**УДК 519.11**

*Гердій О. Ю.*

# УЗАГАЛЬНЕНИЙ БІОТОПНИЙ ПРОСТІР

*У статті введено узагальнення біотопного простору. Доведено, що таке узагальнення є n-напівметричним простором. Охарактеризовано групу ізометрій цього простору та розглянуто деякі її властивості.*

***Ключові слова:*** $n$-напівметрика, біотопний простір, ізометрія.

## Вступ

У 1930-х роках в [2] було введено поняття $n$-метрики як узагальнення понять метрики. У [4] було введено поняття $n$-напівметрики. Нагадаємо означення $n$-напівметричного простору.

Нехай $n$ — деяке натуральне число.

**Означення 1.** *$n$-напівметрикою заданою на множині $X$ називається функція $d$: $X^{n+1} \to \mathbb{R}^+$ для якої виконуються такі умови:*

1. *$d$ — повністю симетрична, тобто для довільних $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in X^{n+1}$ і кожної перестановки $\pi \in S_{n+1}$ чисел $1, \dots, n+1$ справедливою є рівність*

$$d(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \dots, x_{\pi(n+1)}) = \\ = d(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}).$$

2. *$d$ — задовольняє симплеціальну нерівність, тобто для довільних $x_1, x_2, \dots, x_{n+2} \in X^{n+1}$:*

$$d(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \leq \\ \leq \sum_{i=1}^{n+1} d(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{n+2}).$$

Множина $X$ із заданою на ній $n$-напівметрикою $d$ називається *$n$-напівметричним простором* і позначається $(X, d)$.

Метою цієї статті є узагальнення поняття біотопної метрики та дослідження деяких властивостей введеного $n$-напівметричного простору. Зокрема, для $n$-напівметричних просторів, за аналогією з метричними просторами, можна ввести поняття ізометрії. Як і для метричних просторів, всі ізометрії $n$-напівметричного простору утворюють групу. У цій статті буде охарактеризовано групу ізометрій $n$-напівметричного біотопного простору.

## Конструкція $n$-напівметричного біотопного простору

*Простір біотопів або біотопний простір* було введено у праці [5] для потреб математичної біології. Нехай $X$ — скінченна множина, $A_i$, $i = 1, 2$ — її підмножини. Простір $(2^X, d)$ з метрикою $d$, заданою такою рівністю:

$$d(A_1, A_2) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } A_1 \cup A_2 = \emptyset \\ \frac{|A_1 \triangle A_2|}{|A_1 \cup A_2|}, \text{ інакше} \end{cases}$$

називається біотопним.

Побудуємо $n$-напівметричний простір, що був би узагальненням біотопного метричного простору. Нехай $n \in N$. Розглянемо функцію $\delta : (2^X)^{n+1} \to \mathbb{R}^+$, визначену за таким правилом:

$$\delta(A_1, A_2, \dots, A_{n+1}) = \\ = \begin{cases} 0, \text{ якщо } \bigcup_{l=1}^{n+1} A_l = \emptyset \\ \frac{\sum_{1 \leq i < j \leq n+1} |A_i \triangle A_j|}{|\bigcup_{l=1}^{n+1} A_l|}, \text{ інакше} \end{cases},$$

де $A_i \in 2^X$.

**Теорема 1.** *Функція $\delta$ є $n$-напівметрикою на $2^X$.*

*Доведення.* При $n = 1$ простір $(X, \delta)$ — біотопний простір, для нього вже доведено його метричність. Тож, нехай $n \geq 2$.

