УДК 519.81

Михалевич В. М.

ДО МОДЕЛЮВАННЯ СИТУАЦІЙ ЗАДАЧ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ[1]

Введено поняття схеми і моделі ситуації в задачі прийняття рішення. Проаналізовано взаємозв'язок параметричних і непараметричних схем, а також моделей ситуації. При цьому випадковість в ситуаціях розглянуто більш загального вигляду ніж стохастична – її закономірність описано так званою статистичною закономірністю.

Ключові слова: задача прийняття рішення, параметрична ситуація, непараметрична ситуація, схема ситуації, модель ситуації, статистична закономірність.

Вступ

У праці [1] сформульовано таке питання: «Якщо параметр Θ не спостерігається, то чи обов'язково розглядати його? Чи не простіше замість матричної ССЗР розглядати відповідну їй лотерейну ССЗР. Зв'язок матричної ССЗР з породженою нею лотерейною ССЗР очевидний..., зрозуміло, що задля безпосереднього прийняття рішення лотерейна форма ССЗР надається нітрохи не менше, ніж матрична форма ССЗР. Проте становище разюче змінюється, як тільки ми захочемо перед прийняттям рішення провести експеримент для отримання додаткової інформації про об'єкт, тобто скористатися спостереженням...».

Залишимо осторонь питання про експеримент й абсолютно резонне обгрунтування в [1] переваги матричної форми ССЗР для прийняття рішення, де використано спостереження, з яким важко не погодитися. Однак попереднє в цій цитаті твердження видається не надто очевидним, тому виникає необхідність докладнішого дослідження.

Нагадаємо деякі означення з [3].

Означення 1. *Статистичною закономірністю на Θ, де Θ — довільна множина із заданою алгеброю підмножини Σ (якщо Σ не задається, то, за замовчуванням, вважається, що $\Sigma = 2^{\Theta}$) називається довільна непорожня замкнена множина P в топології $\tau(\Theta)$ простору*

$$PF(\Theta) := \{p \in ([0,1])^{\Sigma} : p(\Theta) = 1,$$

$$p(C \cup D) = p(C) + p(C \backslash D), \ \ \forall C, D \in \Sigma\} \qquad (1)$$

всіх адитивних імовірнісних мір на Θ, що є слідом $*$- слабкої топології в спряженому до банахового простору $B_{\Sigma}(\Theta)$ з нормою $\|f\| := \sup\limits_{\theta\in\Theta} |f(\theta)|$.

Іншими словами, для топології $\tau(\Theta)$ визначальною системою околів точки p в просторі $PF(\Theta)$ є множини виду
$U_{\varepsilon,f_1,f_2,...,f_n}(p) = \{p' \in PF(\Theta) : |\int\limits_{\Theta} f_i p(d\theta) - \int\limits_{\Theta} f_i p'(d\theta)| < \varepsilon \quad \forall i \in \overline{1,n}\}$, для будь-яких $\varepsilon > 0, \ \ n \in N, \ \ f_1, f_2, ..., f_n \in B_{\Sigma}(\Theta)$.

Зауваження. Це визначення узагальнює означення статистичної закономірності на Θ, наведене в [1], коли $\Sigma = 2^{\Theta}$, тобто $f \in M(\Theta)$.

Сімейство всіх статистичних закономірностей на Θ будемо позначати $P(\Theta)$.

Зазначимо також, що в топології $\tau(\Theta)$ простір $PF(\Theta)$ компактний.

Означення 2. *Лотерейною формою ССЗР називається впорядкована трійка виду (X, U, R), де R є графіком відповідності з довільної непорожньої множини U в довільну непорожню множину X, для якої $domR = U$ і $imR = X$.*

При цьому X називається **множиною наслідків**, U — **множиною рішень,** R — **відповідністю ССЗР** (X, U, R).

Клас усіх впорядкованих трійок виду $\hat{Z} := (X, U, R)$ позначимо $\hat{\mathbb{Z}}$.

Означення 3. *Матричною формою ССЗР називається впорядкована четвірка виду (X, Θ, U, g), де g є відображенням з $\Theta \times U$ на X для довільних непорожніх множин X, Θ, U.*

При цьому множина X називається **множиною наслідків**, Θ — **множиною значень невідомого параметра**, U — **множиною рішень**, а g — **відображенням наслідків** ССЗР (X, Θ, U, g).

Клас усіх впорядкованих четвірок виду $Z := (X, \Theta, U, g)$ позначимо $\mathbb{Z}$. Тоді $\mathbb{Z}(X, \Theta) := \{(X, \Theta, \cdot, \cdot) \in \mathbb{Z}\}$.

Означення 4. ***Проекцією*** *ССЗР класу $\mathbb{Z}$ називається таке відображення $\widehat{\Pr} : \mathbb{Z} \to \hat{\mathbb{Z}}$, що для будь-якої ССЗР $(X, \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}$ $\widehat{\Pr}((X, \Theta, U, g)) =$*

[1]Стаття частково підтримана Міжнародним благодійним фондом відродження Києво-Могилянської академії.

