УДК 512.56+512.64

Дяченко С. М.

НАПІВГРУПИ РІССА НАД ЦИКЛІЧНОЮ ГРУПОЮ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ СКІНЧЕННОГО ЗОБРАЖУВАЛЬНОГО ТИПУ

У цій статті розглянуто напівгрупи Рісса над циклічною групою третього порядку та описано напівгрупи скінченного зображувального типу у модулярному випадку, тобто, коли характеристика основного поля дорівнює трьом.

Ключові слова: напівгрупа Рісса, Моріта еквівалентний, зображення, матрична задача.

Вступ

Нехай $C_3 = \{e, a, a^2 \mid a^3 = e\}$ — циклічна група третього порядку і B — не нульова $n \times m$ матриця над $C_3 \cup \{0\}$. Для кожного $g \in C_3$ та пари індексів (i, j), $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$ розглянемо $m \times n$ матрицю $(g)_{ij}$. У цієї матриці на місці (i, j) стоїть елемент g, а решта дорівнюють нулю. Позначимо $\mathcal{R}(C_3, B)$ множину усіх таких матриць разом з нульовою матрицею. Визначимо множення "$*$" таким чином

$$(g)_{ij} * (g')_{i'j'} = (g)_{ij} \cdot B \cdot (g')_{i'j'},$$

де "$\cdot$" — звичайне множення матриць. Тоді множина $\mathcal{R}(C_3, B)$ разом з операцією "$*$" називається напівгрупою Рісса над групою C_3 з сендвіч-матрицею B.

Понізовський [1] описав всі напівгрупи Рісса (над довільною скінченною групою) скінченного зображувального типу у випадку, коли характеристика поля взаємно проста із порядком групи. У цій статті ми розглянемо випадок, коли характеристика базового поля F дорівнює трьом.

Позначимо $\mathcal{R}(B) = \mathcal{R}(C_3, B)$. Задача про опис зображень напівгрупи S еквівалентна задачі про опис зображень її напівгрупової алгебри $F[S]$. Позначимо $\mathcal{M}(B) = F[\mathcal{R}(B)]$. Тоді $\mathcal{M}(B)$ — це алгебра всіх $m \times n$ матриць над груповою алгеброю $F[C_3]$ з множенням $M_1 * M_2 = M_1 B M_2$.

Спрощення матриці

У цьому розділі ми побудуємо алгебру $\mathcal{M}(D)$ з матрицею D, що має ненульові елементи лише на головній діагоналі і яка має той самий зображувальний тип, що й алгебра $\mathcal{M}(B)$.

Твердження 1. *Якщо існують невироджені матриці $S \in M_n(F[C_3])$ і $T \in M_m(F[C_3])$ такі, що $B' = SBT$ тоді алгебри $\mathcal{M}(B)$ і $\mathcal{M}(B')$ ізоморфні.*

Доведення. Ізоморфізм задається такими відображеннями:

$$\mathcal{M}(B) \ni M \mapsto T^{-1} M S^{-1} \in \mathcal{M}(B'),$$
$$\mathcal{M}(B') \ni M' \mapsto T M' S \in \mathcal{M}(B).$$

Легко довести, використовуючи індукцію, що будь-яку матрицю B над $C_3 \cup \{0\}$ можна звести, використовуючи елементарні перетворення над полем F_3, до матиці D', яка має не нульові елементи лише на головній діагоналі, і ці елементи належать множині $\{0, e, a-e, (a-e)^2\}$. Зауважимо, що це твірні радикала алгебри $F[C_3]$. Оскільки $B \neq 0$, матриця D' щонайменше один елемент e. Отже, $\mathcal{M}(B) \simeq \mathcal{M}(D')$, D' — така матриця:

$$D' = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де $E = diag(e, \ldots, e)$, $A_1 = diag(a-e, \ldots, a-e)$, $A_2 = diag((a-e)^2, \ldots, (a-e)^2)$ — діагональні матриці.

Твердження 2. *Алгебра $\mathcal{M}(D')$ Моріта еквівалентна алгебрі $\mathcal{M}(D)$, де D має на головній діагоналі єдиний елемент e, елементи $a-e$, $(a-e)^2$ та 0. Матриця D може бути отримана з D' заміною блока E на блок розмірності один (e). Таким чином, матриця D має вигляд:*

$$D = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Запишемо довільну матрицю $X \in \mathcal{M}(D')$ у блочній формі відповідно до блоків матриці D':

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & X_{24} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34} \\ X_{41} & X_{42} & X_{43} & X_{44} \end{pmatrix}.$$

Оскільки алгебра $\mathcal{M}(D')$ не містить одиниці, приєднаємо до неї одиницю та розглянемо алгебру