Повна симетричність очевидна. Доведемо симплеціальну нерівність, тобто покажемо, що для довільних $A_1, A_2, \dots, A_{n+2} \in 2^X$ справедливою є нерівність:

$$\frac{\sum_{1 \leq i < j \leq n+1} |A_i \triangle A_j|}{|\bigcup_{l=1}^{n+1} A_l|} \leq \\ \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\sum_{1 \leq i < j \leq n+2, i \neq k, j \neq k} |A_i \triangle A_j|}{|\bigcup_{l=1, l \neq k}^{n+2} A_l|}. \quad (1)$$

Позначимо

$$y = |\bigcup_{l=1}^{n+1} A_l|, \quad z = |A_{n+2} \setminus \bigcup_{l=1}^{n+1} A_l|.$$

Тоді $|\bigcup_{l=1}^{n+1} A_l| + |A_{n+2} \setminus \bigcup_{l=1}^{n+1} A_l| = y + z$. Оскільки для кожного $k$, $1 \leq k \leq n$, $|\bigcup_{l=1, l\neq k}^{n+2} A_l| \leq |A_{n+2} \bigcup \cup_{l=1}^{n+1} A_l|$, то виконання нерівності (1) випливатиме з такої нерівності:

$$\frac{\sum_{1\leq i<j\leq n+1} |A_i \triangle A_j|}{y} \leq \leq \sum_{k=1}^{n+1} \frac{\sum_{1\leq i<j\leq n+2, i\neq k, j\neq k} |A_i \triangle A_j|}{y+z}. \quad (2)$$

Нерівність (2) можна переписати таким чином:

$$\frac{\sum_{1\leq i<j\leq n+1} |A_i \triangle A_j|}{y} \leq \leq \frac{(n-1) \times \sum_{1\leq i<j\leq n+1} |A_i \triangle A_j|}{y+z} + \frac{n \times \sum_{i=1}^{n+1} |A_i \triangle A_{n+2}|}{y+z}. \quad (3)$$

Оскільки $|A_i \triangle A_{n+2}| \geq z$, то, якщо виконуватиметься нерівність

$$\frac{\sum_{1\leq i<j\leq n+1} |A_i \triangle A_j|}{y} \leq \leq \frac{(n-1) \times \sum_{1\leq i<j\leq n+1} |A_i \triangle A_j|}{y+z} + \frac{n \times (n+1) \times z}{y+z},$$

виконуватиметься і (3), а отже, і (1).

Позначимо $\sum_{1\leq i<j\leq n+1} |A_i \triangle A_j| = x$. Тоді останню нерівність можна переписати у такому вигляді:

$$\frac{x}{y} \leq \frac{(n-1) \times x + n \times (n+1) \times z}{y+z}.$$

Звідки:

$$xz \leq (n-2)xy + yzn(n+1). \quad (4)$$

Оскільки $(n-2)xy \geq 0$, то з нерівності

$$xz \leq yzn(n+1)$$

випливатиме нерівність (4). Якщо $z = 0$, то остання нерівність, очевидно, виконується. Нехай $z \neq 0$. Покажемо, що виконується нерівність

$$x \leq yn(n+1),$$

тобто

$$\sum_{1\leq i<j\leq n+1} |A_i \triangle A_j| \leq n(n+1) |\bigcup_{l=1}^{n+1} A_l|. \quad (5)$$

Використовуючи рівність

$$|A \Delta B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|,$$

маємо:

$$\sum_{1\leq i<j\leq n+1} |A_i \triangle A_j| = = n \times \sum_{i=1}^{n+1} |A_i| - 2 \sum_{1\leq i<j\leq n+1} |A_i \cap A_j|.$$

Таким чином, нерівність (5) можна переписати як:

$$n \times \sum_{i=1}^{n+1} |A_i| - 2 \sum_{1\leq i<j\leq n+1} |A_i \cap A_j| \leq \leq n(n+1) \times |\bigcup_{l=1}^{n+1} A_l|.$$

Достатньо показати, що виконується нерівність:

$$n \times \sum_{i=1}^{n+1} |A_i| \leq n(n+1) \times |\bigcup_{l=1}^{n+1} A_l|.$$

Скоротивши на $n$, маємо:

$$\sum_{i=1}^{n+1} |A_i| \leq (n+1) \times |\bigcup_{l=1}^{n+1} A_l|,$$

що, очевидно, виконується. Таким чином, нерівність (5) справджується. Отже, виконується і нерівність (1), що і доводить теорему 1.

