

Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЇВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»

Кафедра математики
факультету інформатики

Курсова робота
за спеціальністю 113 Прикладна математика
освітня програма “Прикладна математика”

Задача про картинну галерею

Керівник курсової роботи

канд. фіз-мат. наук,

старший викладач

Тимошкевич Л.М.

(підпис)

Виконав студент

3-го року навчання

Васюра В.В.

“_____” _____ 2021р.

Київ 2021

Тема: Задача про картинну галерею

Календарний план виконаної роботи:

№ п/п	Назва етапу курсової роботи	Термін виконання етапу	Примітка
1.	Отримання завдання на дипломну роботу.	20.10.2020	
2.	Огляд літератури за темою роботи.	25.10.2020	
3.	Аналіз літератури за темою роботи.	22.11.2020	
4.	Дослідження результатів отриманих в літературі.	18.01.2021	
5.	Аналіз отриманих результатів з керівником.	20.02.2021	
6.	Корегування роботи за результатами попереднього захисту.	16.03.2021	
7.	Оформлення курсової роботи.	09.04.2021	
8.	Створення презентації до курсової роботи.	08.05.2021	
9.	Захист курсової роботи.	20.05.2021	

Зміст

1 Вступ.....	4
1.1 Актуальність.....	4
1.2 Мета, завдання дослідження.....	6
2 Простий багатокутник. Триангуляція.....	7
2.1 Постановка задачі та триангуляція.....	7
2.2 Розфарбування в 3 кольори.....	9
2.3 Оцінка точності.....	11
3 Часткові випадки.....	12
3.1 Задача про розбиття багатокутника на опуклі чотирикутники.....	12
3.2 Задача про багатокутник з горизонтальними або вертикальними лініями.....	14
3.3 Задача про багатокутник з “дірками”.....	18
4 Висновки.....	20
5 Список літератури.....	21

1 Вступ

1.1 Актуальність

Математика використовується у всіх сферах життя. За допомогою неї можна вирішувати проблеми набагато легше ніж звичайними методами. Деякі задачі можуть знайти рішення навіть для глобальних проблем. Саме такою є задача про картинну галерею.

Вперше задача про картинну галерею була поставлена в 1973 році математиком Віктором Клі. У 1975 році Вацлав Чватал довів, використовуючи метод індукції, що для простих багатокутників $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ охоронців достатньо для охорони галереї, коли в багатокутнику є n вершин. У 1978 році Стів Фіск створив більш чіткий доказ завдяки триангуляції та забарвленню вершин.

Картини відомих художників користуються популярністю не тільки серед покупців та відвідувачів галерей, а й серед злочинців, тому важливо добре їх охороняти. Вдень це можуть робити охоронці але вночі

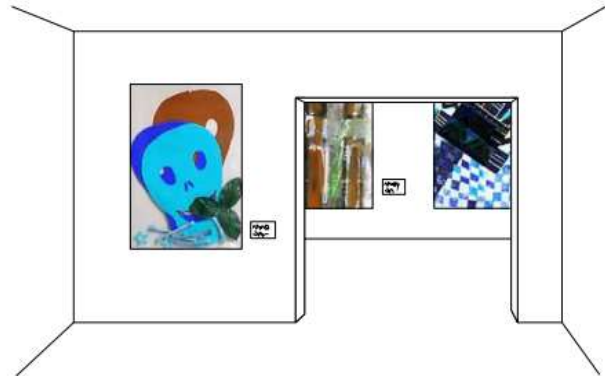


Рис. 1.1

використовують камери. Як правило вони висять під стелею і можуть крутитися навколо своєї осі. Зображення з камер надсилаються на комп'ютери за якими дивиться охоронець. Це перша причина мати якнайменше камер, адже за великою кількістю охоронець фізично не зможе стежити. Другою причиною є фінансова складова. Велика система охорони коштує чималих грошей, тому чим менше буде камер тим краще. Проте не потрібно забувати що камер не може бути надто мало, адже потрібно щоб кожна частинна галереї була видимою хоча б на

одній камері. Отже, ми повинні розмістити камери так, щоб кожна з них охороняла якнайбільшу частинну і при цьому не залишилось місць, які не видно на камерах.

1.2 Мета, завдання дослідження

Дослідити задачу про картинну галерею в загальному випадку, а також цікаві часткові випадки, враховуючи випадок ортогональної галереї і багатокутник з “дірками”.