$(X, U, R) \in \hat{\mathbb{Z}}$, *де для будь-яких* $u \in U$

$$R(u) = X_u = g(\Theta, u). \qquad (2)$$

Взаємозв'язок двох форм ССЗР і моделей СЗР зі стохастичними закономірностями

Розглянемо ССЗР $\hat{Z} := (\{x_1, x_2\}, \{u_1, u_2\}, \{u_1, u_2\} \times \{x_1, x_2\}) \in \hat{\mathbb{Z}}$ $(\{x_1, x_2\}, \{u_1, u_2\})$ і дві ССЗР — $Z_1 := (\{x_1, x_2\}, \{\theta_1, \theta_2\}, \{u_1, u_2\}, g_1) \in \mathbb{Z}$ $Z_2 := (\{x_1, x_2\}, \{\theta_1, \theta_2\}, \{u_1, u_2\}, g_2) \in \mathbb{Z}$, де $g_1(\theta_1, u_i) = x_2,\ g_1(\theta_2, u_i) = x_1,\ g_2(\theta_i, u_1) = x_1,\ g_2(\theta_i, u_2) = x_2, i = \overline{1, 2}$. Тоді

$$\widehat{\mathit{\Pi p}}(Z_1) = \widehat{\mathit{\Pi p}}(Z_2) = \hat{Z}.$$

При цьому для значної частини ТПР-ів ССЗР Z_1 цілком визначена, тобто без невизначеності, тоді як ССЗР Z_2 і $\hat{Z}$ такими не будуть. Це твердження ми уточнимо, його доведення наведено в статті [2]

Очевидно, що аналогічна картина спостерігається і з більш «тонкими» класами ССЗР **Z** і $\hat{\mathbf{Z}}$ (див.: [3]).

Тож, доходимо висновку, що, загалом кажучи (див. аксіому 3 у [3]), матрична форма ССЗР дає додаткову інформацію про СЗР.

Як було зазначено, задаючи ССЗР, ми вже задаємо певну закономірність, властиву «механізму випадковості» наслідків кожної дії з множини рішень цієї ССЗР. Однак у реальних ситуаціях найчастіше цей механізм випадковості можемо уточнити. Це є зокрема предметом теорії ймовірностей, в якій вводяться імовірнісні розподіли. При загальніших припущеннях їм відповідають статистичні закономірності.

Нехай для будь-якого $u \in U$ (X_u, Ξ_u) — вимірний простір, тобто Ξ_u — деяка алгебра підмножин множини X_u.

Припустимо, що на алгебрі $\bigotimes_{i=1}^{n} \Xi_{u_i}$ (алгебра, породжена півкільцем $\prod_{i=1}^{n} \Xi_{u_i}$ (див., наприклад, [4], с. 42–45) для кожного $n \in N$ і для будь-якої вибірки $u_1, ..., u_n$, де u_i $(i = \overline{1, n})$ — довільні точки множини U, визначено множину ймовірнісних заходів

$$P_{u_1,...,u_n} \subseteq \{p_{u_1,...,u_n} \in PF(\prod_{i=1}^{n} X_{u_i})\}, \qquad (3)$$

причому сімейство множин (3) задовольняє наступним **умовам узгодженості**:

для будь-яких $A^{(n)} \in \bigotimes_{i=1}^{n} \Xi_{u_i}$;

a) для будь-якої $p_{u_1,...,u_{n+m}} \in P_{u_1,...,u_{n+m}}$ $p_{u_1,...,u_n,u_{n+1},...,u_{n+m}}(A^{(n)} \times \prod_{i=1}^{m} X_{n+i}) = p_{u_1,...,u_n}(A^{(n)})$, де $p_{u_1,...,u_n} \in P_{u_1,...,u_n}$,

b) для будь-якої $p_{u_1,...,u_n} \in P_{u_1,...,u_n}$ $p_{u_1,...,u_n}(A^{(n)}) = p_{s(u_1,...,u_n)}(\{s(a) : a \in A^{(n)}\})$, де $s(u_1, ..., u_n)$ — будь-яка перестановка елементів $u_1, ..., u_n$.

Розглянемо тепер клас ССЗР $\hat{\mathbb{Z}}$ з заданими статистичними закономірностями, що описують «механізм випадковості» наслідків кожної дії відповідних множин рішень цієї ССЗР. Тоді кожній ССЗР цього класу $(X, U, \bigcup_{u \in U} (u, X_u))$, де для будь-якого $u \in U$ X_u — непорожня підмножина множини X, a$(u, X_u) := \{(u, x) : x \in X_u\}$ відповідає впорядкована четвірка виду $(X, U, \bigcup_{u \in U} (u, X_u), \{P_u : u \in U\})$, де (X_u, Ξ_u, P_u) — будь-який простір з розподілом, алгебра Ξ_u якого є слідом алгебри Ξ в X_u (тобто $\Xi_u = \Xi \cap 2^{X_u}$). Через $\hat{\mathbb{Z}}P$ позначимо клас всіх четвірок вказаного виду.