**Зауваження 1.** *Під час доведення було показано (нерівність (5)), що значення $n$-напівметрики $\delta$ не перевищує $n(n+1)$. Цю оцінку можна покращити до $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil \times \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$.*

## Ізометрії простору $(2^X, \delta)$

**Означення 2.** *Нехай $(X, d_X)$ та $(Y, d_Y)$ — $n$-напівметричні простори. Бієкція $f : X \to Y$ називається ізометрією $n$-напівметричних просторів $X$ і $Y$, якщо $\forall\, a_1, a_2, \ldots, a_{n+1} \in X$ виконується:*

$$(d_Y (f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_{n+1})) = d_X(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}).$$

Частковим випадком ізометрій є ізометрії з $X$ на $X$. Як легко помітити, множина всіх ізометрій з множини $X$ в $X$ з операцією суперпозиції утворюють групу. Розглянемо деякі властивості групи ізометрій узагальненого біотопного простору.

**Теорема 2.** *Нехай* $f$*:* $2^X \to 2^X$ *— ізометрія простору* $(X, \delta)$.
*Якщо* $|X|$*= 1, то є 2 ізометрії – а) тотожня, б)* $f(X)=\emptyset$*,* $f(\emptyset)=X$.
*Якщо* $1 < |X| < \infty$*, то справедливі такі твердження:*

1. *Множини, що перетинаються, при відображенні* $f$ *переходять у множини, що перетинаються. Множини, що не перетинаються, — у множини, що не перетинаються.*
2. $f(\emptyset) = \emptyset$.
3. $f(X) = X$.
4. $f$ *зберігає кількість елементів множини.*
5. $f$ *зберігає відношення включення.*

*Доведення.* 1. Нехай $A, B \in 2^X$, $A \cap B = \emptyset$. Тоді

$$\delta(A, B, B, \dots, B) = \\ = \frac{\sum_{1 \le i \le n} (|A \cup B| - |A \cap B|)}{|A \cup B|} = \\ = \frac{\sum_{1 \le i \le n} |A \cup B|}{|A \cup B|} = n.$$

За визначенням ізометрії,

$$\delta(f(A), f(B), f(B), \dots, f(B)) = \\ = \delta(A, B, B, \dots, B) = n.$$

Тобто,

$$\frac{n \times |f(A) \cup f(B)| - n \times |f(A) \cap \mathrm{f(B)}|}{|f(A) \cup f(B)|} = n.$$

Звідки $|f(A) \cap f(B)| = 0$.

Інакше кажучи, $\delta(A, B, B, \dots, B) = n$ тоді і тільки тоді, коли $A \cap B = \emptyset$. А так, як $\delta$ — ізометрія, то відстань $\delta(f(A), f(B), f(B), \dots, f(B))$ теж рівна $n$, отже, $A$ і $B$ не перетинаються.

І навпаки, якби $A, B$ перетинались, то відстань між $A, B, B, \dots, B$ не була б $n$.

2. Якщо $f(\emptyset) \ne \emptyset$, то $\exists B$ таке, що $B \ne f(\emptyset)$, $f(\emptyset) \cap B \ne \emptyset$. Тоді б, за пунктом 1, $\emptyset \cap B \ne \emptyset$, що неможливо.

3. Оскільки $X$ — єдина множина, що має непорожній перетин з кожною непорожньою множиною, то твердження випливає з пункту 1.

4. Зауважимо, що

$$\delta(A, A, \dots, A, X) = \frac{n \times |\mathrm{X} \backslash A|}{|X|}.$$

Оскільки $f(X) = X$, то

$$\delta(f(A), f(A), \dots, f(A), f(X)) = \\ = \delta(f(A), f(A), \dots, f(A), X) = \frac{n\,|X \backslash f(A)|}{|X|}.$$

За визначенням ізометрії,

$$\delta(A, A, \dots, A, X) = \\ = \delta(f(A), f(A), \dots, f(A), f(X)).$$

Тобто,

$$\frac{n \times |X \backslash A|}{|X|} = \frac{n \times |X \backslash f(A)|}{|X|}.$$

Звідки $|A| = |f(A)|$.

