УДК 519.816

Михалевич В. М.

ДО ПОБУДОВИ ЗАКОНОМІРНОСТІ СТАТИСТИЧНО НЕСТІЙКОЇ ПОСЛІДОВНОСТІ ЕЛЕМЕНТІВ СКІНЧЕННОЇ МНОЖИНИ

Розглянуто задачу побудови статистичної закономірності послідовності, що набуває значення із скінченної множини. Апарат статистичних закономірностей використовується при побудові загальної теорії рішень, що дозволяє розглядати задачі, які виходять за межі класичної теорії статистичних рішень.

Ключові слова: статистична задача рішення, статистична стійкість, статистична закономірність.

Вступ

Статистична задача рішення визначається параметричним простором Ω, простором рішень D і дійсною функцією втрат L. При довільному (w, d) число $L(w, d)$ являє собою втрати від прийняття рішення d у випадку, коли значення параметру W дорівнює ω. Припускається також, що заданий імовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, а функція $L(\cdot, d)$ є $\mathcal{A}$-вимірною при довільному $d \in D$. Якщо P — даний імовірнісний розподіл параметру W, то задача рішення формулюється таким чином:

$$\int_\Omega L(\omega, d)P(d\omega) \to \inf_{d\in D}.$$

Якщо ж параметр W не має ймовірнісного розподілу і не задовольняє умови статистичної стійкості, то, використовуючи загальні методи, що розроблені в [1; 2], можна описати поведінку W за допомогою так званої статистичної закономірності, яка є природним узагальненням поняття ймовірнісного розподілу. А саме:

Позначимо $M(\Omega)$ дійсних обмежених функцій на Ω. Якщо ввести норму $\|f\| = \sup_{\omega\in\Omega} |f(\omega)|$, то простір $M(\Omega)$ перетвориться в банаховий.

Далі позначимо $PF(\Omega)$ множину всіх скінченно-адитивних імовірнісних мір на Ω, тобто

$$PF(\Omega) = \{p \in [0,1]^{2^\Omega} : p(\Omega) = 1,$$
$$p(A \cup B) = p(A) + p(B \setminus A) \text{ для } \forall A, B \in \mathcal{A}\}.$$

Розглядаючи $PF(\Omega)$ як підмножину спряженого простору $(M(\Omega))*$, визначимо на $PF(\Omega)$ топологію $\tau(\Omega)$, що є слідом $*$-слабкої топології в $(M(\Omega))*$. Інакше кажучи, якщо позначити для стислості символом pf інтеграл від $\mathcal{A}$-вимірної функції $f \in M(\Omega)$ по скінченно-адитивній мірі $p \in PF(\Omega)$, то множини

$$U_{\varepsilon,f_1,f_2,\ldots,f_n}(p) =$$
$$= \{p' \in PF(\Omega) : |pf_i - p'f_i| < \varepsilon, \forall i \in \overline{1,n}\},$$

де $p \in PF(\Omega)$, $\varepsilon > 0$, $f_1, f_2, \ldots, f_n \in M(\Omega)$, є визначаючою системою околів у $PF(\Omega)$.

Зауважимо, що топологічний простір $(PF(\Omega), \tau(\Omega))$ компактний при будь-якому Ω.

Статистичною закономірністю на Ω називається будь-яка непорожня замкнена множина $\boldsymbol{P}$ топологічного простору $(PF(\Omega), \tau(\Omega))$ (див. [1; 2]).

Знаючи статистичну закономірність $\boldsymbol{P}$, що описує поведінку W, можемо задати задачу рішення у вигляді четвірки $(\Omega, D, L, \boldsymbol{P})$. При цьому, якщо слідувати принципу гарантованого результату в статистичній формі, то від вимоги σ-адитивності алгебри $\mathcal{A}$ можна відмовитися. Вказана четвірка єдиним чином визначає на D критерій $K(\cdot)$ для вибору оптимального рішення

$$K(d) = \sup_{p\in\boldsymbol{P}} \int_\Omega L(\omega, d)p(d\omega),$$

а ризик задачі рішення представляється у вигляді

$$\rho = \inf_{d\in D} \sup_{p\in\boldsymbol{P}} \int_\Omega L(\omega, d)p(d\omega).$$

Нехай задано деяку послідовність $\{\omega_n\}_{n=1}^\infty$ елементів множини Ω. Для зручності послідовність $\{\omega_n\}_{n=1}^\infty$ іноді будемо позначати символом $\overline{\omega}$, а n-й член послідовності — як і раніше ω_n.