Розглянемо також ССЗР класу $\mathbb{Z}$ із заданою статистичною закономірністю, яка описує «механізм випадковості» станів природи. Цій ССЗР буде відповідати упорядкована п'ятірка виду (X, Θ, U, g, P), де $\{\Theta, \Sigma, P\}$ — простір із розподілом.

Тоді через $\mathbb{Z}P$ позначимо клас всіх п'ятірок зазначеного виду. Елементи класу $\mathbb{Z}P$ $(\hat{\mathbb{Z}}P)$ будемо називати **ССЗР з розподілом (розподілами)** в матричній (лотерейній) формі.

Означення 5. ***Моделлю*** *СЗР (МСЗР) зі статистичною закономірністю будемо називати її параметричну схему, доповнену статистичною закономірністю на* Θ *і позначати через* M, *тобто* $M := (X, \Theta, U, g, \mathrm{P})$, *де* $Z = (X, \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}$, $P \in P(\Theta)$.

МСЗР зі статистичними закономірностями будемо називати її непараметричну схему, доповнену сімейством узгоджених статистичних закономірностей на множинах $\prod_{i=1}^{n} X_{u_i},\ u_i \in U,\ u_{i_1} \neq u_{i_2}$ при $i_1 \neq i_2$, $n \in N$ і позначати коротко $\hat{M} := (X, U, \bigcup_{u \in U} (u, X_u)), \{P_{u_1,...,u_n}\})$, де $\hat{Z} = (X, U, \bigcup_{u \in U} (u, X_u)) \in \hat{\mathbb{Z}}, \quad (u, X_u) := \{(u, x) : x \in X_u\},\ P_{u_1,...,u_n} \in P(\prod_{i=1}^{n} X_{u_i})$.

Зауваження. Якщо елемент класу $\mathbb{Z}P$ визначає відповідну МСЗР зі статичною закономірністю (X, Θ, U, g, P), то елемент класу $\hat{\mathbb{Z}}P$, взагалі МСЗР зі статистичними закономірностями не визначає. Зрозуміло, що не вистачає інформації про спільні розподіли наслідків кінцевих послідовностей дій

ТПР-а.

На рівні схем ситуації очевидно, що параметрична ситуація є не менш інформативною ніж відповідна їй (тобто моделююча ту саму СЗР) непараметрична ситуація. При цьому зрозуміло, що кожній параметричній ССЗР відповідає єдина непараметрична ССЗР тієї самої СЗР, яка є її проекцією. А саме для будь-якої ССЗР $Z = (X, \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}$ відповідна їй ССЗР з $\hat{\mathbb{Z}}$ має вигляд $\hat{Z} = (X, U, \bigcup\limits_{u\in U}(u, X_u))$, де $X_u := g(\Theta, u) := \{g(\theta, u) : \theta \in \Theta\}, (u, X_u) := := \{(u, x) : x \in X_u\}, \ \forall u \in U$.

Нижче ми покажемо, що для будь-якої ССЗР $\hat{Z} \in \hat{\mathbb{Z}}$ знайдеться параметрична ССЗР Z (не єдина), проекція якої збігається з $\hat{Z}$, тобто $\widehat{Пр}(Z) = \hat{Z}$. У цьому випадку ми будемо говорити, що ССЗР Z є **представленням** ССЗР $\hat{Z}$.

Менш очевидно, що так само відбувається й з параметричними і непараметричними МСЗР зі статистичними закономірностями. Для точного формулювання цього результату вкажемо необхідні означення.

Означення 6. *Параметрична МСЗР $M = (X, \Theta, U, g, P)$ називається* ***представленням*** *МСЗР $\hat{M} = (X, U, \bigcup\limits_{u\in U}(u, X_u), \{P_{u_1,\dots,u_n}\})$, якщо існують простір зі статистичною закономірністю (Θ, Σ, P), сімейство вимірних просторів $\{(X_u, \Xi_u) : u \in U\}$, і відображення $g : \Theta\times U \to X$ таке, що $X_u = g(\Theta, u), \Xi_u := \{g^{-1}(B, u) : B \in \Sigma\}$, а скінченновимірні статистичні закономірності $\{P_{u_1,\dots,u_n}\}$ випадкового відображення $g(\theta, u)$ збігаються із заданим сімейством (3).*

Зрозуміло, що при цьому g — (Σ, Ξ_u)-вимірний при кожному $u \in U$ (тобто $\forall\ A \in \Xi_u$ і $\forall\ u \in U$ множина $\{\theta : g(\theta, u) \in A\}$ належить алгебрі Σ), де $\Xi_u = \Xi \cap 2^{X_u}$.