5. Нехай як і раніше $A, B \in 2^X$. Доведемо, що $B \subset A$ тоді і тільки тоді, коли $f(B) \subset f(A)$.

Нехай $|A| = k$, $|B| = m$. Тоді

$$|A| = |f(A)| = k, \ |B| = |f(B)| = m \le k.$$

Отже,

$$\delta(A, B, B, \dots, B) = \frac{n(k - m)}{k}.$$

$$\delta(f(A), f(B), f(B), \dots, f(B)) = \\ = \frac{n \times (|f(A)| + |f(B)| - 2 \times |f(A) \cap f(B)|)}{|f(A) \cup f(B)|} = \\ = \frac{n \times (|f(A)| + |f(B)| - 2\,|f(A) \cap f(B)|)}{|f(A)| + |f(B)| - |f(A) \cap f(B)|}.$$

Очевидно, що
$|f(A) \cap f(B)| \le |f(B)| \le |f(A)|$.

Позначимо $|f(A) \cap f(B)| = m - z$, де $m \ge z \ge 0$.

У нових позначеннях:

$$\delta(f(A), f(B), f(B), \dots, f(B)) = \\ = \frac{n \times (|f(A)| + |f(B)| - 2\,|f(A) \cap f(B)|)}{|f(A)| + |f(B)| - |f(A) \cap f(B)|} = \\ = \frac{n \times (k + m - 2\,(m - z))}{k + m - (m - z)} = \frac{n \times (k - m + 2z)}{k + z}.$$

Так, як $f$ — ізометрія, тобто,

$$\delta(A, B, B, \dots, B) = \\ \delta(f(A), f(B), f(B), \dots, f(B)),$$

то

$$\frac{n\times(k-m)}{k}=\frac{n\times(k-m+2z)}{k+z}.$$

Звідки, спростивши, маємо $zk=-zm$. Оскільки $0\le z\le m\le k$, то $z=0$.

Таким чином, $|f(A)\cap f(B)| = |f(B)|$. Звідки випливає:

$$f(B)=f(A)\cap f(B).$$

Отже, $f(B)\subset f(A)$, що й треба було довести.

І навпаки, припустимо, що для деяких $A,B$ виконується $f(B)\subset f(A)$. Тоді, оскільки $f^{-1}$ – ізометрія і $f(B)\subset f(A)$, то з доведеного вище випливатиме, що $f^{-1}(f(B))\subset f^{-1}(f(A))$, тобто $B\subset A$.

Водночас довільна бієкція $f\colon 2^X\to 2^X$, для якої виконуються пункти 1–5 цієї теореми, є ізометрією простору $(X,\delta)$. У наступних теоремах наведено необхідні і достатні умови того, що перестановка на $2^X$ буде ізометрією.

**Теорема 3.** *Нехай $f:2^X\longrightarrow 2^X$ — бієкція. Відображення $f$ є ізометрією простору $(Bool(X),\delta)$ тоді і тільки тоді, коли воно зберігає відношення включення. Тобто, $\forall A,B\subseteq X$:*

$$B\subset A\Rightarrow f(B)\subset f(A).$$

*Доведення.* Необхідність доведено в попередній теоремі, доведемо достатність.