Унаслідок компактності топологічного простору $(PF(\Omega), \tau(\Omega))$ послідовність $\{p_{\overline{\omega}}^{(n)}\}_{n=1}^\infty$, що побудована відповідно до формули

$$p_{\overline{\omega}}^{(n)}(A) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n I_A(\omega_i)$$

для довільного $A \in 2^\Omega$, де I_A — індикатор множини A, завжди має непорожню множину

$\boldsymbol{P}(\overline{\omega}) \subseteq PF(\Omega)$ граничних точок (у топологічному просторі $(PF(\Omega), \tau(\Omega))$). Множина $\boldsymbol{P}(\overline{\omega})$ називається статистичною закономірністю послідовності (див. [1; 3; 4]).

Структура статистичної закономірності послідовності з довільної множини достатньо складна, оскільки відповідна послідовність частот може мати піднаправленості, які не є підпослідовностями. Однак у випадку послідовності, що приймає значення в скінченній множині, ситуація суттєво спрощується.

Нехай Ω — множина, що складається зі скінченного числа елементів, тобто $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k\}$, а $\overline{\Theta}$ — деяка послідовність елементів множини Ω. При цьому $\{\omega_k\} \in \mathcal{A}$ для $\forall k \in \mathbb{N}$.

Для зручності коротко позначатимемо через p_n відповідні міри послідовності $\left\{p_{\overline{\omega}}^{(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

У роботі [5] доведена така

Теорема 1. *Нехай Ω — скінченна множина. Міра $p \in PF(\Omega)$ належить $\boldsymbol{P}(\overline{\Theta})$ тоді і тільки тоді, коли в послідовності мір $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ існує підпослідовність $\{p_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ така, що для будь-якого $A \in 2^{\Omega}$ виконується рівність*

$$\lim_{i\to\infty} p_{n_i}(A) = p(A).$$

Ця теорема дає можливість побудувати статистичну закономірність послідовності тоді, коли кількість елементів множини Ω «не занадто велика», а отже, осяжна множина всіх підмножин — 2^{Ω}. У цьому випадку з послідовності $\{p_n\}$ можна виділити всі підпослідовності такі, що для кожної з них і для кожної з підмножин A множини Ω існує границя $\lim_{i\to\infty} p_{n_i}(A)$. З теореми випливає, що $\boldsymbol{P}(\overline{\Theta})$ збігається з множиною мір, що є границями цих підпослідовностей.

Цю статтю присвячено вивченню статистичних закономірностей послідовностей, що приймають значення не тільки в скінченних множинах, на відміну від [3; 4; 5], а й у довільних.

Приклади побудови статистичних закономірностей послідовностей елементів скінченної множини

Розглянемо таку послідовність елементів множини $\Omega = \{0, 1\}$, що запропонована в роботі [5]

$$\overline{\Theta}_0 := 010100110000111100000000011111111\\ 000000000000000011111111111111111\\ 00000\ldots \qquad (1)$$

Принцип побудови послідовності (1) такий: ця послідовність складається із серій нулів та одиниць, причому серії одиниць слідують за серіями нулів і кожна серія одиниць має довжину серії нулів, що стоїть перед нею; перша серія нулів складається з одного члена, а кожна наступна серія нулів містить стільки нулів, скільки всі попередні серії разом узяті.

Тоді послідовність частот $\{p_n(\{0\})\}_{n=2}^{\infty}$, що представляє послідовність частот нулів у послідовності $\{\Theta_n\}_{n=2}^{\infty}$, можна представити у вигляді двох параметричних множин

$$P_0^0 := \Big\{p_{m,k}^0(\{0\}) := \frac{2^m + k}{2 * 2^m + k} : m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, k = \overline{1, 2^m}\Big\}, \qquad (2)$$

$$P_0^1 := \Big\{p_{m,k}^2(\{0\}) := \frac{2 * 2^m}{3 * 2^m + k} : m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, k = \overline{1, 2^m}\Big\}. \qquad (3)$$

При цьому справедливі такі два твердження.

a) Кожна з цих множин всюди щільна в $\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$.

Доведемо це.

Для P_0^0 і $\forall \varepsilon > 0$ оберемо m таке, що $\frac{1}{2^{m+2}} < \varepsilon$.

