УДК 519.4

Боднарчук Ю. В., Григорець О. П.

СТРУКТУРА ПІДАЛГЕБР КОНТАКТНОЇ АЛГЕБРИ ЛІ [1]

Показано, що підалгебра, утворена недодатними компонентами градуювання, міститься лише в одній власній підалгебрі контактної алгебри Лі.

Ключові слова: контактна алгебра, контактна форма, поліноміальні диференціювання.

За [1], до алгебр Лі поліноміального росту Картанівського типу належать:

1) алгебра Лі диференціальних операторів виду
$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial}{\partial x_i},$$
де a_i — поліноми;

2) підалгебра диференціальних операторів, що зберігають диференціальну форму об'єму $v = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ (спеціальна алгебра);

3) підалгебра алгебри 1), що складається з операторів, дія яких на форму v, зводиться до множення її на константу з поля K;

4) при парній розмірності $n = 2m$ підалгебра алгебри 1, що зберігає диференціальну форму
$$\gamma = \sum_{i=1}^{m} dx_i \wedge dx_{m+i}$$
(гамільтонова алгебра);

5) підалгебра алгебри 1, що складається з операторів, дія яких на форму γ, зводиться до множення її на константу з поля K;

6) для непарної розмірності $n = 2m+1$, підалгебра алгебри 1), що складається з операторів, дія яких на форму
$$dx_n + \sum_{i=1}^{m}(x_i dx_{m+i} - x_{m+i}dx_i)$$
зводиться до множення її на поліном з $K[x_1,\ldots,x_n]$ (контактна алгебра).

2,–5, алгебри відповідають конкретним групам поліноміальних перетворень афінних просторів, а перша алгебра — групі формальних вектор-рядів. Дещо осторонь стоїть контактна алгебра, яка відповідає групі контактних перетворень (такими є, зокрема, перетворення Лежандра, див. [2]). У працях [3]–[5] для алгебр 2,–5, досліджено щодо проміжних підалгебр, які містять недодатні або нульові однорідні компоненти, природного поліноміального градуювання. Завдяки теоремам І. Шафаревича [6] для нескінченновимірних алгебраїчних груп можна застосувати класичний лієвський підхід і описати проміжні замкнені підгрупи. Зокрема, довести алгебраїчну максимальність афінної групи в групі оборотних поліноміальних перетворень (афінній групі Кремони).

Мета цієї роботи — виконання аналогічних досліджень для контактної алгебри Лі K_3, яка реалізується диференціюваннями виду
$$D = f(x,y,z)\frac{\partial}{\partial x} + g(x,y,z)\frac{\partial}{\partial y} + h(x,y,z)\frac{\partial}{\partial z}, \quad (1)$$
де f, g, h — поліноми, які задовольняють диференціальним рівнянням
$$\frac{\partial h}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial x} - g + x\frac{\partial g}{\partial x} + y\left(\frac{\partial h}{\partial z} - y\frac{\partial f}{\partial z} + x\frac{\partial g}{\partial z}\right) = 0; \quad (2)$$
$$\frac{\partial h}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial y} + f + x\frac{\partial g}{\partial y} - x\left(\frac{\partial h}{\partial z} - y\frac{\partial f}{\partial z} + x\frac{\partial g}{\partial z}\right) = 0. \quad (3)$$
Ці рівняння ми будемо називати контактними співвідношеннями. Позначимо ліві частини рівностей (2), (3) через $R_1(D), R_2(D)$, відповідно.

Базис контактної алгебри

Лема 1. *Для пари мономів виду $P_1 = r_1 x^{k-1} y^{l+1} z^m$, $P_2 = r_2 x^k y^l z^m$ існують $a, b \in K$ такі, що для диференціювання*
$$D = a x^{k-1} y^{l+1} z^m \frac{\partial}{\partial y} + b x^k y^{l+1} z^m \frac{\partial}{\partial z}$$
має місце
$$P_1 + R_1(D) = m(a+b)x^k y^{l+2} z^{m-1}; \quad (4)$$
$$P_2 + R_2(D) = -m(a+b)x^{k+1} y^{l+1} z^{m-1}. \quad (5)$$

[1] Дослідження частково підтримано Міжнародним благодійним фондом відродження Києво-Могилянської академії.

