y), (u_2, x_2)\})$, якщо $x_1 \neq y_1, x_2 = y_2$; — вигляду $((\{x_1, x_2, y\}, \{(x_1, x_1), (y, x_1), (y, y), (y, x_2), (x_2, x_1), (x_2, y), (x_2, x_2)\}, \{u_1, u_2\}, \{(u_1, x_1), (u_1, y), (u_2, x_1), (u_2, y)\})$, якщо $x_1 = y_1$, $x_2 \neq y_2$; — вигляду $((\{x_1, x_2, x_3\}, \{(x_1, x_1), (x_2, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_1), (x_3, x_2), (x_3, x_3)\}), \{u_1, u_2\}, \{(u_1, x_1), (u_1, x_3), (u_2, x_2)\})$, якщо $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$.

А оскільки Φ є елементарним фрагментом для $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_0)$, то, за лемою 2.2.3, Φ буде фрагментом одного з типів I–IV.

При цьому зрозуміло, що $((\{x_1, x_2, y\}, \{(x_1, x_1), (x_1, y), (y, x_1), (y, y), (x_2, x_1), (x_2, y), (x_2, x_2)\}, \{u_1, u_2\}, \{(u_1, x_1), (u_1, x_2), (u_2, y), (u_2, x_2)\}) \approx^{\hat{\mathbf{Z}}}$ $\approx^{\hat{\mathbf{Z}}}$ $((\{x_1, x_2, y\}, \{(x_1, x_1), (y, x_1), (y, y), (y, x_2), (x_2, x_1), (x_2, y), (x_2, x_2)\}, \{u_1, u_2\}, \{(u_1, x_1), (u_1, y), (u_2, x_1), (u_2, y)\})$, оскільки біекція $\{x_1, x_2, y\}$ в себе : $x_i \to x_j$, $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2\}$, $y \to y$ зберігає переваги $(\{x_1, x_2, y\}, \{(x_1, x_1),$

$(x_1, y), (y, x_1), (y, y), (x_2, x_1), (x_2, y), (x_2, x_2)\}), \quad (\{x_1, x_2, y\}, \{(x_1, x_1), (y, x_1), (y, y), (y, x_2), (x_2, x_1), (x_2, y), (x_2, x_2)\})$.

Теорему доведено.

Наслідок 1. *Схеми типу I–IV і лише вони є елементарними фрагментами для* $\Pi_1(\hat{\boldsymbol{Z}}_0)$.

Доведення безпосередньо випливає з леми 3 і доведення теореми 1.

Означення 15. *Система неізоморфних у класі* $\hat{\boldsymbol{Z}}$ *елементарних фрагментів для* $\Pi_1(\hat{\boldsymbol{Z}}_0)$ *називається* ***базою невизначеності фрагментів*** *ССЗР класу* $\hat{\boldsymbol{Z}}_0' \subseteq \hat{\boldsymbol{Z}}_0$, *якщо будь-яка ССЗР класу* $\hat{\boldsymbol{Z}}_0'$ *з невизначеністю у* $\Pi_1(\hat{\boldsymbol{Z}}_0')$ *має фрагмент, ізоморфний у класі* $\hat{\boldsymbol{Z}}$ *якомусь представникові цієї системи.*

Надалі фактор-множина множини X за відношенням еквівалентності $(\sim)$ позначатимемо через $\widetilde{X}$, тобто $\widetilde{X} := X \diagup_{(\sim)}$. А елементи множини $\widetilde{X}$ позначатимемо через $\widetilde{x}$, де $x \in X$ є довільним представником класу еквівалентності $\widetilde{X}$.

Теорема 5. *Будь-яка ССЗР будь-якого класу* $\hat{\boldsymbol{Z}}_0' \subseteq \hat{\boldsymbol{Z}}_0$ *з невизначеністю в класі ПВП* $\Pi_1(\hat{\boldsymbol{Z}}_0')$ *містить фрагмент одного з типів I–IV.*

Доведення. З визначення невизначеності ССЗР $\mathcal{Z} := ((X, \succcurlyeq), U, R) \in \hat{\mathbf{Z}}_0'$ випливає, що знайдуться такі ПВП $', '' \in \Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_0')$, для яких справджується співвідношення $(U, \succcurlyeq^*) := '_{\mathcal{Z}} \neq ''_{\mathcal{Z}} =: (U, \succcurlyeq^{**})$.

Якщо позначати через $\widetilde{X}$ фактор-множину множини X за відношенням еквівалентності $(\sim)$ (через те, що $(X, \succcurlyeq)$ — нестрогий порядок), то через $\widetilde{R}$ позначимо таким чином визначене відношення з U $\widetilde{X}$. Для будь-яких $u \in U$ і $x \in X$:

$$u\widetilde{R}\widetilde{x} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \quad x \in X, \quad uRx. \qquad (4)$$

У множині $\widetilde{X}$ визначимо відношення $(\succcurlyeq')$ для будь-яких $\widetilde{x_1}, \widetilde{x_2} \in \widetilde{X}$, вважаючи, що

$$\widetilde{x_1} \succcurlyeq' \widetilde{x_2} \overset{def}{\Longleftrightarrow} x_1 \succcurlyeq x_2. \qquad (5)$$

Через те, що $(X, \succcurlyeq)$ — нестрогий порядок, то дане визначення коректне і $(\widetilde{'X}, \succcurlyeq)$ буде лінійним порядком (див., наприклад, [3], теорема 2.1).

Лема 4. *Для будь-яких* $u_1, u_2 \in U$

$$\widetilde{R}(u_1) \succcurlyeq' \widetilde{R}(u_2) \Longleftrightarrow R(u_1) \succcurlyeq R(u_2).$$

Доведення. Згідно з співвідношенням (3), для будь-яких $u_1, u_2 \in U$

$\widetilde{R}(u_1) \succcurlyeq' \widetilde{R}(u_2) \Leftrightarrow \forall \widetilde{x_1} \in \widetilde{R}(u_1), \forall \widetilde{x_2} \in \widetilde{R}(u_2) \quad \widetilde{x}_1 \succcurlyeq' \widetilde{x}_2$.

Але тоді зі співвідношень (4) і (5) випливає, що для будь-яких $u_1, u_2 \in U$ $\widetilde{R}(u_1) \succcurlyeq' \widetilde{R}(u_2) \Leftrightarrow \forall x_1 \in R(u_1), \forall x_2 \in R(u_2) \quad x_1 \succcurlyeq x_2$, а значить, за співвідношенням (3), маємо, що для будь-яких $u_1, u_2 \in U$

$$\widetilde{R}(u_1) \succcurlyeq' \widetilde{R}(u_2) \Longleftrightarrow R(u_1) \succcurlyeq R(u_2).$$

Лему доведено.