$\mathcal{A} = \mathcal{M}(D') \oplus F\varepsilon$. Неважко показати, що $rad\mathcal{A}$ складається з усіх матриць X, для яких $X_{11} = (a-e)H_1 + (a-e)^2 H_2$, де H_1, H_2 — матриці над F. Тоді

$$\mathcal{A} \simeq rad\mathcal{A} \oplus (M_k(F) \oplus F\varepsilon),$$

де k — розмірність блока E. Всі нееквівалентні ідемпотенти алгебри $M_k(F) \oplus F\varepsilon$ — це e_{11} та $\mathbf{e} = \varepsilon - e_{11} - \ldots - e_{kk}$, де e_{ij} — стандартний базис у просторі матриць. Позначимо $I = e_{11} + \mathbf{e}$. Відомо, що алгебри $\mathcal{A}$ та $I\mathcal{A}I$ Моріта-еквівалентні. Матриця IXI може бути отримана заміною усіх елементів 2-го, ... , k-го рядків і стовпців нулями. Отже, $I\mathcal{A}I \simeq \mathcal{M}(D) \oplus F\bar{\varepsilon}$.

Назвемо матрицю D *спрощенням* матриці B.

Наслідок 1. *Алгебри $\mathcal{M}(D')$ та $\mathcal{M}(D)$ мають однаковий зображувальний тип.*

Основний результат

У цьому розділі ми доведемо теорему, що описує всі напівгрупи Рісса скінченного типу. Це основна теорема статті.

Теорема 1. *Алгебра $\mathcal{M}(B)$ має скінченний зображувальний тип тоді і лише тоді, коли її спрощення — матриця D — дорівнює одній із таких матриць:*

$$(e), (e\ 0), \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & a-e \end{pmatrix}.$$

Теорему доведемо у кілька кроків.

Твердження 3. *Якщо матриця D містить нульовий рядок (стовпчик) і $\tilde{D}$ — матриця, отримана за допомогою викреслення цього рядка (стовпчика), то алгебра $\mathcal{M}(\tilde{D})$ є факторалгеброю алгебри $\mathcal{M}(D)$ за деяким ідеалом.*

Доведення. Доведемо твердження у випадку, коли m-й стовпчик матриці D є нульовим. Розглянемо алгебру $\mathcal{M}(D)$, вона має базис $e_{ij}, a_{ij}, \bar{a}_{ij} i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$, де e_{ij} — це матриця з єдиним ненульовим елементом e на місці (i,j), a_{ij} — це матриця з єдиним ненульовим елементом a на місці (i,j), $\bar{a}_{ij}$ — це матриця з єдиним ненульовим елементом a^2 на місці (i,j). Лінійний підпростір

$$I = \langle e_{m1}, \ldots, e_{mn}, a_{m1}, \ldots, a_{mn}, \bar{a}_{m1}, \ldots, \bar{a}_{mn} \rangle$$

є ідеалом у $\mathcal{M}(D)$. Справді $De_{mj} = 0$, тоді $x * e_{mj} = 0$ для всіх $x \in \mathcal{M}(D)$, матриця e_{mj} має ненульові елементи лише у m-му рядку, а отже, матриця $e_{mj} * x$ має ненульові елементи лише у m-му рядку. Аналогічне справедливо для a_{mj}, $\bar{a}_{mj}$. Отже, I — ідеал. Легко зрозуміти, що $\mathcal{M}(D)/I \simeq \mathcal{M}(\tilde{D})$.

Твердження 4. *Алгебри $\mathcal{M}(D)$ з однією із таких сендвіч-матриць D є нескінченного зображувального типу:*

$$\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, (e\ 0\ 0).$$

Доведення. У випадку

$$D = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

алгебра $\mathcal{M}(D)$ має базис $\{e_{ij}, a_{ij}, \bar{a}_{ij} \mid 1 \le i, j \le 2\}$ (позначення як у попередньому твердженні). Зауважимо, що $e_{22} = e_{21} * e_{12}$, $a_{12} = a_{11} * e_{12}$, $a_{21} = e_{21} * a_{11}$, $a_{22} = e_{21} * a_{11} * e_{12}$, $\bar{a}_{11} = a_{11}^2$, $\bar{a}_{12} = \bar{a}_{11} * e_{12}$, $\bar{a}_{21} = e_{21} * \bar{a}_{11}$, $\bar{a}_{22} = e_{21} * \bar{a}_{11} * e_{12}$. Таким чином, система твірних алгебри складається з таких елементів $\{e_{11}, e_{12}, e_{21}, a_{11}\}$.

Розглянемо таке зображення $R(X)$ алгебри, при якому елементам $e_{11}, e_{12}, e_{21}, a_{11}$ відповідають наступні матриці:

$$\begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E & X & 0 & 0 \\ E & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Можна перевірити, що для такого набору матриць виконуються всі співвідношення алгебри, отже, це дійсно є зображенням алгебри. Неважко перевірити, що два такі зображення $R(X)$ та $R(X')$ еквівалентні тоді і лише тоді, коли існує невироджена матриця S така, що $X' = S^{-1}XS$. Отже, задача є нескінченного типу.