По-перше, зауважимо, що з того, що $f$ зберігає відношення включення і є перестановкою на скінченній множині $2^X$, випливає: $f$ зберігає і відношення невключення (тобто, якщо $B$ — не підмножина $A$, то $f(B)$ — не підмножина $f(A)$). Доведемо це від супротивного, припустимо, $f$ не зберігає відношення невключення. Тоді існують множини $A,B$ такі, що $B$ — не підмножина $A$ і $f(B)$ — підмножина $f(A)$. Так, як $f$ зберігає відношення включення, $f(A)$ має більше підмножин ніж $A$. Для кожного $i=\overline{0,|X|}$ серед елементів $2^X$ є певна кількість (а саме $\frac{|X|!}{(|X|-i)!}$) множин, у яких рівно $2^i$ підмножин, і (бо $f$ — бієкція) стільки ж елементів, у яких рівно $2^i$ підмножин, має множина $f(2^X)$. З цього і з того, що $f(A)$ має більше підмножин, ніж $A$, і всі елементи $2^X$ при відображенні $f$ переходять у множини з неменшою кількістю підмножин, випливає, що існує $A_1\subset X$, що має меншу кількість підмножин, ніж $A$, яка при відображенні $f$ переходить у множину з такою ж кількістю підмножин, як $A$. Повторюючи останнє міркування скінченну кількість разів, отримуємо, що існує множина $A_t$, яка має меншу кількість підмножин, ніж $\emptyset$, що неможливо. Отримана суперечність доводить наше твердження.

З того, що $f$ зберігає відношення включення та невключення і є перестановкою на скінченній множині випливає, що $f$ зберігає кількість елементів. Справді, у множин $D$ та $f(D)$ однакова кількість підмножин — $2^{|D|}$. З чого випливає, що $|D|=|f(D)|$.

$$\delta(A_1,A_2,\ldots,A_{n+1})=\frac{\sum_{1\le i<j\le n+1}|A_i\triangle A_j|}{|\bigcup_{l=1}^{n+1}A_l|}=$$
$$=\frac{\sum_{1\le i<j\le n+1}(|A_i|+|A_j|-2|A_i\cap A_j|)}{|\bigcup_{l=1}^{l=n+1}A_l|}.$$

$$\delta(f(A_1),f(A_2),\ldots,f(A_{n+1}))=$$
$$=\frac{\sum_{1\le i<j\le n+1}|f(A_i)\triangle f(A_j)|}{|\bigcup_{l=1}^{n+1}f(A_l)|}=$$
$$=\frac{\sum_{1\le i<j\le n+1}(|f(A_i)|+|f(A_j)|-2|f(A_i)\cap f(A_j)|)}{|\bigcup_{l=1}^{l=n+1}f(A_l)|}.$$

Покажемо, що

$$\frac{\sum_{1\le i<j\le n+1}(|A_i|+|A_j|-2|A_i\cap A_j|)}{|\bigcup_{l=1}^{n+1}A_l|}=$$
$$\frac{\sum_{1\le i<j\le n+1}(|f(A_i)|+|f(A_j)|-2|f(A_i)\cap f(A_j)|)}{|\bigcup_{l=1}^{n+1}f(A_l)|}.$$

Для цього достатньо показати, що $|A_i|=|f(A_i)|$, $|\bigcup_{l=1}^{n+1}A_l|=|\bigcup_{l=1}^{n+1}f(A_l)|$, $|f(A_i\cap A_j)|=|f(A_i)\cap f(A_j)|$.

$|A_i|=|f(A_i)|$, бо $f$ зберігає кількість елементів.

$f(A_l)\subset f(\bigcup_{l=1}^{n+1}A_l)$, бо $f$ зберігає відношення включення.

З іншого боку, так, як $f$ зберігає відношення невключення, не існує множини $B\subset X\setminus\bigcup_{l=1}^{n+1}A_l$ такої, що $f(B)\subset f(\bigcup_{l=1}^{n+1}A_l)$. Отже, маємо $f(\bigcup_{l=1}^{n+1}A_l)=\bigcup_{l=1}^{n+1}f(A_l)$.

$|\bigcup_{l=1}^{n+1}A_l|=|f(\bigcup_{l=1}^{n+1}A_l)|$, бо $f$ зберігає кількість елементів. А тому,

$$|\bigcup_{l=1}^{n+1}A_l|=|f(\bigcup_{l=1}^{n+1}A_l)|=|\bigcup_{l=1}^{n+1}f(A_l)|.$$

З того, що $f$ зберігає відношення включення, випливає:

$$f(A_i\cap A_j)\subseteq f(A_i),\ f(A_i\cap A_j)\subseteq f(A_j),$$

звідки $f(A_i\cap A_j)\subseteq f(A_i)\cap f(A_j)$.