Доведення. Позначимо через D_1, D_2 доданки диференціювання D. Прямі обчислення дають

$$R_1(D_1) = (k-2)x^{k-1}y^{l+1}z^m + mx^k y^{l+2} z^{m-1},$$

$$R_1(D_2) = kx^{k-1}y^{l+1}z^m + mx^k y^{l+2}z^{m-1},$$

$$R_2(D_1) = (l+1)x^k y^l z^m - mx^{k+1}y^{l+1}z^{m-1},$$

$$R_2(D_2) = (l+1)x^k y^l z^m - mx^{k+1}y^{l+1}z^{m-1}.$$

Матриця, складена з коефіцієнтів перших мономів, має вигляд $\begin{pmatrix} k-2 & k \\ l+1 & l+1 \end{pmatrix}$ і є очевидно невиродженою, а отже, існує єдиний розв'язок системи

$$\begin{pmatrix} k-2 & k \\ l+1 & l+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}.$$

Це завершує доведення.

Звернемо увагу на те, що до мономів у правих частинах (4), (5) також можна застосувати лему. Отже, $m+1$ кратне застосування леми дає таке твердження.

Наслідок 1. *Для пари мономів виду* $P_1 = r_1 x^{k-1}y^{l+1}z^m$, $P_2 = r_2 x^k y^l z^m$ *існують послідовності* $a_i, b_i \in K$, $i = 0, 1, 2, \ldots m$, *такі, що для диференціювання*

$$\overline{D} = \sum_{i=0}^{m} \left(a_i x^{k-1+i} y^{l+1+i} z^{m-i} \frac{\partial}{\partial y} + \right. \\ \left. + \, b_i x^{k+i} y^{l+1+i} z^{m-i} \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (6)$$

мають місце

$$P_1 + R_1(\overline{D}) = 0, \quad P_2 + R_2(\overline{D}) = 0. \quad (7)$$

Лема 2. *Для будь-якого монома* $x^k y^l z^m$ *існує диференціювання виду*

$$x^k y^l z^m \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{i=0}^{m} a_i x^{k-1+i} y^{l+1+i} z^{m-i} \frac{\partial}{\partial y} + \\ + \sum_{i=0}^{m} b_i x^{k+i} y^{l+1+i} z^{m-i} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (8)$$

для якого виконуються контактні співвідношення.

Доведення. Прямі обчислення дають суми двох мономів:

$$R_1\left(x^k y^l z^m \frac{\partial}{\partial x}\right) = -kx^{k-1}y^{l+1}z^m - mx^k y^{l+2} z^{m-1};$$

$$R_2\left(x^k y^l z^m \frac{\partial}{\partial x}\right) = (1-l)x^k y^l z^m + mx^{k+1}y^{l+1}z^{m-1}.$$

До перших мономів у правих частинах P_1, P_2 ($\deg_z P_1 = \deg_z P_2 = m$) можна застосувати наслідок 1. Для других мономів P_1', P_2' (степеня $m-1$ по z) цей наслідок можна застосувати також. Сумуючи отримані формули (6) для обох пар мономів (P_1, P_2) та (P_1', P_2'), отримуємо потрібне диференціювання.

Лема 3. *Нехай*

$$D = b(x,y,z)\frac{\partial}{\partial y} + c(x,y,z)\frac{\partial}{\partial z}, \quad (9)$$

$$b(x,y,z) = u(x,y)z^{m_1} + \ldots,$$

$$c(x,y,z) = v(x,y)z^{m_2} + \ldots,$$

де $\deg_z b = m_1, \deg_z c(x,y,z) = m_2$, *а* $\ldots$ *позначає доданки, степінь яких по* z *менша за* m_1, m_2, *відповідно. Виконання обох нерівностей* $\deg_z R_1(D) < M, \deg_z R_2(D) < M$, *де* $M = \max\{m_1, m_2\}$ *можливе лише у випадках:*

1. $m_2 > m_1,\ \ v(x,y) = v = const \in K.$
2. $m_2 < m_1,\ \ u = a \cdot x,\ a \in K.$
3. $m_1 = m_2,\ \ u = u(x), v(x) = 2\int u(x)dx - xu.$

Доведення. Виділимо доданки степеня M по z в обох контактних співвідношеннях (2), (3). При $m_2 > m_1$ отримуємо, що вони знищуються лише за умови $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$, тобто, коли $v = const$. При $m_2 < m_1$ отримуємо $x\frac{\partial u}{\partial x} - u = 0, x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, звідки: $u = u(x)$, причому $u = a \times x$. У третьому випадку будемо мати

$$\frac{\partial v}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial x} - u = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} + x\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Диференціювання першого рівняння по y, а другого по x і віднімання отриманих рівнянь дають $2\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, звідки: $u = u(x)$. Тоді з другого рівняння випливає, що і поліном v залежить лише від x. Розв'язавши перше диференціальне рівняння щодо $v = v(x)$, завершуємо розгляд цього випадку.