Тепер покажемо, що знайдуться такі різні $u_1, u_2 \in U$ для яких відповідність $\widetilde{R}|_{\{u_1, u_2\}}$ буде багатозначним і при цьому виконуватиметься співвідношення

$$u_1 \succcurlyeq^* u_2, \;\; u_2 \succ^{**} u_1. \qquad (6)$$

Припустимо протилежне, тобто, яка для будь-якої пари $u_1, u_2 \in U$, що задовольняє співвідношенню (6), відповідність $\widetilde{R}|_{\{u_1, u_2\}}$ буде відображенням $\{u_1, u_2\}$ у $\widetilde{X}$. У такому разі, для $u_1, u_2 \in U$, що задовольняють співвідношенню (6), буде справедливим співвідношення

$$u_1 \succcurlyeq^* u_2 \Longleftrightarrow \widetilde{R}(u_1) \succcurlyeq' \widetilde{R}(u_2) \Longleftrightarrow \\ \Longleftrightarrow u_1 \succcurlyeq^{**} u_2. \quad (7)$$

Насправді, якщо $u_1 \succcurlyeq^* u_2$ ($u_1 \succcurlyeq^{**} u_2$), а $\widetilde{R}(u_1) \;\overline{\succcurlyeq'}\; \widetilde{R}(u_2)$, що через однозначність відповідності $\widetilde{R}|_{\{u_1, u_2\}}$ і того, що $(\widetilde{'X}, \succcurlyeq)$ — лінійний порядок, рівносильно співвідношенню $\widetilde{R}(u_1) \succ'$

$\widetilde{R}(u_2)$. Отже, за лемою 2.2.4, $R(u_2) \succ R(u_1)$. Тоді, враховуючи умову $X2$ на $'i\,''$, маємо, що $u_2 \succ^* u_1$ ($u_2 \succ^{**} u_1$). А це через умову $X1$ на $'i\,''$ суперечить співвідношенню $u_1 \not\succcurlyeq^* u_2$ ($u_1 \not\succcurlyeq^{**} u_2$). Значить, $\widetilde{R}(u_1) \not\succcurlyeq' \widetilde{R}(u_2)$.

Покажемо справедливість співвідношення (7) у зворотній бік. Якщо $\widetilde{R}(u_1) \not\succcurlyeq' \widetilde{R}(u_2)$, то, за лемою 2.2.4, $R(u_1) \not\succcurlyeq R(u_2)$. Звідси через умову $X2$ на $'\ \ ''$ отримаємо, що $u_1 \not\succcurlyeq^* u_2$ ($u_1 \not\succcurlyeq^{**} u_2$). Але, відповідно до умови $X1$ на $'\ \ ''$, співвідношення (7) суперечить співвідношенню (6).

Таким чином, дійсно знайдуться такі різні $u_1, u_2 \in U$, для яких відповідність $\widetilde{R}|_{\{u_1,u_2\}}$ буде багатозначною і при цьому виконуватиметься умова (6).

У такому випадку, у ССЗР $\widetilde{\mathcal{Z}} := ((\widetilde{X}, \not\succcurlyeq'), U, \widetilde{R}) \in \hat{\mathbf{Z}}_0$ обов'язкова наявність або фрагмента вигляду: $((\{\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2\}, \{(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_1), (\widetilde{x}_2, \widetilde{x}_1), (\widetilde{x}_2, \widetilde{x}_2)\}, \{u_1, u_2\}, \{(u_1, x_1), (u_1, x_2), (u_2, x_1), (u_2, x_2)\})$ (див. рис. 10 у кінці тексту) і тоді ССЗР $\mathcal{Z}$ містить фрагмент одного з типів I—III і теорему доведено, або підсхему ССЗР $\widetilde{\mathcal{Z}}$ вигляду $((\{\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2\}, \{(x_1, x_1), (x_2, x_1), (x_2, x_2)\}, \{u_1, u_2\}, \{(u_1, \widetilde{x}_1), (u_2, \widetilde{x}_1), (u_2, \widetilde{x}_2)\})$ (див. рис. 11 у кінці тексту).

Тоді, якщо $\{x \in R(u_2) :\ x_1 \succ x\} \neq \varnothing$, то ССЗР $\mathcal{Z}$ містить фрагмент типу IV і теорему доведено. Якщо $\{x \in R(u_1) :\ x \succ x_1\} \neq \varnothing$, то ССЗР $\mathcal{Z}$ також містить фрагмент типу IV і теорему доведено. Інакше, тобто якщо $\{x \in R(u_2) :\ x_1 \succ x\} = \varnothing$ і $\{x \in R(u_1) :\ x \succ x_1\} = \varnothing$, то $R(u_2) \succ R(u_1)$, що є суперечливим, через умову $X2$ для $'$, співвідношенню $u_1 \not\succcurlyeq^* u_2$.

Теорему повністю доведено.

Теорема 6. *База невизначеності фрагментів ССЗР будь-якого класу $\hat{\boldsymbol{Z}}_0' \subseteq \hat{\boldsymbol{Z}}_0$ порожня, якщо цей клас не містить ССЗР з невизначеністю в класі ПВП $\Pi_1(\hat{\boldsymbol{Z}}_0')$, і складається з елементів в кількості від одного до чотирьох інакше.*

Доведення. Випливає з наслідку 1 і теореми 2.

Інтуїтивно здається правдоподібним твердження зворотне до сформульованого у теоремі 2. Це так, і вказаний факт ми представимо у вигляді наступної теореми.

Теорема 7. *Якщо ССЗР будь-якого класу $\hat{\boldsymbol{Z}}'_0 \subseteq \hat{\boldsymbol{Z}}_0$ містить фрагмент одного з типів I—IV, то ця ССЗР з невизначеністю в класі ПВП $\Pi_1(\hat{\boldsymbol{Z}}_0')$.*

Доведення. Хай ССЗР

$$\mathcal{Z} := ((X, \not\succcurlyeq), U, R) \in \hat{\mathbf{Z}}_0'$$

містить фрагмент одного з типів I—IV і $\{u_1, u_2\}$, де $u_1, u_2 \in U$, є множиною множини рішень цього фрагмента. Тоді множини $R(u_1)$ і $R(u_2)$ незв'язні відповідністю $(X, \not\succcurlyeq)$ розширеним на множину 2^X, що випливає зі співвідношення (3), тобто $R(u_1) \overline{\not\succcurlyeq} R(u_2)$ і $R(u_2) \overline{\not\succcurlyeq} R(u_1)$. До того ж, асиметрична складова цього розширення, тобто $(2^X, \succ)$, є строгим частковим порядком.

Визначимо пару відповідностей $(2^{'}X, \succ)$ і $(2^{'}X, \succ')$ таким чином. Для будь-яких множин $A, B \in 2^X$ покладемо

$$A \succ' B \overset{def}{\Longleftrightarrow} A \succ B \quad \text{або } (A \not\succcurlyeq R(u_1)\ i\ R(u_2) \not\succcurlyeq B) \tag{8}$$

і

$$A \succ'' B \overset{def}{\Longleftrightarrow} A \succ B \quad \text{або } (A \not\succcurlyeq R(u_2)\ i\ R(u_1) \not\succcurlyeq B). \tag{9}$$

Ясно, що $R(u_1) \succ' R(u_2)$ і $R(u_2) \succ'' R(u_1)$. Покажемо, що відповідності $(2^{'}X, \succ)$ і $(2^{'}X, \succ')$ є строгими частковими порядками. З міркувань симетрії доказ досить провести, наприклад, для відповідності $(2^{'}X, \succ)$.