Отже, $|f(A_i\cap A_j)|\le|f(A_i)\cap f(A_j)|$.

З того, що $f$ зберігає відношення включення, невключення, випливає:

$$f^{-1}(f(A_i) \cap f(A_j)) \subseteq A_i,\ f^{-1}(f(A_i) \cap f(A_j)) \subseteq A_j,$$

звідки $f^{-1}(f(A_i) \cap f(A_j)) \subseteq A_i \cap A_j$.

$$|f(A_i \cap A_j)| \geq |f(A_i) \cap f(A_j)|.$$

Отже, $|f(A_i \cap A_j)| = |f(A_i) \cap f(A_j)|$.
Чим і доведено, що $f$ — ізометрія.

**Теорема 4.** *Нехай $f : 2^X \to 2^X$ — бієкція. Відображення $f$ є ізометрією простору $(Bool(X), \delta)$ тоді і тільки тоді, коли воно зберігає відношення перетину. Тобто,*

$$B \cap A \neq \emptyset \Rightarrow f(B) \cap f(A) \neq \emptyset.$$

*Доведення.* Необхідність вже була доведена у першій теоремі розділу про ізометрії, доведемо достатність.

Так само, як і в попередній теоремі, з того, що $f$ зберігає відношення перетину і є перестановкою на скінченній множині $2^X$ випливає, що множини, які не перетинаються, $f$ переводить у множини, які не перетинаються; $f$ зберігає кількість елементів.

Для множини $A$ існує єдина множина максимального розміру, з якою вона не перетинається, — це її доповнення. Тому (і бо $f$ зберігає кількість елементів) $|X \backslash A| = |X \backslash f(A)|$. Отже, бачимо, що всі множини, з якими множина $A$ не перетинається, $f$ переводить у підмножини доповнення до множини $f(A)$. Це означає, що $f$ зберігає відношення включення, а тому, за теоремою 3, є ізометрією.

Зауважимо також, що лише умови про збереження кількості елементів недостатньо, щоб бієкція $f$ була ізометрією.

**Теорема 5.** *Група ізометрій простору $(Bool(X), \delta)$ ізоморфна групі всіх підстановок на множині $X$.*

*Доведення.* Кожній підстановці $\varphi$: $X \longrightarrow X$ поставимо у відповідність бієкцію $f$ на одноелементних підмножинах множини $X$, таку, що для $\forall x \in X$ виконується

$$f(\{x\}) = \{\varphi(x)\}.$$

Довизначимо $f$ на всю $(Bool(X)$ так, щоб вона була бієкцією і зберігала відношення включення. Таке довизначення існує і воно єдине. А саме для довільної $m$-елементної підмножини $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$, $0 \leq m \leq |X|$, покладемо

$$f(\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}) = \{\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_m)\}.$$

Така $f$ є ізометрією $(2^X, \delta)$.

І навпаки, кожній ізометрії $f$ простору $(2^X, \delta)$ можна поставити у відповідність одну і тільки одну підстановку $\varphi$: $X \longrightarrow X$, що для $\forall x \in X$ виконується $f(\{x\}) = \{\varphi(x)\}$.

## Інші узагальнення біотопного простору

1. Нехай, як і раніше $n \geq 2 \in N$. Розглянемо функцію $\hat{\delta} : (2^X)^{n+1} \to \mathbb{R}^+$, визначену за таким правилом:

$$\hat{\delta}(A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}) = \\ = \begin{cases} 0, \text{ якщо } \bigcup_{l=1}^{n+1} A_l = \emptyset \\ \frac{|A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots \triangle A_{n+1}|}{|\bigcup_{l=1}^{n+1} A_l|}, \text{ в іншому випадку.} \end{cases}$$

Така функція теж буде $n-$напівметрикою на $2^X$, де $X$ - скінченна множина.

