УДК 517.5

Морозов Д. І.

РЕКУРСИВНИЙ КРИТЕРІЙ СПРЯЖЕНОСТІ АВТОМОРФІЗМІВ У $\mathrm{FAut}\, T_2$

Роботу присвячено дослідженню спряженості автоморфізмів кореневого однорідного дерева валентності 2 в групі скінченностанових автоморфізмів цього дерева. У цій групі побудовано рекурсивний критерій спряженості таких автоморфізмів.

Ключові слова: кореневе дерево, автоморфізм дерева, група скінченностанових автоморфізмів, спряженість автоморфізмів.

Метою цієї роботи є дослідження проблеми скінченностанової спряженості для автоморфізмів бінарного кореневого дерева. Запропонований рекурсивний критерій надає можливість ефективного розв'язання проблеми скінченностанової спряженості для певного класу автоморфізмів.

Означення 1. Означимо *розмічене дерево типу* D_f для автоморфізму $f \in \mathrm{Aut}\, T_2$ таким чином.

- Корінь дерева помітимо автоморфізмом f.
- Якщо вершина n-го рівня розміченого дерева типу помічена автоморфізмом $a = (b, c) \circ \sigma$, то з $(n+1)$-м рівнем цю вершину з'єднує тільки одне ребро. Іншу вершину цього ребра помітимо автоморфізмом $b \circ c$.
- Якщо вершина n-го рівня розміченого дерева типу помічена автоморфізмом $a = (b, c)$, то з $(n+1)$-м рівнем цю вершину з'єднує два ребра. Іншу вершину одного ребра помітимо автоморфізмом b, другого ребра — c.

Автоморфізм, що помічає вершину $t \in D_f$ дерева типу, позначимо як $D_f(t)$. Множину вершин n-го рівня дерева D позначимо як $L_n(D)$.

За побудовою піддерево розміченого дерева типу збігається з розміченим деревом типу автоморфізму, що помічає корінь цього піддерева.

Лема 1. *Нехай*

$$a = (a_1, a_2) \circ \sigma, \quad b = (b_1, b_2) \circ \sigma,$$
$$a' = a_1 \circ a_2, \quad b' = b_1 \circ b_2$$

та a' і b' спряжені в $\mathrm{FAut}\, T_2$.

Тоді a і b також спряжені в $\mathrm{FAut}\, T_2$.

Доведення. За умовою леми існує $x \in \mathrm{FAut}\, T_2$, такий, що $(a')^x = b'$.

Покажемо, що $\hat{x} = (x, a_2 \circ x \circ b_2^{-1})$ є скінченностановим розв'язком рівняння спряженості

$$a^{\chi} = b.$$

Далі

$$(a_1 \circ a_2)^x = b_1 \circ b_2$$

і тому

$$\begin{aligned} a^{\hat{x}} &= (x^{-1}, b_2 \circ x^{-1} \circ a_2^{-1}) \circ \\ &\quad \circ (a_1, a_2) \circ \sigma \circ (x, a_2 \circ x \circ b_2^{-1}) = \\ &= \big(x^{-1} \circ a_1 \circ (a_2 \circ x \circ b_2^{-1}), \\ &\quad (b_2 \circ x^{-1} \circ a_2^{-1}) \circ a_2 \circ x\big) \circ \sigma = \\ &= \big((x^{-1} \circ (a_1 \circ a_2) \circ x) \circ b_2^{-1}, b_2\big) \circ \sigma = \\ &= \big((b_1, b_2) \circ b_2^{-1}, b_2\big) \circ \sigma = \\ &= (b_1, b_2) \circ \sigma = c. \end{aligned}$$

Оскільки автоморфізми x, a_2, b_2 — скінченностанові, то і $a_2 \circ x \circ b_2^{-1}$ є скінченностановим. Отже, $\hat{x} \in \mathrm{FAut}\, T_2$, щ.т.д.

Теорема 2. *Автоморфізми a та b спряжені в* $\mathrm{FAut}\, T_2$ *тоді і лише тоді, коли існує ізоморфізм α їх розмічених дерев типу ($D_a * \alpha = D_b$), для якого автоморфізми у відповідних вершинах попарно спряжені в* $\mathrm{FAut}\, T_2$

$$\forall t \in L_n(D_a), \exists x \in \mathrm{FAut}\, T_2,\ D_a(t)^x = D_b(t * \alpha).$$

Доведення. $\Rightarrow$

Дійсно, нехай $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$, $a^x = b$. Тоді, або $x = (x_1, x_2)$ і маємо

$$\begin{aligned} a^x &= (x_1^{-1}, x_2^{-1}) \circ (a_1, a_2) \circ (x_1, x_2) = \\ &= (a_1^{x_1}, a_2^{x_2}) = (b_1, b_2) \end{aligned}$$

і, отже,

$$b_1 = a_1^{x_1}, \quad b_2 = a_2^{x_2},$$

і при ізоморфізмі розмічених дерев типу D_a та D_b вершина, що помічена a_1, переходить у вершину, що помічена b_1, а вершина, що помічена a_2, переходить у вершину, що помічена b_2.