Спочатку покажемо нерефлексивність відповідності $(2^{'}X, \succ)$, міркуючи від супротивного. Припустимо, що $A \succ' A$, де $A \in 2^X$. Тоді, через співвідношення (8) $A \not\succcurlyeq R(u_1)$ і $R(u_2) \not\succcurlyeq A$. Отже, за транзитивністю відповідності $(2^X, \not\succcurlyeq)$, $R(u_2) \not\succcurlyeq$

$R(u_1)$, що суперечить незв'язності цих множин співвідношенням $(2^X, \succcurlyeq)$.

Покажемо тепер транзитивність відповідності $(2^{'}X, \succ)$. Припустимо, що $A \succ' B$ і $B \succ' C$, де множини $A, B, C \in 2^X$. Тоді розглянемо всі можливі варіанти:

– якщо $A \succ B$ і $B \succ C$, то $A \succ$, через транзитивність відповідності $(2^X, \succ)$. Звідки, за співвідношенням (8), маємо, що $A \succ'$;

– якщо $A \succ B$, $B \succcurlyeq R(u_1)$ і $R(u_2) \succcurlyeq C$, то через транзитивність відповідності $(2^X, \succcurlyeq)$ маємо $A \succ R(u_1)$. Тоді згідно з співвідношенням (8) $A \succ'$;

– якщо $A \succcurlyeq R(u_1)$, $R(u_2) \succcurlyeq B$ і $B \succ C$, то, як і вище, $R(u_2) \succ C$ і тоді через співвідношення (8) $A \succ' C$;

– і нарешті, варіант, що залишився, — умови $A \succcurlyeq R(u_1)$, $R(u_2) \succcurlyeq B$ $B \succcurlyeq R(u_1)$ і $R(u_2) \succcurlyeq C$, які несумісні, оскільки з них випливає (за транзитивністю), що $R(u_2) \succcurlyeq R(u_1)$, а це протирічить незв'язності множин $R(u_1)$ *і* $R(u_2)$ відповідністю $(2^X, \succcurlyeq)$.

Тепер, використавши теорему Шпільрайна (див [4]), продовжимо строгі часткові порядки $(2^{'}X, \succ)$ і $(2^{'}X, \succ')$ до строгих порядків, які позначимо $(2^X, \succ_0')$ і $(2^X, \succ_0'')$. Тоді їх звуження на множину $\{R(u) : u \in U\}$ визначають лінійні порядки, які ми позначатимемо відповідно через $(U, \succcurlyeq_0')$ і $(U, \succcurlyeq_0'')$.

Визначимо ПВП π', $\pi'' \in \Pi(\hat{\mathbf{Z}}_0^{'})$ таким чином, що для всіх ССЗР $\mathcal{Z}' \in \hat{\mathbf{Z}}'_0$, нерівних ССЗР $\mathcal{Z}$, $\pi'_{\mathcal{Z}'} \overset{def}{=} \pi''_{\mathcal{Z}''} \overset{def}{=} (U, U^2)$. А для ССЗР $\mathcal{Z}$ $\pi'_{\mathcal{Z}} := (U, \succcurlyeq_0'), \pi''_{\mathcal{Z}} := (U, \succcurlyeq_0'')$. Тоді за побудовою π', $\pi'' \in \Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_0^{'})$ і $\pi'_{\mathcal{Z}} \neq \pi''_{\mathcal{Z}}$, тобто ССЗР $\mathcal{Z}$ з невизначеністю у класі ПВП $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_0^{'})$.

Теорему доведено.

Як безпосередній наслідок теореми 2 і теореми 4 ми отримуємо **критерій невизначеності ССЗР** у класі $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_0^{'})$ у термінах фрагментів:

ССЗР будь-якого класу $\hat{\mathbf{Z}}'_0 \subseteq \hat{\mathbf{Z}}_0$ з невизначеністю у класі ПВП $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_0^{'})$ тоді і тільки тоді, коли вона містить хоч би один із фрагментів типу I—IV.

Якщо через $\mathbf{Z}_1(\hat{\mathbf{Z}}_1)$ позначити підклас таких ССЗР $\mathcal{Z} := ((X, \succcurlyeq_{\mathcal{Z}}), \Theta, U, g)$ $(\hat{\mathcal{Z}} := ((X, \succcurlyeq_{\hat{\mathcal{Z}}}), U, R))$ класу $\mathbf{Z}(\hat{\mathbf{Z}})$, у яких $(X, \succcurlyeq_{\mathcal{Z}}\ )$ $(X, \succcurlyeq_{\hat{\mathcal{Z}}})$ — лінійний порядок, то ясно, що $\mathbf{Z}_1 \subseteq \mathbf{Z}_0$ $(\hat{\mathbf{Z}}_1 \subseteq \hat{\mathbf{Z}}_0)$ і критерій невизначеності ССЗР в класі ПВП $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_1^{'})$ у термінах фрагментів має такий вигляд:

ССЗР класу $\hat{\mathbf{Z}'}_1 \subseteq \hat{\mathbf{Z}}_1$ з невизначеністю в класі ПВП $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_1^{'})$ тоді і тільки тоді, коли вона містить хоча б один із фрагментів типу III або типу IV.

За аналогією з поняттям елементарного фрагмента введемо поняття елементарної схеми.

Означення 16. *ССЗР класу* $\hat{\boldsymbol{Z}}_0$ *з невизначеністю в класі ПВП* $\Pi_1(\hat{\boldsymbol{Z}}_0)$ *називається* ***елементарною схемою*** *для* $\Pi_1(\hat{\boldsymbol{Z}}_0)$, *якщо її будь-яка підсхема буде без невизначеності в класі* $\Pi_1(\hat{\boldsymbol{Z}}_0)$.

Зрозуміло, що елементарний фрагмент буде елементарною схемою, але, взагалі кажучи, зворотне не правильне.

Лема 5. *В елементарній схемі для* $\Pi_1(\hat{\boldsymbol{Z}}_0)$ *множина рішень складається з двох елементів.*

Доведення. Хай ССЗР

$$\mathcal{Z} := ((X, \succcurlyeq), U, R) \in \hat{\mathbf{Z}}_0$$

є елементарною схемою. Тоді, за теоремою 2, ССЗР $\mathcal{Z}$ містить елементарний фрагмент. Звідси, згідно з лемою 2.2.5, множина рішень цього елементарного фрагмента складається з двох елементів. Припустимо, що це будуть $u_1, u_2 \in U$. Тоді, за теоремою 4, ССЗР $\overline{\mathcal{Z}} := ((X, \succcurlyeq), \{u_1, u_2\}, R|_{\{u_1, u_2\}}) \in \hat{\mathbf{Z}}_0$ буде з невизначеністю в класі ПВП $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_0)$ і є підсхемою ССЗР $\mathcal{Z}$. Отже $\mathcal{Z} = \overline{\mathcal{Z}}$.

Лему доведено.