Для $D_3 = z^m \frac{\partial}{\partial z}$ будемо мати $R_1(D_3) = mvyz^{m-1}$, $R_2(D_3) = mvxz^{m-1}$. Застосовуючи наслідок 1 до отриманих мономів, підстановкою $k = 1, l = 0, m := m-1$ у формулу (6), отримуємо диференціювання

$$z^m \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{i=0}^{m} \left(a_i x^i y^{1+i} z^{m-i-1} \frac{\partial}{\partial y} + \right. \\ \left. + b_i x^{i+1} y^{i+1} z^{m-i-1} \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad (10)$$

яке задовольняє обом контактним співвідношенням. Випадок 2 реалізується для диференціювання $D_4 = xz^m\frac{\partial}{\partial y}$, при цьому $R_1(D_4) = mx^2yz^{m-1}, R_2(D_4) = -mx^3z^{m-1}$. Знову застосовуємо наслідок 1, при цьому покладемо $k = 3, l = 0, m := m-1$ у формулі (6) і дістанемо диференціювання

$$xz^m\frac{\partial}{\partial y} + \sum_{i=0}^{m}\left(a_ix^{2+i}y^{1+i}z^{m-i-1}\frac{\partial}{\partial y}+\right.$$
$$\left.+b_ix^{3+i}y^{1+i}z^{m-i-1}\frac{\partial}{\partial z}\right), \quad (11)$$

яке задовольняє контактним співвідношенням.

Якщо обрати $u(x) = x^kz^m, v(x) = \frac{1-k}{1+k}x^{k+1}z^m$, то для відповідного диференціювання $\bar{D} = x^kz^m\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1-k}{1+k}x^{k+1}z^m\frac{\partial}{\partial z}$ справджується випадок 3 попередньої леми. Для нього будемо мати $R_1(\bar{D}) = \frac{2m}{k+1}x^{k+1}yz^{m-1},\ R_2(\bar{D}) = -\frac{2m}{k+1}x^{k+2}z^{m-1}$. Діємо аналогічно: покладемо $k := k+2, l = 0$ у формулі (6) й отримуємо диференціювання

$$x^kz^m\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1-k}{1+k}x^{k+1}z^m\frac{\partial}{\partial z}+$$
$$+\sum_{i=0}^{m}\left(a_ix^{k+1+i}y^{1+i}z^{m-i-1}\frac{\partial}{\partial y}+\right.$$
$$\left.+b_ix^{k+2+i}y^{1+i}z^{m-i-1}\frac{\partial}{\partial z}\right), \quad (12)$$

яке задовольняє контактним співвідношенням.

Теорема 1. *Диференціювання видів* (8), (10), (11), (12) *утворюють базис контактної алгебри.*

Доведення. Очевидно, що будь-яке диференціювання з контактної алгебри можна подати як лінійну комбінацію диференціювань виду (8) плюс диференціювання D_0 виду (9), яке задовольняє контактним співвідношенням, а отже, для нього виконано умови леми 3. Покажемо, що будь-яке таке диференціювання є лінійною комбінацією диференціювань (10), (11), (12). Застосуємо індукцію по M.

База індукції $M = 0$. У випадках 1, 2 леми диференціювання D_0 мають вигляд $D_0 = r_1\frac{\partial}{\partial z}, D_0 = r_2x\frac{\partial}{\partial y}, r_1, r_2 = const$ і, очевидно, пропорційні диференціюванням (10), (11). У випадку 3 $D_0 = u(x)\frac{\partial}{\partial y} + v(x)\frac{\partial}{\partial z}$, яке є лінійною комбінацією диференціювань $x^k\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1-k}{1+k}x^{k+1}\frac{\partial}{\partial z}$ виду (12) та диференціювання $\frac{\partial}{\partial z}$ виду (10). Очевидно, що для довільного диференціювання D_0 виду (9) завжди можна підібрати лінійну комбінацію D' диференціювань (10), (11), (12) так, що степінь по z диференціювання $D_0 - D'$ зменшиться, а отже, можна застосувати припущення індукції.

Градуювання та коренева структура контактної алгебри

На відміну від перших п'яти алгебр, градуювання контактної алгебри вводиться особливим чином:

$$\deg z = 2, \deg\frac{\partial}{\partial z} = -2,$$

інші змінні та частинні похідні градуюються стандартним чином числами $1, -1$. При цьому, як бачимо, всі мономи довільного базисного елемента мають однаковий степінь, а отже, всі базисні диференціювання є однорідними. При цьому однорідна компонента найменшого степеня -2 породжується диференціюванням $b_0 = \frac{\partial}{\partial z}$, компонента степеня -1 породжується елементами $b_1 = \frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial z}, b_2 = \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}$, а компонента нульового степеня породжується елементами $a_1 = x\frac{\partial}{\partial y}, a_2 = y\frac{\partial}{\partial x}$ та елементами

$$\tau_1 = x\frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial z}, \tau_2 = y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z},$$

які породжують дотичну алгебру двовимірного тору. Сума вказаних недодатних компонент є підалгеброю, яку ми будемо позначати $K_3^{\leq 0}$.