*Доведення.* Симетричність очевидна. Потрібно довести сімплеціальну нерівність:

$$\frac{|A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots \triangle A_{n+1}|}{|\bigcup_{l=1}^{n+1} A_l|} \leq \\ \frac{|A_2 \triangle A_3 \triangle \ldots \triangle A_{n+2}|}{|\bigcup_{l=2}^{n+2} A_l|} + \\ + \frac{|A_1 \triangle A_3 \triangle \ldots \triangle A_{n+2}|}{|\bigcup_{l=1, l \neq 2}^{n+2} A_l|} + \ldots + \\ + \frac{|A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots \triangle A_n \triangle A_{n+2}|}{|\bigcup_{l=1, l \neq n+1}^{n+2} A_l|}. \quad (6)$$

Доведення індукцією по $|A_{n+2} \backslash \bigcup_{l=1}^{n+1} A_l|$. Припустимо, що для $|A_{n+2} \backslash \bigcup_{l=1}^{n+1} A_l| = k$ нерівність справджується. Додамо в $A_{n+2}$ 1 елемент – позначимо його як $a$ – з $X \backslash \bigcup_{l=1}^{n+1} A_l$. Підставимо $A_{n+2} \cup \{a\}$ замість $A_{n+2}$ у сімплеціальну нерівність:

$$\frac{|A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots \triangle A_{n+1}|}{|\bigcup_{l=1}^{n+1} A_l|} \leq \\ \frac{|A_2 \triangle A_3 \triangle \ldots \triangle A_{n+2}| + 1}{|\bigcup_{l=2}^{n+2} A_l + 1|} + \\ + \frac{|A_1 \triangle A_3 \triangle \ldots \triangle A_{n+2}| + 1}{|\bigcup_{l=1, l \neq 2}^{n+2} A_l| + 1} + \\ + \ldots + \\ + \frac{|A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots \triangle A_n \triangle A_{n+2}| + 1}{|\bigcup_{l=1, l \neq n+1}^{n+2} A_l| + 1}.$$

Як бачимо, і знаменник, і чисельник кожного дробу у правій частині сімплеціальної нерівності більший на 1, порівнюючи з відповідним дробом нерівності (6). Так як у кожного з цих дробів чисельник не більше знаменника, то ці дроби не зменшились і нерівність послабиться порівняно з нерівністю (6), де $|A_{n+2} \setminus \bigcup_{l=1}^{n+1} A_l| = k$. Справді, нехай

$$0 \le x \le y, y \ne 0, e \ge 0.$$

Покажемо, що

$$\frac{x}{y} \le \frac{x+e}{y+e}.$$

Це те саме, що й:

$$xy + xe \le xy + ye,$$

еквівалентне $xe \le ye$, що, очевидно, виконується. Отже, правильний додатній дріб при додаванні до чисельника і знаменника однакового невід'ємного числа не зменшиться.

Залишається довести нерівність для бази індукції $|A_{n+2} \setminus \bigcup_{l=1}^{n+1} A_l| = 0$, тобто для випадку $A_{n+2} \subset \bigcup_{l=1}^{n+1} A_l$. Тоді нерівність можна підсилити, замінивши знаменник кожного дробу справа на $|\bigcup_{l=1}^{n+1} A_l|$:

$$\frac{|A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots \triangle A_{n+1}|}{|\bigcup_{l=1}^{n+1} A_l|} \le \frac{|A_2 \triangle A_3 \triangle \ldots \triangle A_{n+2}|}{|\bigcup_{l=1}^{n+1} A_l|} + \frac{|A_1 \triangle A_3 \triangle \ldots \triangle A_{n+2}|}{|\bigcup_{l=1}^{n+1} A_l|} + \ldots + \frac{|A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots \triangle A_n \triangle A_{n+2}|}{|\bigcup_{l=1}^{n+1} A_l||}.$$