Означення 7. *Якщо $\{(X_u, \Xi_u) : u \in U\}$ деяка сукупність вимірних підпросторів простору X, Θ — простір всіх відображень θ, заданих на множині U зі значеннями в просторі X, що $\theta(u) \in X_u\ \forall u \in U$ и $A^{(n)} \in \bigotimes\limits_{i=1}^{n}\Xi_{u_i}$, де $u_i \in U (i = \overline{1, n})$, то множина відображень $\theta \in \Theta$, для яких точка $(\theta(u_1), \dots, \theta(u_n))$ з $\prod\limits_{i=1}^{n} X_{u_i}$ належить, $A^{(n)}$, тобто множина $C_{u_1,\dots,u_n}(A^{(n)}) = \{\theta(u) : (\theta(u_1), \dots, \theta(u_n)) \in A^{(n)}\}$, називається* ***циліндричною множиною*** *в Θ з основою $A^{(n)}$ над координатами $u_1, \dots, u_n$.*

Зрозуміло, якщо точки $u_1, ..., u_n$ фіксовані, то між циліндричними множинами над координатами $u_1, ..., u_n$ (їх сукупність позначимо $\mathbb{C}_{u_1,\dots,u_n}$) і елементами алгебри $\bigotimes\limits_{i=1}^{n}\Xi_{u_i}$ існує ізоморфізм: кожна множина $A^{(n)} \in \bigotimes\limits_{i=1}^{n}\Xi_{u_i}$ визначає циліндричну множину $C_{u_1,\dots,u_n}(A^{(n)})$, для якої вона слугує основою; різним основам відповідають різні циліндричні множини; об'єднанню, різниці або перетину основ відповідає об'єднання, різниця або перетин циліндричних множин, що безпосередньо випливає з означення циліндричної множини. Крім того, як бачимо, будь-які дві циліндричні множини можна завжди розглядати як циліндричні множини над фіксованою послідовністю координат. Звідси випливає, що, розглядаючи алгебраїчні дії над кінцевим числом циліндричних множин, можна вважати, що вони задані над фіксованою послідовністю координат. Тому клас $\mathbb{C}$ всіх циліндричних множин утворює алгебру множин.

Означення 8. *МСЗР зі статистичними закономірностями $\hat{M} \in \hat{\mathbb{M}}$ називається* ***проекцією*** *МСЗР $M = \{X, \Theta, U, g, P\} \in \mathbb{M}$, де відображення g — (Σ, Ξ_u)-вимірне при кожному $u \in U$, якщо $\hat{M} = (X, U, \bigcup\limits_{u\in U}(u, X_u), \{P_{u_1,\dots,u_n}\})$, де для будь-якого $u \in U$, $X_u := g(\Theta, u)$, $\Xi = \bigotimes\limits_{u\in U}\Xi_u$, $u_1, \dots, u_n$ — довільна вибірка з U і кожна ймовірнісна міра $p_{u_1,\dots,u_n}$ на $\prod\limits_{i=1}^{n} X_{u_i}$, що визначає множину $P_{u_1,\dots,u_n}$, така, що для кожного $A^{(n)} \in \prod\limits_{i=1}^{n}\Xi_{u_i}$ і деякої $p \in P \in P(\Theta)$*

$$p_{u_1,\dots,u_n}(A^{(n)}) := p(\{\theta : (g(\theta, u_1), g(\theta, u_2), \dots, g(\theta, u_n)) \in A^{(n)}\}. \quad (4)$$

З означення зрозуміло, операція проектування параметричних моделей зі статистичними закономірностями однозначна, тобто у кожної параметричної МСЗР зі статистичною закономірністю є єдина проекція.

Теорема 1. *Будь-яка параметрична МСЗР зі статистичною закономірністю (X, Θ, U, g, P), де відображення наслідків g — (Σ, Ξ_u)-вимірне для кожного $u \in U$, є поданням своєї проекції.*