Так як $\left\{\left(\frac{2^m+k-1}{2*2^m+k-1}, \frac{2^m+k}{2*2^m+k}\right]\right\}_{k=1}^{2^m}$ — розбиття $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$ для $\forall m$, а $\frac{2^m+k}{2*2^m+k} - \frac{2^m+k-1}{2*2^m+k-1} = 1 - \frac{2^m}{2*2^m+k} - 1 + \frac{2^m}{2*2^m+k-1} = \frac{2^m}{(2*2^m+k)(2*2^m+k-1)} \leq \frac{2^m}{2*2^m*2*2^m} = \frac{1}{2^{m+2}} < \varepsilon$, то для $\forall a \in \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$ і для $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k(a, \varepsilon)$, де $k(a,\varepsilon) \in \mathbb{N}, k(a,\varepsilon) \leq 2^m$, що $a \in \left(\frac{2^m+k(a,\varepsilon)-1}{2*2^m+k(a,\varepsilon)-1}, \frac{2^m+k(a,\varepsilon)}{2*2^m+k(a,\varepsilon)}\right]$. Тому $\left|a - \frac{2^m+k(a,\varepsilon)}{2*2^m+k(a,\varepsilon)}\right| < \varepsilon$.

Отже, $\overline{P}_0^0 = \overline{\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]} = \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$.

Аналогічно проводиться доведення для P_0^1.

b) Для кожної міри $p_{m,k}^0, p_{m,k}^1$, що визначається в співвідношеннях (2) і (3), можна вказати підпослідовність послідовності $\left\{p_n\{(0)\}\right\}_{n=1}^{\infty}$ частот нулів вигляду

$$\Big\{p_{m_l,k_l}^0(\{0\}) := p_{m+l,2^l k}^1(\{0\}) := = \frac{2^{m+l} + 2^l k}{2 * 2^{m+l} + 2^l k} = \frac{2^m + k}{2 * 2^m + k}\Big\}_{l=0}^{\infty},$$

$$\Big\{p_{m_l,k_l}^1(\{0\}) := p_{m+l,2^l k}^2(\{0\}) := = \frac{2^{m+l}}{3 * 2^{m+l} + 2^l k} = \frac{2^m + k}{3 * 2^m + k}\Big\}_{l=0}^{\infty},$$

де $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, k = \overline{1, 2^m}$.

Елементи послідовності скінченно-адитивних мір $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ для послідовності (1) мають таке представлення

$$p_n(\{0\}) = \begin{cases} p_{m,k}^0(\{0\}), \text{ якщо } n = 2 * 2^m + k, \\ p_{m,k}^1(\{0\}), \text{ якщо } n = 3 * 2^m + k, \end{cases}$$

де $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $k = \overline{1, 2^m}$, а $p_n(\{1\}) = 1 - p_n(\{0\})$.

У силу *b)* і теореми 1 отримаємо, що

$$\left\{p^0_{m,k} : m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, k = \overline{1, 2^m}\right\} \in \boldsymbol{P}(\overline{\Theta}_0),$$
$$\left\{p^1_{m,k} : m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, k = \overline{1, 2^m}\right\} \in \boldsymbol{P}(\overline{\Theta}_0).$$

А в силу *a)* і теореми 1 множина скінченно-адитивних мір на $\Omega = \{0, 1\}$ вигляду

$$\{p : p(\{0\}) = \alpha, \alpha \in [1/2, 2/3]\}$$

являє собою статистичну закономірність $\boldsymbol{P}(\overline{\Theta}_0)$.

Список літератури

1. Иваненко В. И. Проблема неопределенности в задачах принятия решений / В. И. Иваненко, В. А. Лабковский. — К. : Наук. думка, 1990. — 136 с.
2. Зорич И. В. О выражении двух последовательностей в терминах их статистической закономерности / И. В. Зорич, В. И. Иваненко // Кибернетика и системный анализ. — 1997. — № 2. — С. 155–159.
3. Ivanenko V. I. On some properties of the statistical regularities / V. I. Ivanenko, I. V. Zorych // Paper for the Ninth Workshop of the dynamics and Control. — Rio de Janeiro, 1996.
4. Данфорд Н. Линейные операторы. Общая теория / Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц. — М. : Изд-во иностр. лит., 1962. — 896 с.
5. Зорич И. В. К построению закономерности статистически неустойчивой последовательности / И. В. Зорич, В. И. Иваненко, Б. Муньер // Проблемы управления и информатики. — 1997. — № 4. — С. 119–122.

V. Mykhalevych

ON THE CONSTRUCTION OF THE STATISTICAL REGULARITY OF THE STATISTICALLY INSTABLE SEQUENCE OF THE FINITE SET ELEMENTS

The construction of the statistical regularity of the sequence, taking values in the finite set, is considered in this article. Apparatus of statistical regularities is used to consider the problems extending beyond the limits of the classical statistical decision theory.

Keywords: statistical problem of the solution, statistical stability, statistical conformity.

Матеріал надійшов 12.06.2014