2 Простий багатокутник. Тріангуляція

2.1 Постановка задачі та тріангуляція

Проблема картинної галереї сформульована в геометрії як мінімальна кількість камер(охоронців), які потрібно розмістити в n -вершини простого багатокутника так, щоб було видно усі точки галереї.

Означення 1

Простий багатокутник – це багатокутник без перетинів та дірок. Тобто, це пласка фігура, що складається з відрізків або “сторін”, які не перетинаються, які з’єднанні попарно й утворюють замкнений шлях.

Скільки нам потрібно камер, для простого багатокутника. Це залежить від складності багатокутника, чим складніший тим більше потрібно камер. Наприклад опуклий багатокутник можна завжди охороняти лише однією камерою. Щоб максимально точно дослідити проблему, ми розглянемо найгірший сценарій, який підходить для будь-якого простого багатокутника з n -вершинами.

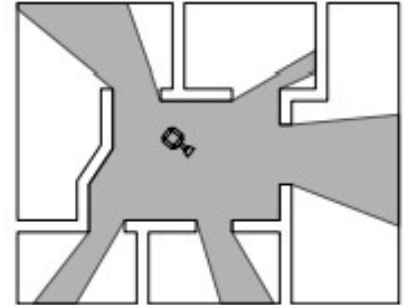


Рис. 2.1

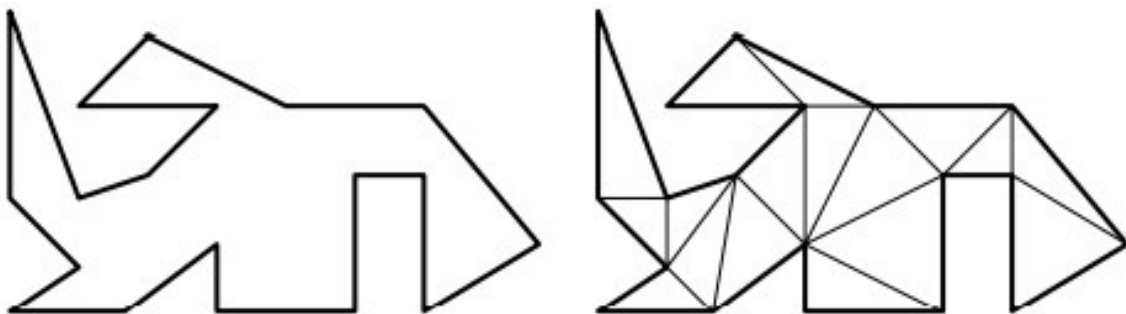


Рис. 2.2

Нехай Q -простий багатокутник з n -вершинами. Оскільки Q може бути будь-якої форми, то нам важко сказати щось про необхідну кількість камер для охорони, тому спочатку ми розкладаємо Q на частини, які легко охороняти, а саме на трикутники. Ми робимо це малюючи діагоналі між парами вершин.

Означення 2

Діагональ – це відрізок, який з’єднує дві вершини багатокутника Q і лежить всередині Q .

Означення 3

Триангуляція – це розкладання багатокутника на трикутники за допомогою діагоналей, які не перетинаються (Рис.2.2).

Як правило, триангуляція не є унікальною. Наприклад багатокутник на рис. 2.3 можна триангулювати декількома способами. Також потрібно довести чи існує триангуляція завжди і скільки трикутників може бути в триангуляції.

Теорема 1

Кожен багатокутник допускає триангуляцію, і будь-яка триангуляція простого багатокутника з n вершинами складається рівно з $n-2$ трикутників.

Доведення теореми 1.(за допомогою метода індукції)

Доводимо за допомогою індукції по n . Коли $n = 3$, то сам багатокутник є трикутником і теорема вірна. Нехай $n > 3$ і, припустимо, що теорема справедлива для всіх $m < n$. Нехай Q багатокутник з n вершинами. Спочатку доведемо існування діагоналі в Q . Нехай v – найлівіша вершина Q . Нехай u і w – дві сусідні вершини v . Якщо відкритий відрізок uw лежить у внутрішній частині Q , то ми маємо діагональ. В іншому випадку всередині є одна або кілька вершин трикутника u, v і w , або на діагоналі uw . З цих вершин нехай v' буде найвіддаленішою від прямої, яка