Доведення. Нехай $M = (X, \Theta, U, g, P) \in \mathbb{M}$, а $\hat{M} = (X, U, \bigcup\limits_{u\in U}(u, X_u), \{P_{u_1,\dots,u_n}\})$ є її проекцією. Очевидно, сімейство множин $\{P_{u_1,\dots,u_n}\}$ задовольняє умови узгодженості. Обгрунтування потребує лише те, що сімейство $\{P_{u_1,\dots,u_n}\}$ є сімейством статистичних закономірностей. А це рівнозначне тому, що коли ймовірнісна міра *p* пробігає замкнуту в топології $\tau(\Theta)$ множину *P*, то для будь-якого $n \in N$ і будь-якої вибірки $u_1, ..., u_n$ з множини U ймовірнісні заходи $P_{u_1,\dots,u_n}$будуть утворювати замкнуту в топології $\tau(\prod_{i=1}^{n} X_{u_i})$ множину $P_{u_1,...,u_n}$. Дійсно, якщо припустити протилежне — для деякої вибірки$u_1, u_2, ..., u_n$ з множини U множина $PF(\prod_{i=1}^{n} X_{u_i})\backslash P_{u_1,...,u_n}$ не буде відкритою в топології $\tau(\prod_{i=1}^{n} X_{u_i})$, то існує така ймовірнісна міра $p_{u_1,...,u_n}$ з множини $PF(\prod_{i=1}^{n} X_{u_i})$, яка не входить в множину $P_{u_1,...,u_n}$, що для будь-яких $k, m \in N$ знайдеться ймовірнісна міра $p_{k,u_1,...,u_n}$ з множини $P_{u_1,...,u_n}$, для якої за будь-яких $f_1, f_2, ..., f_m \in B_{\bigotimes_{i=1}^{n}\Xi_{u_i}}(\prod_{i=1}^{n} X_{u_i})$

$$|\int\limits_{\prod_{i=1}^{n} X_{u_i}} f_j(x_{u_1},\dots,x_{u_n})p_{k,u_1,...,u_n}(d(x_{u_1},\dots,x_{u_n}))- \int\limits_{\prod_{i=1}^{n} X_{u_i}} f_j(x_{u_1},\dots,x_{u_n})p_{u_1,...,u_n}(d(x_{u_1},\dots,x_{u_n}))| < \frac{1}{k},\ \ j=\overline{1,m}. \quad (5)$$

Нехай $Y := \{(g(\theta,u_1),...,g(\theta,u_n)) : \theta \in \Theta\}$. З огляду на (Σ, Ξ_u) — вимірність відображення $g(\theta,u)$ при будь-яких $u \in U$, множини Y є $\bigotimes_{i=1}^{n}\Xi_{u_i}$-вимірними. Тоді для будь-якої ймовірнісної міри $q_{u_1,...,u_n}$, заданої на вимірному просторі $(\prod_{i=1}^{n} X_{u_i}, \bigotimes_{i=1}^{n}\Xi_{u_i})$, зосередженої на множині Y, і будь-якої функції $f \in B_{\bigotimes_{i=1}^{n}\Xi_{u_i}}(\prod_{i=1}^{n} X_{u_i})$ маємо

$$\int\limits_{\prod_{i=1}^{n} X_{u_i}} f(x_{u_1},\dots,x_{u_n})\times q_{u_1,...,u_n}(d(x_{u_1},\dots,x_{u_n})) = \int\limits_{Y} f(x_{u_1},\dots,x_{u_n})q_{u_1,...,u_n}(d(x_{u_1},\dots,x_{u_n}))+ + \int\limits_{\prod_{i=1}^{n} X_{u_i}\backslash Y} f(x_{u_1},\dots,x_{u_n})\times q_{u_1,...,u_n}(d(x_{u_1},\dots,x_{u_n})). \quad (6)$$

Але через обмеженість f знайдеться таке число μ, що $|f(x_{u_1},\dots,x_{u_n})| \leqslant \mu$ для будь-яких $(x_{u_1},\dots,x_{u_n}) \in \prod_{i=1}^{n} X_{u_i}$. А отже,

$$\Big|\int\limits_{\prod_{i=1}^{n} X_{u_i}\backslash Y} f(x_{u_1},\dots,x_{u_n})\times q_{u_1,...,u_n}(d(x_{u_1},\dots,x_{u_n}))\Big| \leqslant \leqslant \mu \int\limits_{\prod_{i=1}^{n} X_{u_i}\backslash Y} q_{u_1,...,u_n}(d(x_{u_1},\dots,x_{u_n})) = = \mu q(\prod_{i=1}^{n} X_{u_i}\backslash Y) = 0. \quad (7)$$

Тоді маємо з (7) :

$$\int\limits_{\prod_{i=1}^{n} X_{u_i}} f(x_{u_1},\dots,x_{u_n})q_{u_1,...,u_n}(d(x_{u_1},\dots,x_{u_n})) = = \int\limits_{Y} f(x_{u_1},\dots,x_{u_n})q_{u_1,...,u_n}(d(x_{u_1},\dots,x_{u_n})) = = \int\limits_{\Theta} f(g(\theta,u_1),\dots,g(\theta,u_n))q(d\theta), \quad (8)$$

де для будь-якого $B \in \Sigma$

$$q(B) := q_{u_1,...,u_n}(\{(g(\theta,u_1),\dots,g(\theta,u_n)) : \theta \in B\}).$$