Лема 6. *ССЗР класу* $\hat{\boldsymbol{Z}}$, *ізоморфні в класі* $\hat{\boldsymbol{Z}}$ *або одному з фрагментів типу I—IV (див. рис. 6—9 в кінці тексту), або одній з ССЗР:*

— $((\{x_1, x_2, x_3\}, \{(x_1, x_1), (x_2, x_1), (x_3, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_2), (x_3, x_3)\}), \{u_1, u_2\}, \{(u_1, x_1), (u_1, x_3), (u_2, x_1), (u_2, x_2)\})$;

— $((\{x_1, x_2, x_3\}, \{(x_1, x_1), (x_2, x_1), (x_3, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_2), (x_3, x_3)\}), \{u_1, u_2\}, \{(u_1, x_1), (u_1, x_2), (u_1, x_3), (u_2, x_2)\})$,

які називають відповідно схемами типу I—VI (для схем типу V і VI див. рис. 12 і 13 у кінці тексту), є елементарними схемами для $\Pi_1(\hat{\boldsymbol{Z}}_0)$.

Доведення. За лемою 3, лему 6 достатньо довести для схем типу V і VI. При цьому доказ невизначеності схем типу V і VI та належності до класу $\mathbf{Z}_0$ дослівно побудують доведення невизначеності схем типу I–IV і належності до класу $\hat{\mathbf{Z}}_0$ у доведенні леми 3.

А те, що будь-яка підсхема цих ССЗР буде без невизначеності в класі ПВП $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_0)$, легко перевірити безпосередньо, за визначенням.

Лему доведено.

Означення 17. *Система елементарних схем для* $\Pi_1(\hat{\boldsymbol{Z}}_0)$ *називається* ***повною****, якщо будь-яка елементарна схема для* $\Pi_1(\hat{\boldsymbol{Z}}_0)$ *ізоморфна якомусь представникові цієї системи.*

Теорема 8. *Повна система елементарних схем для* $\Pi_1(\hat{\boldsymbol{Z}}_0)$ *складається з схем типів I—VI.*

Доведення. Нехай ССЗР $\mathcal{Z}$ є елементарною для $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_0)$. Тоді, за теоремою 2, до неї належить хоча б один із фрагментів типу I–IV.

Якщо до ССЗР $\mathcal{Z}$ належить фрагмент типу III, то він є підсхемою ССЗР $\mathcal{Z}$ з невизначеністю в класі ПВП $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_0)$. У цьому випадку ССЗР $\mathcal{Z}$ через її елементарність співпадає із фрагментом типу III.

Якщо до ССЗР $\mathcal{Z}$ належить фрагмент одного з типів I або II, то підсхема ССЗР $\mathcal{Z}$ визначена множинами наслідків і рішень, співпадаючих з відповідними множинами цього фрагмента, або збігається з цим фрагментом, або містить фрагмент типу III. Тому, в цьому випадку ССЗР $\mathcal{Z}$ через її елементарність, збігається з одним із фрагментів типу I–III.

Якщо ж ССЗР $\mathcal{Z}$ належить фрагмент типу IV, то підсхема ССЗР $\mathcal{Z}$, визначена множиною наслідків і рішень, що співпадає з відповідною множиною цього фрагмента, може мати вигляд будь-якого фрагмента і ССЗР $\overline{\mathcal{Z}} := ((\{x_1, x_2, x_3\}, \{(x_1, x_1), (x_2, x_1), (x_3, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_2), (x_3, x_3)\}), \{u_1, u_2\}, \{(u_1, x_1), (u_1, x_2), (u_1, x_3), (u_2, x_1), (u_2, x_2), (u_2, x_3)\})$ (див. рис.14 у кінці тексту), що містить підфрагмент одного з типів I–IV. Але наявність фрагмента одного з типів I–III вже розглянуто, отже можна вважати, що це буде фрагмент типу IV (його можна вибрати з ССЗР $\mathcal{Z}$ двома способами), можливо доповнений однією, двома або трьома крапками з $\{u_1, u_2\} \times \{x_1, x_2, x_3\}$. Доповнення двома або трьома крапками призводить до наявності фрагмента типу III, що вже розглянуто. А доповнивши фрагмент типу IV у ССЗР $\overline{\mathcal{Z}}$ однією крапкою, отримаємо ССЗР ізоморфну у класі $\hat{\mathbf{Z}}$ одній із схем типу V або VI.

Теорему доведено.

Наслідок 2. *Схеми типів I—VI і лише вони є елементарними схемами для* $\Pi_1(\hat{\boldsymbol{Z}}_0)$.

Доведення. Безпосередньо випливає з леми 6 і доведення теореми 5.

Означення 18. *Система неізоморфних у класі* $\hat{\boldsymbol{Z}}$ *елементарних схем для* $\Pi_1(\hat{\boldsymbol{Z}}_0)$ *називається* ***базою невизначеності схем*** *для класу* $\hat{\boldsymbol{Z}}'_0 \subseteq \hat{\boldsymbol{Z}}_0$, *якщо будь-яка ССЗР класу* $\hat{\boldsymbol{Z}}'_0$ *з невизначеністю в* $\Pi_1(\hat{\boldsymbol{Z}}'_0)$ *містить підсхему ізоморфну в класі* $\hat{\boldsymbol{Z}}$ *якомусь представникові цієї системи.*

Теорема 9. *Будь-яка ССЗР будь-якого класу* $\hat{\boldsymbol{Z}}'_0 \subseteq \hat{\boldsymbol{Z}}_0$ *з невизначеністю у класі ПВП* $\Pi_1(\hat{\boldsymbol{Z}}'_0)$ *містить підсхему виду схеми хоч би одного з типів I—VI.*

Доведення. Доведення випливає з теореми 2 і доведення теореми 5.

Теорема 10. *База невизначеності схем для будь-якого класу $\hat{\boldsymbol{Z}}'_0 \subseteq \hat{\boldsymbol{Z}}_0$ порожня, якщо цей клас не містить ССЗР із невизначеністю в $\Pi_1(\hat{\boldsymbol{Z}}_0')$ і складається з елементів у кількості від одного до шести в іншому випадку.*

Доведення. Доведення випливає із наслідка 2 і теореми 6.

Теорема 11. *Якщо ССЗР будь-якого класу $\hat{\boldsymbol{Z}}'_0 \subseteq \hat{\boldsymbol{Z}}_0$ містить підсхему вигляду схеми одного з типів I—VI, то ця ССЗР з невизначеністю у класі ПВП $\Pi_1(\hat{\boldsymbol{Z}}_0')$.*

Доведення. Оскільки схема будь-якого з типів I—VI містить фрагмент одного з типів I—IV, то, за теоремою 4, отримуємо твердження теореми.

Як безпосередній наслідок теорем 6 і 8 отримуємо **критерій невизначеності ССЗР** у класі ПВП $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_0')$ в термінах підсхем:

ССЗР будь-якого класу $\hat{\mathbf{Z}}'_0 \subseteq \mathbf{Z}_0$ з невизначеністю в класі ПВП $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_0')$ тоді й тільки тоді, коли вона містить хоч би одну підсхему типу I—VI.

Доведення. Оскільки схема будь-якого з типів I—VI містить фрагмент одного з типів I—IV, то, за теоремою 2.2.4, отримуємо твердження теореми.

Теорему доведено.