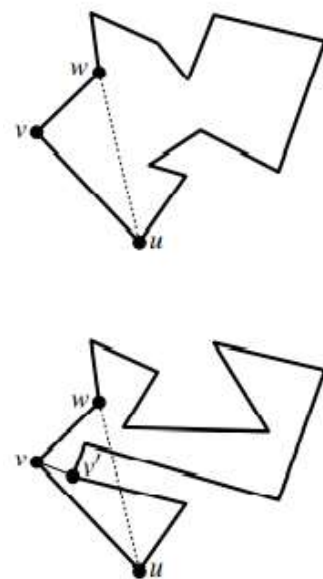


Рис. 2.3

проходить через u та w . Відрізок що з'єднує v та v' не може перетинати ребро P , оскільки таке ребро мало б кінцеву точку всередині трикутника що знаходиться далі від прямої яка проходить через u та w , а це суперечить визначенню v' . Отже vv' є діагоналлю.

Отже, діагональ існує. Будь-яка діагональ розрізає Q на два простих багатокутники Q_1 і Q_2 . Нехай m_1 - кількість вершин Q_1 , а m_2 - кількість вершин з Q_2 . І m_1 і m_2 повинні бути меншими за n , тому за допомогою індукції Q_1 і Q_2 можуть бути триангульованими. Отже, Q також можна триангулювати.

Тепер доведемо, що будь-яка триангуляція Q складається з $n - 2$ трикутників. Розглянемо довільну діагональ у деякій триангуляції T_q . Ця діагональ розрізає Q на два багатокутники з вершинами m_1 та m_2 відповідно. Кожна вершина Q зустрічається рівно в одному з двох багатокутників, за винятком вершин визначення діагоналі, які зустрічаються в обох багатокутниках. Отже, $m_1 + m_2 = n + 2$. За індукцією будь-яка триангуляція Q_i складається з $m_i - 2$ трикутників, що означає що T_q складається з $(m_1 - 2) + (m_2 - 2) = n - 2$ трикутників. \square

2.2 Розфарбування в 3 кольори

У теоремі 1 вказується, що будь-який простий багатокутник з n вершинами може бути захищений з $n - 2$ камерами. Це твердження є правильним, але не мінімізованим. Наприклад, камера, розміщена на діагоналі, захищатиме два трикутники, отже розмістивши камери на добре підібраних діагоналях, ми могли б зменшити кількість камер приблизно до $n / 2$. Розміщення камер у вершинах є кращим, тому що вершина може співпадати у

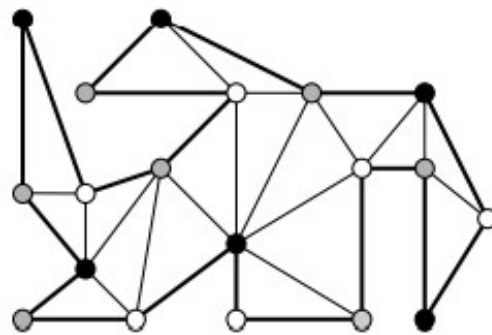


Рис. 2.4

багатьох трикутниках, причому камера у вершині охороняє всіх ці трикутники. Це свідчить про наступний підхід.

Нехай T_q (рис. 2.4) є триангуляцією Q . Оберемо підмножину вершин Q , наприклад таку, що будь-який трикутник у T_q має принаймні одну вибрану вершину, і розмістимо камери у вибрані вершини. Щоб знайти таку підмножину, ми присвоюємо кожній вершині Q колір: білий, сірий або чорний. Забарвлення буде таким, що будь-які дві вершини з'єднані по краю або діагоналі мають різні кольори. Отримаємо 3-кольоровий трикутний багатокутник. У ньому кожен трикутник має білу, сіру і чорну вершини. Отже, вибираючи найменший кількість кольорів для розміщення камер, ми можемо захистити Q , використовуючи щонайбільше $n / 3$ камери.

Природньо виникає питання чи завжди існує 3-кольори. Моя відповідь - так. Щоб побачити це, ми дивимось на двоїстому графі T_q . Граф S (рис. 2.5) має вузол для кожного трикутника у T_q .

Позначимо трикутник, що відповідає вузлу v , як $t(v)$. Існує ребро між двома вузлами v і μ , якщо $t(v)$ і $t(\mu)$ мають спільну діагональ.