Отже, скориставшись рівністю (8) для будь-яких мір p_k *і* p на Θ, що задовольняють співвідношення (5) щодо відповідних мір $p_{k,u_1,...,u_n}$ і $p_{u_1,...,u_n}$ на $\prod_{i=1}^{n} X_{u_i}$, нерівність (6) можна переписати так:

$$|\int\limits_{\Theta} f_j(g(\theta,u_1),...,g(\theta,u_n))p_k(d\theta)- \int\limits_{\Theta} f_j(g(\theta,u_1),\dots,g(\theta,u_n))p(d\theta)| < \frac{1}{k},\ j=\overline{1,m}. \quad (9)$$

Тепер визначимо на множині Θ відношення еквівалентності таким чином, що для будь-яких $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$

$$\theta_1 \sim \theta_2 :=\Longleftrightarrow \theta_1(u_i) = \theta_2(u_i),\ \ i=\overline{1,n}. \quad (10)$$

Транзитивність, симетричність, рефлексивність певного співвідношення (10) відповідності очевидна. Позначимо клас еквівалентності елемента θ з фактор-множини $\Theta/_\sim$ через $\widetilde{\theta}$ (Проекція елемента θ щодо еквівалентності $(\sim)$), тобто $\Theta/_\sim = \{\widetilde{\theta} :$

$\theta \in \Theta\} := \widetilde{\Theta}$. Відповідно, алгебру, породжену алгеброю Σ при цьому проектуванні, позначимо $\widetilde{\Sigma}$, а її елемент, що є проекцією елемента $B \in \Sigma$, — через $\widetilde{B}$. Зрозуміло, алгебра $\widetilde{\Sigma}$ ізоморфна алгебрі $\bigotimes\limits_{i=1}^{n} \Xi_{u_i}$.

Тоді для будь-якої міри $p \in PF(\Theta)$ можна визначити міру $\widetilde{p} \in PF(\widetilde{\Theta})$ так, що для будь-яких $B \in \Sigma$

$$\widetilde{p}(\widetilde{B}) := p(B). \qquad (11)$$

При цьому довільна множина мір $P \subseteq PF(\Theta)$ замкнена в топології $\tau(\Theta)$ тоді і тільки тоді, коли відповідна йому множина мір $\widetilde{P} = \{\widetilde{p} : p \in P\}$, де p і $\widetilde{p}$ пов'язані співвідношенням (11), замкнене в фактор-топології відносно відповідності $(\sim)$, що збігається з $\tau(\widetilde{\Theta})$.

Далі визначимо функції $F_j,\ \ j = \overline{1,m}$ на $\widetilde{\Theta}$ так, що для будь-яких $\widetilde{\theta} \in \widetilde{\Theta}$

$$F_j(\widetilde{\Theta}) := f_j(g(\theta, u_1), g(\theta, u_2), ..., g(\theta, u_n)). \quad (12)$$

Коректність даного визначення випливає зі співвідношення (10). При цьому для кожного $j = \overline{1,m}$ функція F_j пробігає всю множину $B_{\widetilde{\Sigma}}(\widetilde{\Theta})$, коли функція f_j пробігає множину $B_{\bigotimes\limits_{i=1}^{n} \Xi_{u_i}}(\prod\limits_{i=1}^{n} X_{u_i})$, з огляду на (Σ, Ξ_u)-вимірність відображення $g(\theta, u),\ \forall u \in U$ і того, що $g(\Theta, u_i) = X_{u_i},\ i = \overline{1,n}$.

Тепер співвідношення (9) можна переписати

$$|\int\limits_{\widetilde{\Theta}} F_j(\widetilde{\theta})\widetilde{p}_k(d\widetilde{\theta}) - \int\limits_{\widetilde{\Theta}} F_j(\widetilde{\theta})\widetilde{p}(d\widetilde{\theta})| < \frac{1}{k}, \ \ j = \overline{1,m}.$$

Таким чином, послідовність мір $\{\widetilde{p}_k, k \in N\}$ сходяться в топології $\tau(\widetilde{\Theta})$ до міри $\widetilde{p}$, а отже, відповідна їй послідовність мір $\{p_k, k \in N\}$ на Θ сходитися в топології $\tau(\Theta)$ до міри p.

Оскільки міри $p_{k,u_1,...,u_n} \in P_{u_1,...,u_n},\ \forall k \in N$, то міри, що їх визначають, за співвідношенням (5), p_k, належать статистичній закономірності P. Тоді через замкнутість у топології $\tau(\Theta)$ множини P і збіжності в топології $\tau(\Theta)$ послідовності $\{p_k, k \in N\}$ до міри p, то і міра p належить статистичній закономірності P. А отже, міра $p_{u_1,...,u_n}$ визначається, згідно зі співвідношенням (5), мірою p з P, тобто $p_{u_1,...,u_n} \in P_{u_1,...,u_n}$, що суперечить припущенню.