Домноживши на $|\bigcup_{l=1}^{n+1} A_l|$ маємо:

$$|A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots \triangle A_{n+1}| \le |A_2 \triangle A_3 \triangle \ldots \triangle A_{n+2}| + |A_1 \triangle A_3 \triangle \ldots \triangle A_{n+2}| + \ldots + |A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots \triangle A_n \triangle A_{n+2}|. \quad (7)$$

Якщо в $A_{n+2}$ додавати чи забирати елементи, які належать до 2 і більше множин серед $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$, то значення справа в останній нерівності не зміниться. Отже, достатньо розглядати випадок $A_{n+2} \subset A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots \triangle A_{n+1}$. Тепер застосуємо індукцію (у бік зменшення) по $|A_{n+2}|$. База індукції $|A_{n+2}| = |A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots \triangle A_{n+1}|$. Для такого випадку нерівність 7 можна підсилити наступним чином:

$$|A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots \triangle A_{n+1}| \le |A_1 \setminus \bigcup_{l=2}^{n+1} A_l| + |A_2 \setminus \bigcup_{l=1, l \ne 2}^{n+1} A_l| + \ldots + |A_{n+1} \setminus \bigcup_{l=1}^{n} A_l|.$$

Тут права частина якраз рівна лівій. Отже, для $|A_{n+2}| = |A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots \triangle A_{n+1}|$ нерівність справджується. Припустимо, що вона справджується для $|A_{n+2}| = m$ і покажемо, що з цього випливає, вона виконується і для $|A_{n+2}| = m-1$. Нехай $|A_{n+2}| = m$, і ми забираємо з $A_{n+2}$ 1 елемент. Цей елемент належить рівно 1 з множин $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$, наприклад $A_1$. При цьому в нерівності 7 справа доданок $|A_2 \triangle A_3 \triangle \ldots \triangle A_{n+2}|$ зменшиться на 1, а решта $n$ доданків зросте на 1; таким чином, права частина зросте на $n-1$. Це і завершує доведення.

2. Відомим узагальненням біотопного простору є простір Марчевського–Штейнгауза, з яким наведене нижче узагальнення збігається при $n = 1$.

Нехай $\mu$ — міра, визначена на сімействі множин $F$, яка приймає лише скінченні значення. Тоді наступна функція $\delta : F^{n+1} \to \mathbb{R}^+$ буде $n$-напівметрикою:

$$\delta(A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } \mu(\bigcup_{l=1}^{n+1} A_l) = 0 \\ \frac{\sum_{1 \le i < j \le n+1} \mu(A_i \triangle A_j)}{\mu(\bigcup_{l=1}^{n+1} A_l)}, & \text{інакше.} \end{cases}$$

Доведення аналогічне першому доведенню статті. (Достатньо у ньому $|.|$ всюди замінити на $\mu$.)

1. Blumenthal L. M. Theory and Applications of Distance Geometry / Blumenthal Leonard Mascot. — Oxford : Oxford University Press, 1953. — 348 pp.
2. Menger K. Untersuchungen uber allgemeine Metrik / Menger Karl.// Mathematische Annalen. — 1930. — V. 103, № 1 — P. 466-501.
3. Deza M. Dictionary of Distances / M. Deza, E. Deza — Amsterdam : Elsevier, 2006. — 391 p.
4. Deza M. n-semimetrics / M. Deza, I. G. Rosenberg // European Journal of Combinatorics, Special Issue «Discrete Metric Spaces» — 2000. — V. 21, № 5. — P. 797–806.
5. Marczewski F. On a certain distance of sets and the corresponding distance of functions / F. Marczewski, H. Steinhaus // Colloquium Mathematicum. — 1958. — V. 6.— P. 319–327.

*O. Gerdiy*

# GENERALIZED BIOTOP SPACE

*A generalization of biotop space is introduced in the article. It is being proved that this generalization is the n-hemimetic space. The group of isometries of this space is being characterised, some of its properties are being considered.*
***Keywords:*** biotop space, $n$-hemimetric, isometry.