Як безпосередній наслідок теорем 6 і 8 отримуємо **критерій невизначеності ССЗР** у класі ПВП $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_0')$ у термінах підсхем:

ССЗР будь-якого класу $\hat{\mathbf{Z}}'_0 \subseteq \mathbf{Z}_0$ із невизначеністю в класі ПВП $\Pi_1(\hat{\mathbf{Z}}_0')$ тоді й тільки тоді, коли вона містить хоч би одну підсхему типу I—VI.

Далі для будь-якого підкласу ССЗР $\widehat{\mathbb{Z}}'$ класу $\widehat{\mathbb{Z}}$ через $\Pi_1(\widehat{\mathbb{Z}}')$ позначимо всі такі ПВП класу $\widehat{\mathbb{Z}}'$, що для будь-якої ССЗР $\widehat{Z} := (X, U, R) \in \widehat{\mathbb{Z}}'$ виконуються такі умови:

$XX1.$ $(U, \succcurlyeq^*)$ — нестрогий порядок;

$XX2.$ Для будь-яких $u_1, u_2 \in U$:

– якщо $R(u_1) \succ R(u_2)$, то $u_1 \succ^* u_2$,

– якщо $R(u_1) \sim R(u_2)$, то $u_1 \sim^* u_2$;

$XX3.$ $(X, \succcurlyeq)$ – нестрогий порядок.

ССЗР класу $\widehat{\mathbb{Z}}$ ізоморфні в класі $\widehat{\mathbb{Z}}$ ССЗР вигляду:

— $(\{x_1, x_2\},\ \{u_1, u_2\},\ \{(u_1, x_1),\ (u_1, x_2),\ (u_2, x_1),\ (u_2, x_2)\})$;

— $(\{x_1, x_2, x_3\},\ \{u_1, u_2\},\ \{(u_1, x_1),\ (u_2, x_2), (u_2, x_3)\})$;

— $(\{x_1, x_2, x_3\},\ \{u_1, u_2\},\ \{(u_1, x_1),\ (u_1, x_3),\ (u_2, x_2), (u_2, x_3)\})$;

називатимемо відповідно схемами типу I—III класу $\widehat{\mathbb{Z}}$ (див. рис. 15–17 у кінці тексту).

Тоді критерій невизначеності ССЗР у класі $\Pi_1(\widehat{\mathbb{Z}}')$, де $\widehat{\mathbb{Z}}' \subseteq \widehat{\mathbb{Z}}$ у термінах фрагментів сформулюємо у вигляді такої теореми.

Теорема 12. *Довільна ССЗР будь-якого класу $\widehat{\mathbb{Z}}' \subseteq \widehat{\mathbb{Z}}$ буде з невизначеністю в класі ПВП $\Pi_1(\widehat{\mathbb{Z}}')$ тоді й тільки тоді, коли ця ССЗР містить фрагмент вигляду схеми типу I або II класу $\widehat{\mathbb{Z}}$.*

Доведення. Нехай ССЗР $Z := (X, U, R) \in \widehat{\mathbb{Z}}'$ з невизначеністю в класі ПВП $\Pi_1(\widehat{\mathbb{Z}}')$. Тоді знайдуться $\pi', \pi'' \in \Pi_1(\widehat{\mathbb{Z}}')$, для яких $\pi'_{1Z} = \pi''_{1Z} := (X, \succcurlyeq)$ — нестрогий порядок і $(U, \succcurlyeq^*) := \pi'_{2Z} \neq \pi''_{2Z} =: \,=: (U, \succcurlyeq^{**})$. А це означає, що ССЗР $\mathcal{Z} := ((X, \succcurlyeq), U, R) \in \hat{\mathbf{Z}}$ буде з невизначеністю в класі ПВП $\Pi_1(\{\mathcal{Z}\})$. Отже, з теореми 2, ССЗР $\mathcal{Z}$ містить фрагмент одного з типів I—IV. Якщо ССЗР $\mathcal{Z}$ містить фрагмент типу I, то він визначає в ССЗР Z фрагмент виду схеми типу I класу $\widehat{\mathbb{Z}}$. Якщо ж ССЗР $\mathcal{Z}$ містить який-небудь із фрагментів типу II—IV, то він визначає в ССЗР Z фрагмент виду схеми типу II класу $\widehat{\mathbb{Z}}$.

І навпаки, якщо ССЗР $Z := (X, U, R) \in \widehat{\mathbb{Z}}'$ містить фрагмент, що є схемою типу I класу $\widehat{\mathbb{Z}}$, то визначимо строгий частковий порядок як $(X, \succ') := (X, \{(x_2, x_1)\})$. Якщо ж ССЗР Z містить фрагмент виду схеми типу II класу $\widehat{\mathbb{Z}}$, то визначимо строгий частковий порядок $(X, \succ'') :=$

$(X, \{(x_1, x_2), (x_3, x_2), (x_3, x_1)\})$. За теоремою Шпільрайна ці строгі часткові порядки ми можемо продовжити до лінійних порядків, які позначимо, відповідно, $(X, \succcurlyeq'_\circ)$ і $(X, \succcurlyeq''_\circ)$. Тоді, за теоремою 2.2.4, або ССЗР $((X, \succcurlyeq'_\circ), U, R)$ буде з невизначеністю в класі ПВП $\Pi_1(\widehat{\mathbf{Z}}')$, де $\widehat{\mathbf{Z}}' := \{((X, \succcurlyeq'_\circ), U, R) \mid ((X, U, R) \in \widehat{\mathbb{Z}}'\}$, або ССЗР $(X, \succcurlyeq''_\circ), U, R)$ буде з невизначеністю в класі ПВП $\Pi_1(\widehat{\mathbf{Z}}'')$, де $\widehat{\mathbf{Z}}'' := \{((X, \succcurlyeq''_\circ\ ), U, R) \mid ((X, U, R) \in \widehat{\mathbb{Z}}'\}$. Отже, ССЗР $Z = (X, U, R)$ буде з невизначеністю в класі ПВП $\Pi_1(\widehat{\mathbb{Z}}')$.

Теорему доведено.

Означення 19. *ССЗР класу $\widehat{\mathbb{Z}}$ з невизначеністю в класі ПВП $\Pi_1(\widehat{\mathbb{Z}})$ називається **елементарним фрагментом (елементарною схемою)** для $\Pi_1(\widehat{\mathbb{Z}})$, якщо будь-який фрагмент цієї ССЗР буде без невизначеності в класі ПВП $\Pi_1(\widehat{\mathbb{Z}})$.*

Аналогічно до поняття елементарного фрагмента (елементарної схеми) для $\Pi_1(\widehat{\mathbb{Z}})$, вводяться, як і в класі $\widehat{\mathbf{Z}}$, поняття повної системи елементарних фрагментів (елементарних схем) для $\Pi_1(\widehat{\mathbb{Z}})$ і бази невизначеності фрагментів (схем) класу $\widehat{\mathbb{Z}}' \subseteq \widehat{\mathbb{Z}}$.