Теорема 2. *Будь-яка непараметрична МСЗР зі статистичними закономірностями допускає деяке представлення.*

Доведення. Припустимо, що задана деяка непараметрична МСЗР зі статистичними закономірностями $\hat{M} = (X, U, \bigcup\limits_{u \in U} (u, X_u), \{P_{u_1,...,u_n}\})$, де $(u, X_u) := \{(u, x) : x \in X_u\}$. Покажемо, що для $\hat{M}$ існує представлення $M = (X', \Theta, U', g, P)$. Очевидно, що $X = X'$ і $U = U'$. За простір Θ візьмемо простір всіх таких відображень θ, заданих на U зі значеннями в X, що $\Theta(u) \in X_u$. Відображення g визначимо як $g(\theta, u) = \theta(u)$. Тим самим четвіркою (X, Θ, U, g) ми задали представлення ССЗР $\hat{Z} = (X, U, \bigcup\limits_{u \in U} (u, X_u))$, де $(u, X_u) := \{(u, x) : x \in X_u\}$.

Далі ми можемо визначити на алгебрі циліндричних множин $\mathbb{C}$ простору Θ для будь-якої ймовірнісної міри $p_{u_1,...,u_n} \in P_{u_1,...,u_n}$ функцію множин $p(C),\ C \in \mathbb{C}$, поклавши

$$p(C) := p_{u_1,...,u_n}(A^{(n)}), \qquad (13)$$

якщо C є циліндричною множиною з основою $A^{(n)}$ над координатами $u_1, ..., u_n$. Умови узгодженості забезпечують коректність визначення функції $p(C),\ C \in \mathbb{C}$. Нехай $C_k,\ k = \overline{1,m}$ — послідовність циліндричних множин. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що вони задані основами $A_k^{(n)}$ над однією і тією ж послідовністю координат $u_1, ..., u_n$. Алгебраїчним операціям над множинами C_k відповідають ті самі дії над основами $A_k^{(n)}$. Оскільки ймовірнісна міра $p_{u_1,...,u_n}$ адитивна на $\bigotimes\limits_{i=1}^{n} \Xi_{u_i}$, то звідси випливає, що функція множин $p(C),\ C \in \mathbb{C}$ адитивна на $\mathbb{C}$. Коли ймовірнісні міри $p_{u_1,...,u_n}$ пробігають замкнуту в топології $\tau(\prod\limits_{i=1}^{n} X_{u_i})$ множину $P_{u_1,...,u_n}$, то сімейство ймовірнісних мір p буде утворювати деяку замкнуту в топології $\tau(\Theta)$ множину P. Справді, припустивши протилежне, тобто множина $PF(\Theta) \backslash P$ не буде відкритою в топології $\tau(\Theta)$, отримаємо існування такої ймовірнісної міри p з множини $PF(\Theta)$, що не належить до множини P, що $\forall k \in N$ знайдеться ймовірнісна міра p_k з множини P, яка для будь-яких функцій $f_1, f_2, ..., f_m \in B_{\mathbb{C}}(\Theta),\ m \in N$ задовольняє нерівності

$$|\int\limits_{\Theta} f_j(\theta)p_k(d\theta) - \int\limits_{\Theta} f_j(\theta)p(d\theta)| < \frac{1}{k}, \ \ j = \overline{1,m}. \qquad (14)$$

Зафіксувавши вибірку $u_1, u_2, ..., u_n$ з множини U, розглянемо довільну сукупність таких m функцій $f'_1, f'_2, ..., f'_m$, що, якщо $\widetilde{\theta_1} = \widetilde{\theta_2}$, то $f'_j(\theta_1) = f'_j(\theta_2)$ для будь-яких $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ і $j = \overline{1,m}$, де еквівалентність $(\sim)$ визначається за (10).

Якщо для кожної такої функції $f'_j,\ j = \overline{1,m}$ визначити функцію F'_j на Θ, вважаючи $F'_j(\widetilde{\theta}) :=$

$f_j'(\theta)$ для будь-яких $\theta \in \Theta$, через означення функції f_j', то $F_j' \in B_{\widetilde{\mathbb{C}}_{u_1,\ldots,u_n}}(\widetilde{\Theta})$, де $\widetilde{\mathbb{C}}_{u_1,\ldots,u_n}$ — проекція алгебри $\mathbb{C}_{u_1,\ldots,u_n}$ щодо еквівалентності $(\sim)$. При цьому зрозуміло, що функція F_j' пробігає всю множину $B_{\widetilde{\mathbb{C}}_{u_1,\ldots,u_n}}(\widetilde{\Theta})$, коли функція f_j пробігає множину $B_{\mathbb{C}}(\Theta)$.