Ребра в графі S відповідають діагоналям в T_q . Оскільки будь-яка діагональ розрізає P на дві частини, то видалення ребра з S розбиває граф на дві частини. Отже, S це дерево. Це означає що ми можемо знайти 3-кольорове забарвлення, використовуючи пошук в глибину. Поки ми робимо перший пошук глибини, то дотримуємось того, що усі

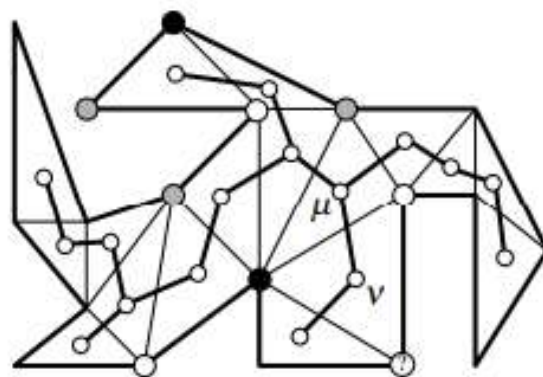


Рис. 2.5

вершини вже були пофарбовані в білий, сірий або чорний кольори, і немає двох пов'язаних вершин, які б отримали однаковий колір. З цього випливає, що ми обчислили 3-кольорове забарвлення, коли зустрічаються всі трикутники. Глибину першого пошуку можна запустити з будь-якого вузла S . Тепер

припустимо, що ми дійшли до вузла v в S , що надходить від вузла μ . Отже, $t(v)$ і $t(\mu)$ мають спільну діагональ.

Так як вершини $t(\mu)$ вже забарвлені, залишається лише одна вершина $t(v)$ яка має бути кольоровою. Для цієї вершини залишився один колір, а саме колір, який не використовується для вершин діагоналі між $t(v)$ і $t(\mu)$. Оскільки S є дерево, то інші вузли, що прилягають до v ми ще не відвідували, тому можемо пофарбувати вершину у останній колір.

2.3 Оцінка точності

Отже, виходить, що простий багатокутник завжди може бути розфарбований 3-ма кольорами. Тому будь-який простий багатокутник можна захистити за допомогою $n / 3$ камер. Можливо можна це покращити, адже камера, розміщена у вершині, може захистити більше трикутників.

Покажемо що цього зробити не можна на прикладі гребінчастого багатокутника. Кожен зубчик має 3 вершини і ми не можемо зробити так, щоб 1 камера могла охоплювати два зубчики.

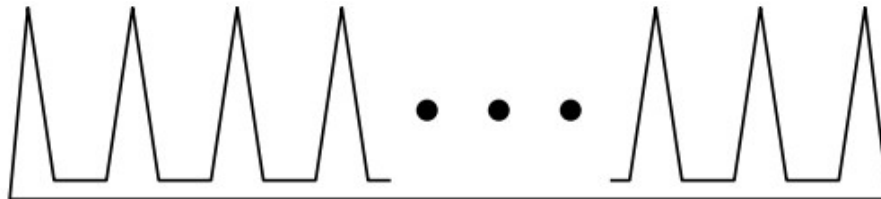


Рис. 2.6

Також якщо ми проведемо лінію, щоб утворити із зубчиків п'ятикутника, то побачимо що для їх освітлення камера повинна стояти обов'язково у самому п'ятикутнику. Тому що, якщо вона не стоїть у п'ятикутнику, то ми не зможемо освітити, наприклад, вершину. Тоді виходить що камер потрібно взяти не менше ніж k -сть зубчиків, а оскільки в нас $3t$ вершин і t зубчиків, тому ми не можемо сподіватися на стратегію, яка завжди дає результат менше $n / 3$ камери. Іншими словами, 3-кольоровий підхід є оптимальним для найгірший випадок.

3 Часткові випадки

3.1 Задача про розбиття багатокутника на опуклі чотирикутники

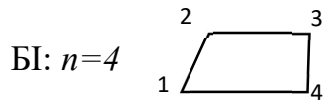
Дано:

Нехай задано простий багатокутник P з n вершинами, разом з набором діагоналей, що розподіляють P на опуклі чотирикутники. Знайдемо скільки камер потрібно для охорони P та чи не суперечить це теоремі картинної галереї.

Розв'язання:

1) Для заданого поділу простого багатокутника P на опуклі чотирикутники діагоналями, існує розфарбування його вершин в 4 кольори таке, що кожен чотирикутник містить вершину кожного кольору. Доведемо це методом індукції.