Означення 20. *Система елементарних фрагментів (елементарних схем) для $\Pi_1(\widehat{\mathbb{Z}})$ називається **повною**, якщо будь-який елементарний фрагмент (будь-яка елементарна схема) для $\Pi_1(\widehat{\mathbb{Z}})$ ізоморфний (ізоморфна) у класі $\widehat{\mathbb{Z}}$ якомусь представникові цієї системи.*

Означення 21. *Система неізоморфних у класі $\widehat{\mathbb{Z}}$ елементарних фрагментів (схем) для $\Pi_1(\widehat{\mathbb{Z}})$ називається **базою невизначеності фрагментів (схем)** класу $\widehat{\mathbb{Z}}' \subseteq \widehat{\mathbb{Z}}$, якщо будь-яка ССЗР класу $\widehat{\mathbb{Z}}'$ з невизначеністю у $\Pi_1(\widehat{\mathbb{Z}}')$ має фрагмент (підсхему) ізоморфний (ізоморфну) в класі $\widehat{\mathbb{Z}}$ якомусь представникові цієї системи.*

Тоді з теореми 2.2.9 отримаємо критерій повноти системи елементарних фрагментів і класифікацію невизначеності будь-якого підкласу класу $\widehat{\mathbb{Z}}$ ССЗР у вигляді теорем 10 і 11.

Теорема 13. *Схеми типу I і II класу $\widehat{\mathbb{Z}}$ і лише вони є елементарними фрагментами для $\Pi_1(\widehat{\mathbb{Z}})$.*

Теорема 14. *База невизначеності фрагментів ССЗР будь-якого класу $\widehat{\mathbb{Z}}' \subseteq \widehat{\mathbb{Z}}$ порожня, якщо цей клас не містить ССЗР із невизначеністю в класі ПВП $\Pi_1(\widehat{\mathbb{Z}}')$ і складається з одного або двох елементів в іншому випадку.*

З теореми 2.2.9 також отримуємо критерій невизначеності ССЗР класу $\widehat{\mathbb{Z}}' \subseteq \widehat{\mathbb{Z}}$ у класі ПВП $\Pi_1(\widehat{\mathbb{Z}}')$ у термінах підсхем у вигляді наступної теореми.

Теорема 15. *Будь-яка ССЗР будь-якого класу $\widehat{\mathbb{Z}}' \subseteq \widehat{\mathbb{Z}}$ буде з невизначеністю в класі ПВП $\Pi_1(\widehat{\mathbb{Z}}')$ тоді і тільки тоді, коли ця ССЗР містить підсхему виду схеми одного з типів I—III класу $\widehat{\mathbb{Z}}$.*

Доведення. Доведення випливає з теореми 9 і того факту, що мінімальна підсхема аналізованої ССЗР, що містить фрагмент, що є схемою типу II класу $\widehat{\mathbb{Z}}$ і не співпадає з ним, буде ізоморфна в класі $\widehat{\mathbb{Z}}$ схемі типу III класу $\widehat{\mathbb{Z}}$ або містити не підсхему ізоморфну в класі $\widehat{\mathbb{Z}}$ схемі типу I класу $\widehat{\mathbb{Z}}$.

З доведених теорем 9 і 12 отримуємо критерій повноти системи елементарних фрагментів (схем) для $\Pi_1(\widehat{\mathbb{Z}})$ і класифікацію невизначеності в $\Pi_1(\widehat{\mathbb{Z}}')$ будь-якого підкласу $\widehat{\mathbb{Z}}'$ класу $\widehat{\mathbb{Z}}$ у вигляді таких теорем.

Теорема 16. *Повна система елементарних фрагментів (схем) для $\Pi_1(\widehat{\mathbb{Z}})$ складається з схем типів I, II (I—III) класу $\widehat{\mathbb{Z}}$.*

Теорема 17. *База невизначеності фрагментів (схем) будь-якого класу $\widehat{\mathbb{Z}}' \subseteq \widehat{\mathbb{Z}}$ порожня, якщо цей клас не містить ССЗР з невизначеністю в класі ПВП $\Pi_1(\widehat{\mathbb{Z}}')$, і складається від одного до двох (трьох) елементів в іншому випадку.*

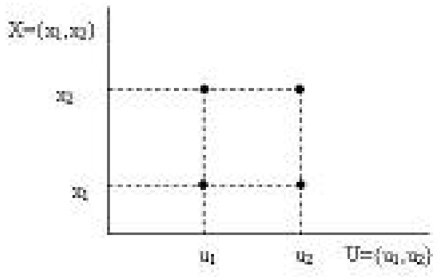

Рис. 1

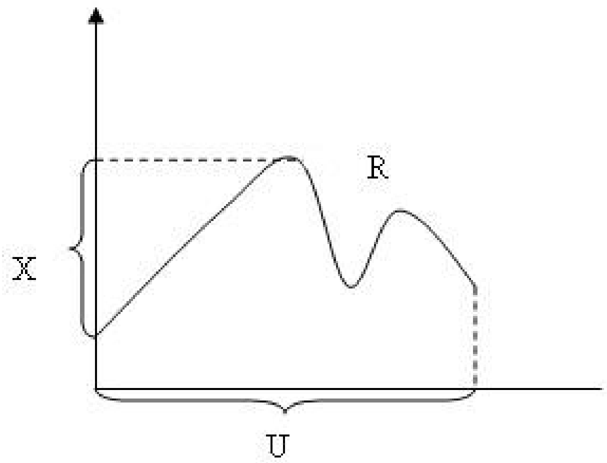

Рис. 2

1. Михалевич В. М. До класифікації задач рішень / В. М. Михалевич // Наукові записки НаУКМА. — 2007. — Т. 61. — С. 14–17.
2. Иваненко В. И. / Проблема неопределенности в задачах принятия решений / В. И. Иваненко, В. А. Лабковский. — К. : Наук. думка, 1990. — 135 с.
3. Фишборн П. Теория полезности для принятия решений / П. Фишборн — М. : Наука — 1978 — 352 с.
4. Szpilrajn E. Sur l'extension de l'ordre partiel / E. Szpilrajn // Fundam. math. — 1939. — V. 16 — P. 386–389.

V. M. Mikhalevych

ON THE ISSUE OF UNCERTAINTY IN NON-PARAMETRIC SITUATIONS OF DECISION PROBLEMS

The research in this paper is directed towards uncertainty in decision problems for a large enough quantity of decision-making subjects.

This work develops and generalizes the results detailed in article [1].

Keywords: uncertainty in decision problems, basic decision problem.

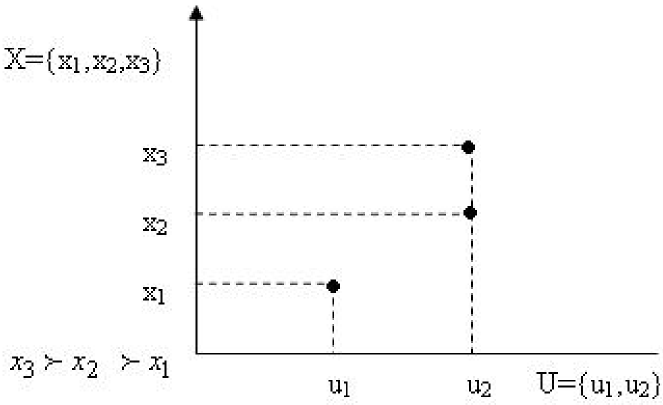
X={x1,x2,x3}
x3
x2
x1
x3 ≻ x2 ≻ x1
u1
u2
U={u1,u2}