Тоді для будь-якої функції $F_j' \in B_{\widetilde{\mathbb{C}}_{u_1,\ldots,u_n}}(\widetilde{\Theta})$, $j = \overline{1,m}$, через співвідношення (14), отримаємо, що

$$|\int\limits_{\widetilde{\Theta}} F_j'(\widetilde{\theta})\widetilde{p}_k(d\widetilde{\theta}) - \int\limits_{\widetilde{\Theta}} F_j'(\widetilde{\theta})\widetilde{p}(d\widetilde{\theta})| < \frac{1}{k}, \qquad (15)$$

де міри $\widetilde{p_k}, \widetilde{p}$ відповідають мірам $P_k,\ p$, за співвідношенням (11).

Або, враховуючи ізоморфізм множин $\widetilde{\Theta}$ і $\prod\limits_{i=1}^{n} X_{u_i}$, з означення множини Θ, а також визначення алгебри $\widetilde{\mathbb{C}}_{u_1,\ldots,u_n}$ і алгебри $\bigotimes\limits_{i=1}^{n} \Xi_{u_i}$ маємо: для будь-яких функцій $F_1'', F_2'', \ldots, F_m'' \in B_{\bigotimes\limits_{i=1}^{n} \Xi_{u_i}}(\prod\limits_{i=1}^{n} X_{u_i}), m \in N$

$$|\int\limits_{\prod\limits_{i=1}^{n} X_{u_i}} F_j''(x_{u_1}, \ldots, x_{u_n}) \times$$

$$\times\, p_{k,u_1,\ldots,u_n}(d(x_{u_1}, \ldots, x_{u_n})) -$$

$$-\int\limits_{\prod\limits_{i=1}^{n} X_{u_i}} F_j''(x_{u_1}, \ldots, x_{u_n}) \times$$

$$\times\, p_{u_1,\ldots,u_n}(d(x_{u_1}, \ldots, x_{u_n}))| < \frac{1}{k}, \quad j = \overline{1,m}.$$

Це випливає з нерівності (15) при $F_j''(x_{u_1}, \ldots, x_{u_n}) := F_j'(\widetilde{\theta}), j = \overline{1,m}$, де $\widetilde{\theta}$ таке, що $\theta(u_i) = x_{u_i},\ i = \overline{1,n}$, для будь-яких $(x_{u_1}, \ldots, x_{u_n}) \in \prod\limits_{i=1}^{n} X_{u_i}$, заходи $p_{k,u_1,\ldots,u_n},\ p_{u_1,\ldots,u_n}$ визначаються, відповідно до мір P_k, p, за (11).

Таким чином, послідовність мір $\{p_{k,u_1,\ldots,u_n},\ k \in N\}$ сходиться в топології $\tau(\prod\limits_{i=1}^{n} X_{u_i})$ до міри $p_{u_1,\ldots,u_n}$.

Оскільки міри $p_k,\ \forall k \in N$ належать множині P, то міри, що визначають їх за співвідношенням (6), $P_{k,u_1,\ldots,u_n}$, за умовою, належать статистичній закономірності $P_{u_1,\ldots,u_n}$. Тоді через замкнутість множини $P_{u_1,\ldots,u_n}$ в топології $\tau(\prod\limits_{i=1}^{n} X_{u_i})$ і збіжність у цій топології послідовності $\{p_{k,u_1,\ldots,u_n}, k \in N\}$ в міру $p_{u_1,\ldots,u_n}$, міра $p_{u_1,\ldots,u_n}$ також належить статистичній закономірності $P_{u_1,\ldots,u_n}$. А отже, міра p, що визначається співвідношенням (6), мірою $P_{u_1,\ldots,u_n}$ з $P_{u_1,\ldots,u_n}$, тобто $P \in P$, що суперечить припущенню.

Таким чином, подання для довільної непараметричної МСЗР вказано.

Теорему доведено.

Висновок

Отриманий результат відповідає на зазначене питання у праці [1] і дає змогу, аналізуючи систему прийняття рішень і не зменшуючи загальності, вважати її ситуацію параметричною.

1. Иваненко В. И. Проблема неопределенности в задачах принятия решений / В. И. Иваненко, В. А. Лабковский. — К.: Наук. думка, 1990. — С. 135.
2. Михалевич В. М До невизначеності в непараметричних задачах прийняття рішень / В. М. Михалевич // Наукові записки НаУКМА. Фізико-математичні науки. — Т. 100 — 2010. — С. 11–30.
3. Михалевич В. М До моделювання ситуацій задач прийняття рішень / В. М. Михалевич // Наукові записки НаУКМА. Комп'ютерні науки. —Т. 125 — 2011. — С. 27—40.
4. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. М.: Наука, 1981, — 544 с.

V. Mykhalevych

TO THE MODELING OF THE SITUATIONS OF DECISION-MAKING PROBLEM

The concepts of schema and model of the situation in the problem of making solutions are introduced. The relationship of parametric and nonparametric schemes, as well as models of situations are examined. At the same time accident situations is considered in a more general form than stochastic - it describes the pattern of so-called statistical regularity.

Keywords: decision problem, parametric situation, nonparametric situation, the scheme of the situation, model of the situation, statistical regularity.