У випадку

$$D = \begin{pmatrix} e \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

базис алгебри складається з елементів $\{e_{i1}, a_{i1}, \bar{a}_{i1} \mid 1 \le i \le 3\}$. Зазначимо, що виконуються співвідношення $a_{i1} = e_{i1} * a_{11}$, $\bar{a}_{11} = a_{11} * a_{11}$, $\bar{a}_{i1} = e_{i1} * a_{11} * a_{11}$, $1 < i \le 3$. Отже, система твірних алгебри складається з елементів $\{e_{11}, e_{21}, e_{31}, a_{11}\}$. Розглянемо зображення $R(X)$ цієї алгебри, при якому твірні елементи переходять відповідно у такі матриці:

$$E,\ E,\ X,\ 0.$$

Нескладно перевірити, що вісі співвідношення в алгебрі виконуються, отже, це дійсно зображення, крім того два такі зображення $R(X)$ та $R(X')$ є еквівалентними тоді і лише тоді, коли існує невироджена матриця S така, що $X' = S^{-1}XS$. Отже, це задача нескінченного типу.

Надалі ми будемо використовувати позначення для блоків матриці D, уведені в твердження 2. Ми доведемо кілька тверджень, в яких ми поступово розглянемо різні випадки, якою може бути матриця D.

Твердження 5. *Якщо матриці A_1 та A_2 — порожні, то алгебра $\mathcal{M}(D)$ має скінченний зображувальний тип тоді і лише тоді, коли матриця D має один із таких виглядів:*

$$(e), \quad (e\ \ 0), \quad \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Доведення. Нехай матриця D має розмір $n \times m$, і єдиний ненульовий елемент e цієї матриці розташований на місці $(1,1)$. Позначимо таку матрицю $\mathcal{E}_{n,m}$. Якщо $n \geq 3$, то, за твердженням 3, алгебра $\mathcal{M}(\mathcal{E}_{n,m})$ має факторалгебру $\mathcal{M}(\mathcal{E}_{3,1})$ нескінченного зображувального типу, за твердженям 4, а отже, і сама алгебра є нескінченного типу, бо алгебра, що має фактор алгебру нескінченного типу сама є алгеброю нескінченного типу. Аналогічно розглядається випадок $m \geq 3$. Таким чином, $m, n \leq 2$, але якщо $m = n = 2$, то, за твердженням 4, алгебра також матиме нескінченний тип.

Отже, можливі лише випадки, вказані в умові твердження. У випадку $D = (e)$ ми маємо просто зображення групи C_3 над полем характеристики три. Ця задача скінченного типу (див. [3]). Якщо

$$D = \begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix},$$

то алгебра має базис $e_1 = (e\ 0), e_2 = (0\ e), a_1 = (a\ 0), a_2 = (0\ a), \bar{a}_1 = (\bar{a}\ 0), \bar{a}_2 = (0\ \bar{a})$. Системою твірних є елементи $\{e_1, e_2, a_1\}$. Розглянемо деяке зображення: $M_{e_1}, M_{e_2}, M_{a_1}$. Після приведення матриць M_{e_1}, M_{e_2} до вигляду:

$$\begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} -$$

матриця M_{a_1} буде мати такий вигляд :

$$\begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & 0 & 0 \\ U_{21} & U_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тоді для матриці

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}$$

отримаємо задачу про опис оператора U, такого, що $U^3 = E$ у векторному просторі градуйованому частково-впорядкованою множиною $S = \{1 < 2\}$. Ця задача скінченного типу [2, Theorem 1]. Випадок $D = (e\ 0)$ розглядається аналогічно.

Твердження 6. *Якщо матриця A_1 не порожня, тобто D містить на головній діагоналі хоча б один елемент $a - e$, то така алгебра має скінченний тип лише у випадку*

$$D = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & a-e \end{pmatrix}.$$

Доведення. Нехай матриця D має порядок $n \times m$, причому, на місці $(1,1)$ стоїть e, на місці $(2,2)$ стоїть $a - e$, далі на головній діагоналі — будь-що (0, $a - e$ або $(a-e)^2$). Припустимо також, що $n \geq 3$. Алгебра $\mathcal{M}(D)$ має базис $\{e_{ij}, a_{ij}, \bar{a}_{ij} \,|\, 1 \leq i \leq m, 1 \leq i \leq n\}$ (позначення як вище). Зауважимо, що виконуються рівності : $e_{ij} = e_{i1} * e_{1j}$, $a_{11} = e_{12} * e_{21} + e_{11}$, $a_{1j} = a_{11} * e_{1j}$, $a_{i1} = e_{i1} * a_{11}$, $a_{ii} = e_{i1} * a_{11} * e_{1i}$, $\bar{a}_{11} = a_{11}^2$, $\bar{a}_{1i} = \bar{a}_{11} * e_{1i}$, $\bar{a}_{i1} = e_{i1} * \bar{a}_{11}$, $\bar{a}_{ii} = e_{i1} * \bar{a}_{11} * e_{1i}$, $1 \leq i \leq m, 1 \leq i \leq n$. Таким чином, система твірних алгебри складається з елементів