Рис. 3

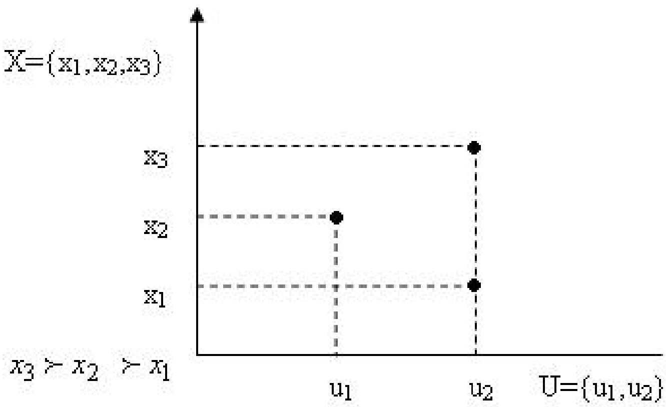
X={x1,x2,x3}
x3
x2
x1
x3 ≻ x2 ≻ x1
u1
u2
U={u1,u2}

Рис. 4

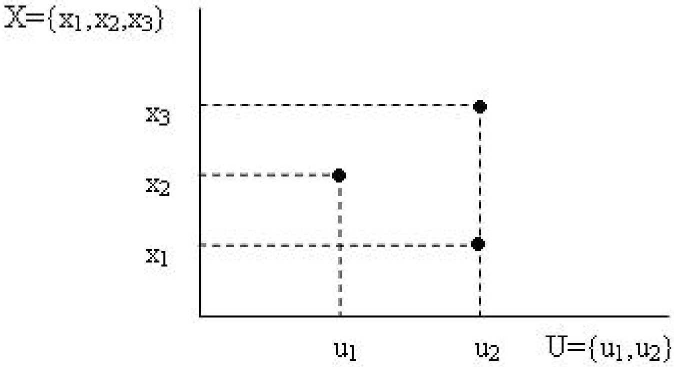
X={x1,x2,x3}
x3
x2
x1
u1
u2
U={u1,u2}

Рис. 5

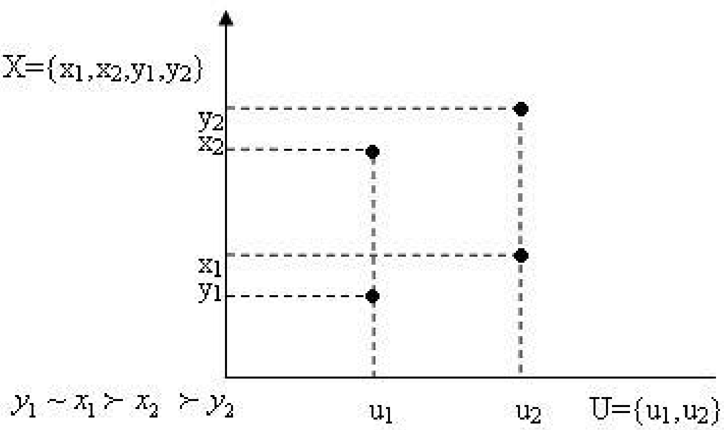
X={x1,x2,y1,y2}
y2
x2
x1
y1
$y_1 \sim x_1 \succ x_2 \succ y_2$
u1
u2
U={u1,u2}

Рис. 6

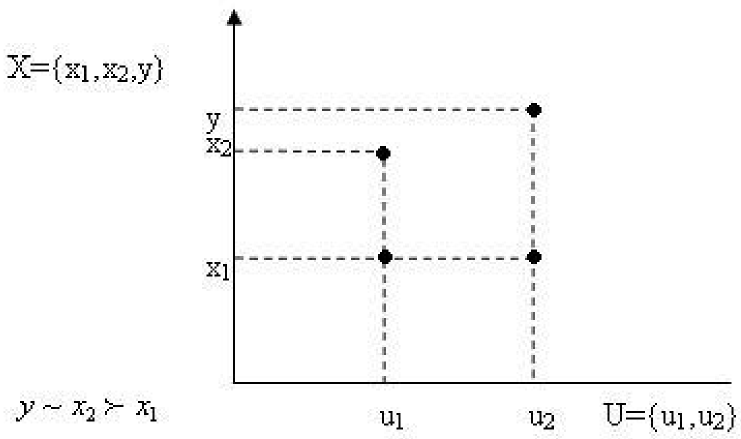

Рис. 7

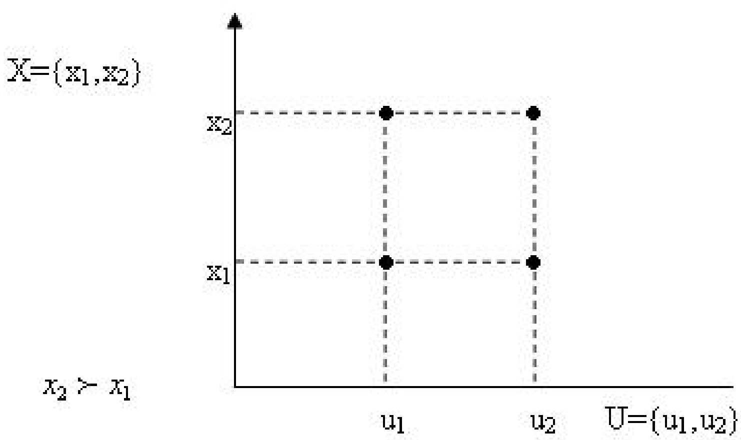

Рис. 8

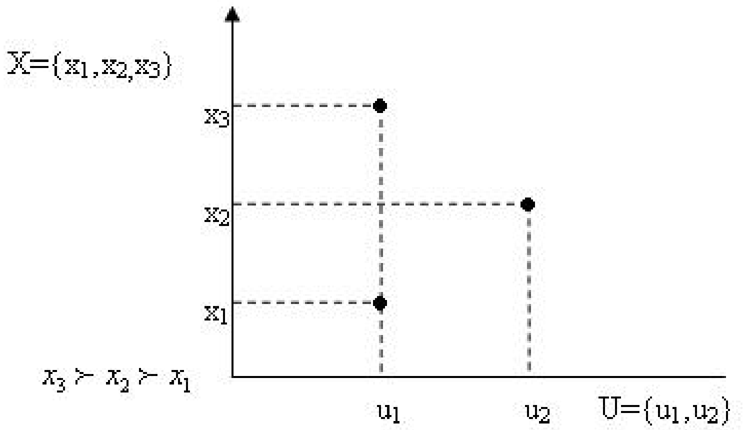
X={x1,x2,x3}
x3
x2
x1
$x_3 \succ x_2 \succ x_1$
u1
u2
U={u1,u2}

Рис. 9

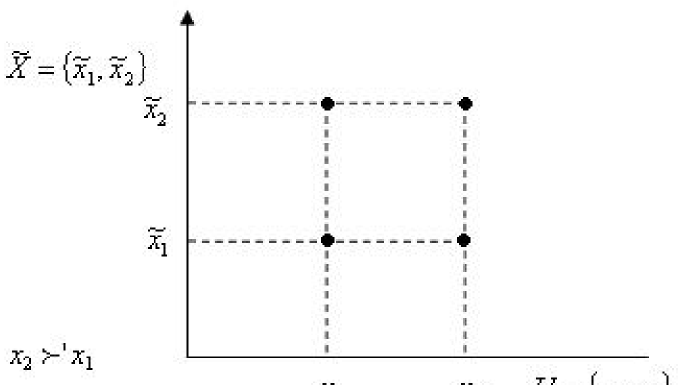
$\widetilde{X} = \{\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2\}$
$\widetilde{x}_2$
$\widetilde{x}_1$
$x_2 \succ' x_1$
u1
u2
$U = \{u_1, u_2\}$