або $x = (x_1, x_2) \circ \sigma$ і маємо

$$\begin{aligned} a^x &= \sigma \circ (x_1^{-1}, x_2^{-1}) \circ (a_1, a_2) \circ (x_1, x_2) \circ \sigma = \\ &= \sigma \circ (a_1^{x_1}, a_2^{x_2}) \circ \sigma = \\ &= (a_2^{x_2}, a_1^{x_1}) \circ \sigma \circ \sigma = (a_2^{x_2}, a_1^{x_1}) = (b_1, b_2) \end{aligned}$$

і, отже,

$$b_1 = a_2^{x_2}, \quad b_2 = a_1^{x_1}$$

і при ізоморфізмі розмічених дерев типу D_a та D_b вершина, що помічена a_1, переходить у вершину, що помічена b_2, а вершина, що помічена a_2, переходить у вершину, що помічена b_1.

Далі, нехай $a = (a_1, a_2) \circ \sigma$, $b = (b_1, b_2) \circ \sigma$, $a^x = b$. Тоді, або $x = (x_1, x_2)$ і маємо

$$a^x = (x_1^{-1}, x_2^{-1}) \circ (a_1, a_2) \circ \sigma \circ (x_1, x_2) =$$
$$= (x_1^{-1} \circ a_1 \circ x_2, x_2^{-1} \circ a_2 \circ x_1) \circ \sigma = (b_1, b_2) \circ \sigma$$

і, отже,

$$\begin{aligned} b_1 &= x_1^{-1} \circ a_1 \circ x_2, \\ b_2 &= x_2^{-1} \circ a_2 \circ x_1, \\ b_1 \circ b_2 &= (a_1 \circ a_2)^{x_1}, \\ b_2 \circ b_1 &= (a_2 \circ a_1)^{x_2}; \end{aligned}$$

або $x = (x_1, x_2) \circ \sigma$ і маємо

$$a^x = \sigma \circ (x_1^{-1}, x_2^{-1}) \circ (a_1, a_2) \circ \sigma \circ (x_1, x_2) \circ \sigma =$$
$$= \sigma \circ (x_1^{-1} \circ a_1 \circ x_2, x_2^{-1} \circ a_2 \circ x_1) \circ \sigma \circ \sigma =$$
$$= \sigma \circ (x_1^{-1} \circ a_1 \circ x_2, x_2^{-1} \circ a_2 \circ x_1) =$$
$$= (x_2^{-1} \circ a_2 \circ x_1, x_1^{-1} \circ a_1 \circ x_2) \circ \sigma = (b_1, b_2) \circ \sigma$$

і, отже,

$$\begin{aligned} b_1 &= x_2^{-1} \circ a_2 \circ x_1, \\ b_2 &= x_1^{-1} \circ a_1 \circ x_2, \\ b_1 \circ b_2 &= (a_2 \circ a_1)^{x_2}, \\ b_2 \circ b_1 &= (a_1 \circ a_2)^{x_1}. \end{aligned}$$

Згідно з вищезазначеним, відповідні автоморфізми дерева типу спряжені станами автоморфізму x.

$\Leftarrow$ Якщо такий ізоморфізм розмічених дерев типу існує, то автоморфізми, якими помічаються корені цих дерев, спряжені, отже, автоморфізми a та b спряжені в $\mathrm{FAut}\, T_2$.

Зауважимо, що достатньо перевірити спряженість автоморфізмів хоча б одного рівня. Дійсно, згідно з лемою 1, зі спряженості відповідних автоморфізмів $(n+1)$-го рівня випливає спряженість автоморфізмів n-го рівня. Отже, згідно з теоремою 2, має місце така теорема:

Теорема 3. *Автоморфізми a та b спряжені в $\mathrm{FAut}\, T_2$ тоді і лише тоді, коли існує ізоморфізм їх розмічених дерев типу ($D_a * \alpha = D_b$), для якого існує рівень, що всі автоморфізми у відповідних вершинах цього рівня попарно спряжені в* $\mathrm{FAut}\, T_2$

$$\exists n \in \mathbb{N}, \forall t \in L_n(D_a), \exists x \in \mathrm{FAut}\, T_2$$
$$D_a(t)^x = D_b(t * \alpha).$$

Зауважимо, що оскільки у спряжених автоморфізмів їх дерева типу ізоморфні, то в умові теореми 3 достатньо ізоморфізму $(D_a)_n$ та $(D_b)_n$.

Список літератури

1. Григорчук Р. И. Автоматы, динамические системы и группы / Р. И. Григорчук, В. В. Некрашевич, В. И. Сущанский // Динамические системы, автоматы и бесконечные группы. Сборник статей. Тр. МИАН. — М. : Наука, 2000. — Т. 231. — С. 134–214.
2. Морозов Д. І. Спряженість автоморфізмів, що задаються лінійними функціями в групі скінченностанових автоморфізмів кореневого сферично-однорідного дерева / Д. І. Морозов // Вісник Київського ун-ту. Серія: фізико-математичні науки. — 2008. — Вип. 1. — С. 40–43.
3. Морозов Д. І. Централізатори шарово-однорідних автоморфізмів однорідного дерева валентності p / Д. І. Морозов // Вісник Київського ун-ту. Серія: фізико-математичні науки. — 2007. — Вип. 4. — С. 52–54.

D. Morozov

CONJUGACY RECURSIVE CRITERION OF AUTOMORPHISMS IN $\mathrm{FAut}\, T_2$

The work is devoted to the research conjugacy of automorphisms of a rooted homogenious tree of valency 2 in a group of finite-state automorphisms of this tree. Conjugacy recursive criterion in this group has been built.

Keywords: rooted tree, tree automorphism, group of finite-state automorphisms, automorphisms conjugacy.

Матеріал надійшов 20.05.2014