$$\{e_{11}, e_{1j}, e_{i1} \,|\, 1 \leq i \leq m, 1 \leq i \leq n\}.$$

Розглянемо зображення $R(X)$ цієї алгебри, при якому $M_{e_{11}} = E$, $M_{e_{12}} = E$, $M_{e_{13}} = X$. Легко перевірити, що вісі співвідношення виконуються, отже, це дійсно зображення, крім того, два такі зображення $R(X)$ та $R(X')$ є еквівалентними тоді і лише тоді, коли існує невироджена матриця S, така, що $X' = S^{-1}XS$. Отже, це задача нескінченного типу.

У випадку D розміром 2×2, алгебра матиме систему твірних e_{11}, e_{12}, e_{21}. Після приведення матиці $M_{e_{11}}$,

$$M_{e_{12}} = \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{e_{21}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \end{pmatrix},$$

де для матриць X, Y виконується співвідношення $(XY)^3 = 0$. Ця задача скінченного типу.

Твердження 7. *Якщо матриця A_1 порожня, а A_2 не порожня, тобто D містить на головній діагоналі хоча б один елемент $(a-e)^2$, то така алгебра має нескінченний зображувальний тип.*

Доведення. Нехай матриця D має порядок $n \times m$, причому, на місці $(1,1)$ стоїть e, на місці $(2,2)$ розташовано $(a-e)^2$, далі на головній діагоналі — 0 або — $(a-e)^2$. Алгебра $\mathcal{M}(D)$ має базис $\{e_{ij}, a_{ij}, \bar{a}_{ij} \,|\, 1 \leq i \leq m, 1 \leq i \leq n\}$. Зауважимо, що $e_{ii} = e_{i1} * e_{1i}$, $a_{1j} = a_{11} * e_{1j}$, $a_{i1} = e_{i1} * a_{11}$, $a_{ii} = e_{i1} * a_{11} * e_{1i}$, $\bar{a}_{11} = a_{11}^2$, $\bar{a}_{1j} = \bar{a}_{11} * e_{1j}$, $\bar{a}_{i1} = e_{i1} * \bar{a}_{11}$, $\bar{a}_{ii} = e_{i1} * \bar{a}_{11} * e_{1i}$, $1 \leq i \leq m, 1 \leq i \leq n$. Таким чином, система твірних алгебри складається з таких елементів

$$\{e_{11}, e_{1j}, e_{i1}, a_{11} \,|\, 1 \leq i \leq m, 1 \leq i \leq n\}.$$

Розглянемо таке зображення $R(X)$ алгебри, при якому елементам $e_{11}, e_{12}, e_{21}, a_{11}$ відповідають матриці:

$$\begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E & X & 0 & 0 \\ E & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а решті твірних відповідають нульові матриці. Можна перевірити, що для такого набору матриць виконуються всі співвідношення алгебри, отже, це дійсно є зображенням алгебри. Легко перевірити, що два такі зображення $R(X)$ та $R(X')$ еквівалентні тоді і лише тоді, коли існує невироджена матриця S, така, що $X' = S^{-1}XS$. Отже, задача нескінченного типу.

Висновки

Таким чином, у статті ми розглянули напівгрупи Рісса над циклічною групою третього порядку. Ми вивчали їхній зображувальний тип у модулярному випадку і дали опис усіх напівгруп, що мають скінченний зображувальний тип.

1. Понизовский И. С. О конечности типа полугрупповой алгебры конечной вполне простой полугруппы / И. С. Понизовский // Зап. научн. сем. ЛОМИ. — 1972. — Т. 28 — С. 154–163.
2. Bondarenko V. M. Linear operators on S-graded vector spaces / V. M. Bondarenko // Linear algebra and its applications. – 2003. – Vol. 365. – P. 45-90.
3. Brenner S. Modular representations of p-groups. / S. Brenner // J. Algebra. — 1970. — No. 1. — P. 69–102.

S. Dyachenko

ON FINITE REPRESENTATION TYPE REES SEMIGROUP OVER THE CYCLIC GROUP OF ORDER THREE

Rees semigroup over C_3 is considered. Semigroups of finite representation type is described in modular case.

Keywords: Rees semigroup, Morita equivalent, representation, matrix problem.