Рис. 10

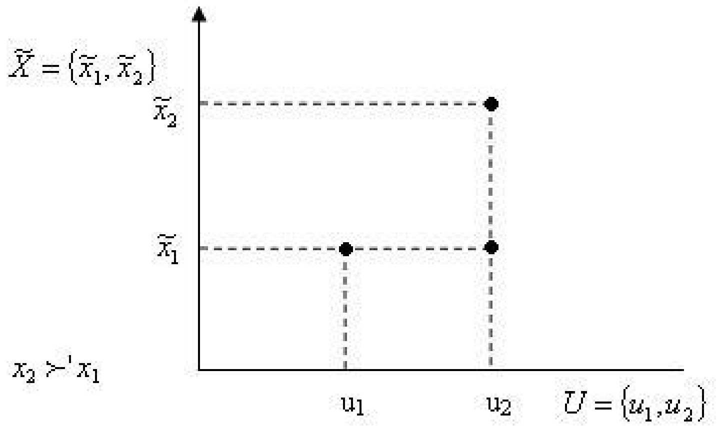
$\widetilde{X} = \{\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2\}$
$\widetilde{x}_2$
$\widetilde{x}_1$
$x_2 \succ' x_1$
u1
u2
$U = \{u_1, u_2\}$

Рис. 11

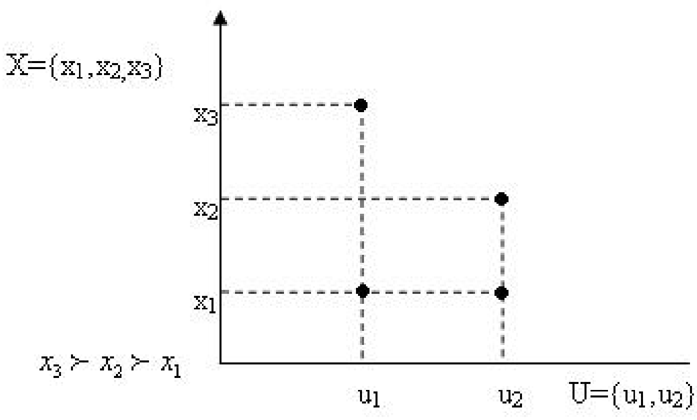
X={x1,x2,x3}
x3
x2
x1
$x_3 \succ x_2 \succ x_1$
u1
u2
U={u1,u2}

Рис. 12

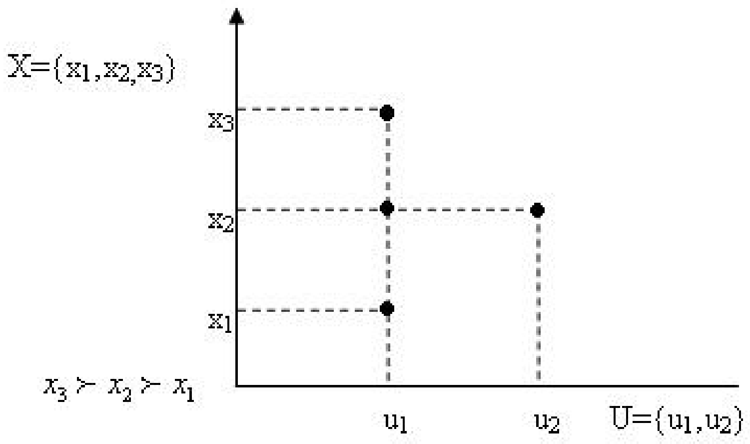
X={x1,x2,x3}
x3
x2
x1
x3 ≻ x2 ≻ x1
u1
u2
U={u1,u2}

Рис. 13

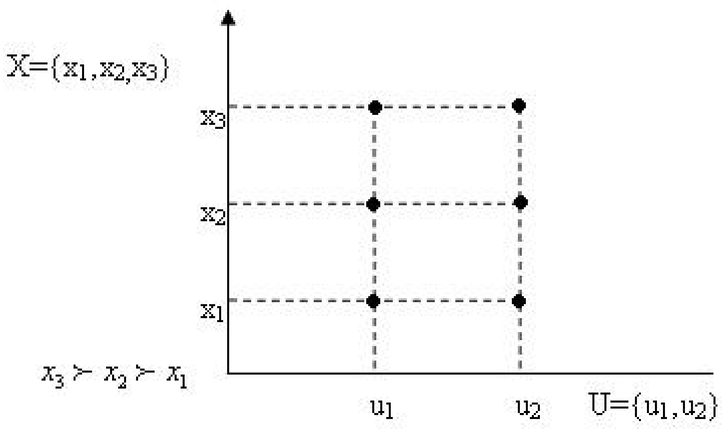
X={x1,x2,x3}
x3
x2
x1
x3 ≻ x2 ≻ x1
u1
u2
U={u1,u2}

Рис. 14

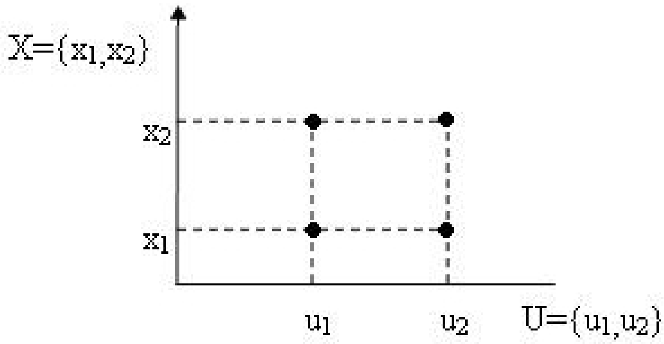

Рис. 15

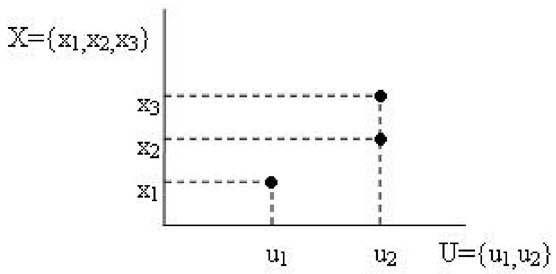

Рис. 16

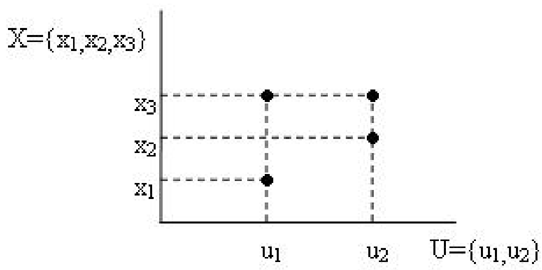

Рис. 17