Ліва дія операторів $ad\tau_1, ad\tau_2$ на алгебрі, зокрема на базисних елементах, дає кореневий розклад алгебри.

Теорема 2. *Для контактної алгебри має місце кореневий розклад*

$$K_3 = \bigoplus_{(\lambda_1,\lambda_2)} K_{(\lambda_1,\lambda_2)},$$

де $\lambda_1, \lambda_2 \geq -1$ *і є цілими, кореневі простори* $K_{(\lambda_1,\lambda_2)}$ *породжуються базисними елементами* (8), *для яких* $\left\{\begin{array}{lcl} k+m-1 & = & \lambda_1 \\ l+m & = & \lambda_2 \end{array}\right.$, *а також одним з базисних елементів:* (10), *якщо* $\lambda_1 = \lambda_2 = m-1$, (11), *якщо* $\left\{\begin{array}{lcl} m+1 & = & \lambda_1 \\ m-1 & = & \lambda_2 \end{array}\right.$, (12), *якщо* $\left\{\begin{array}{lcl} k+m & = & \lambda_1 \\ m-1 & = & \lambda_2 \end{array}\right.$.

Як бачимо, всі кореневі простори є скінченновимірними. Звернемо увагу також на те, що $\lambda_1 + \lambda_2 + 1$ збігається зі степенем однорідності базисних елементів, які містить кореневий простір.

Розглянемо множину диференціювань виду (1), де поліноми f, g, h не залежать від z. Легко переконатися, що ці диференціювання утворюють власну підалгебру K_3^s, до якої належать усі однорідні компоненти степенів $-2, -1, 0$ контактної алгебри. По-іншому K_3^s можна охарактеризувати як підалгебру диференціювань, що анулюють форму $dz + xdy - ydx$.

Теорема 3. *Будь-яка власна підалгебра K_3, що містить $K_3^{\leq 0}$, збігається з K_3^s.*

Доведення. Для проміжної L алгебри також має місце кореневий розклад $L = \oplus_{(\lambda_1,\lambda_2)} L_{(\lambda_1,\lambda_2)}$. Нехай $D \in L_{(\lambda_1,\lambda_2)}, D \neq 0$. Послідовними застосуваннями операторів ada_1 або ada_2 до D можна отримати один з базисних елементів алгебри K_3 (він буде належати іншому кореневому підпростору). До нього можна застосувати потрібну кількість разів оператори adb_0, adb_1, adb_2 й отримати базисні елементи з компоненти степеня 1. Якщо серед отриманих базисних елементів буде диференціювання $z\frac{\partial}{\partial y} + xz\frac{\partial}{\partial z}$, то, використовуючи ada_1, ada_2, ми отримаємо всі базисні елементи однорідної компоненти степеня 1, а добутки елементів цієї компоненти породжують всю контактну алгебру. Як бачимо, вказаний базисний елемент неможливо отримати за допомогою ada_1, ada_2 з інших, а отже, в цьому випадку будемо мати $L = K_3^s$.

1. Кац В. Г. Простые неприводимые градуированные алгебры Ли конечного роста / В. Г. Кац // Известия АН СССР Сер. Мат. — № 32. — 1968. — 1923 –1967.
2. Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике / Н. Х. Ибрагимов. — М. : Наука, 1983. — 281 с.
3. Bodnarchuk Yu. Some extreme properties of the affine group as an automorphism group of the affine space / Yu. Bodnarchuk // Contribution to General Algebra. — 2001. — N. 13. — P. 15–29.
4. Боднарчук Ю. В. Про структуру замкнених підгруп афінної групи Кремони, що містять SL_n / Ю. В. Боднарчук // Наукові записки НаУКМА. Фізико-математичні науки. — 2001. — Т. 19. — С. 9–12.
5. Боднарчук Ю. В. Структура замкнених надгруп Sp_{2n} у групі поліноміальних автоморфізмів симплектичного простору/ Ю. В. Боднарчук // Доп. НАН України. — 2003. — №. 2. — С. 15–21.
6. Шафаревич И. Р. О некоторых бесконечномерных группах II / И. Р. Шафаревич // Изв. Акад. Наук, Сер. матем. — 1981. — Т. 1, № 2. — С. 214–226.

Yu. Bodnarchuk, O. Grygorets

SUBALGEBRAS STRUCTURE OF THE CONTACT LIE ALGEBRA

It is proven that a subalgebra formed by non-positive graded components belongs to only one a proper subalgebra of the contact Lie algebra.
Keywords: contact algebra, contact form, polinomial derivations.