Доведення. Індукція по n



ІІ: $n-2 \rightarrow n$

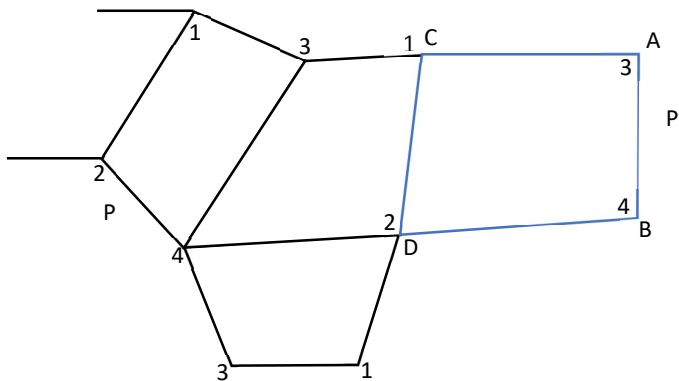


Рис. 3.1

Нехай P - багатокутник з n вершинами. Після його триангуляції маємо $n - 2$ трикутників, а оскільки чотирикутників вдвічі менше, то отримаємо $\frac{n-2}{2}$ чотирикутники.

Обираємо чотирикутник у якого 3 сторони є сторонами даного багатокутника. Він існує через те, що ми маємо $\frac{n-2}{2}$ чотирикутника. Припустимо що кожен містить максимум 2 сторони багатокутника. Тоді всього виходить $\frac{n-2}{2} * 2 = n - 2$ сторони. Отже, буде чотирикутник, що містить 3 сторони багатокутника.

Якщо відокремимо чотирикутник $ABCD$, то решту багатокутника можливо розфарбувати у 4 кольори. Розглянемо ситуацію з чотирикутником $ABCD$. Оскільки вершини C і D розфарбовані в 2 різних кольори, то для розфарбування цього чотирикутника залишається розфарбувати дві інші вершини (A та B) у 2 інших кольори.

2) Для охорони опуклого багатокутника достатньо однієї камери, яка може бути розміщена будь-де всередині багатокутника, в тому числі на вершині. Отже, можна розфарбувати вершини даного багатокутника P , який описано у 1 пункті, обравши колір з найменшою кількістю вершин і розмістити камеру у кожній вершині цього кольору. Таким чином, у кожного з чотирикутників буде камера в одній з вершин і цього достатньо для охорони P . Кількість камер – $\lceil \frac{n}{4} \rceil$.

3) Ця оцінка є точною, тому що наприклад для фігури на малюнку не можна обійтися кількістю камер менше $\lceil \frac{n}{4} \rceil$.

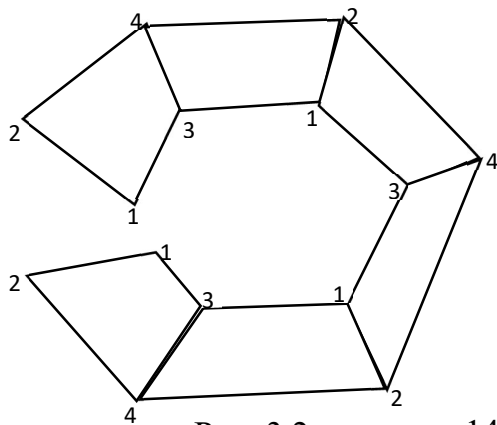


Рис. 3.2 $n=14$, 3 камери

4) Це не суперечить теоремі картинної галереї, тому що $\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$ є верхньою оцінкою. Не кожен простий багатокутник можна розділити на опуклі чотирикутники діагоналями, тому це є частковим випадком, для якого можна скоротити кількість камер.

3.2 Задача про багатокутник з горизонтальними або вертикальними лініями

Теорема 2

$\frac{n}{4}$ камер завжди достатньо для захисту будь-якого ортогонального багатокутника з n вершинами.

Означення 4

Горизонтальний або вертикальний зріз P - продовження горизонтального або вертикального краю P у рефлекторній вершині, у напрямку до внутрішньої частини P , поки він не потрапить до межі P .

Означення 5

Горизонтальний або вертикальний зріз є непарним, якщо він розбиває P на дві частини, які є непустими багатокутниками P_1 і P_2 , з n_1 і n_2 вершинами відповідно такими, що принаймні один з n_1 або n_2 дорівнює $4k + 2$ для деякого k .

О'Рурк писав що якщо ми зможемо довести, що будь-який ортогональний багатокутник має непарний зріз, тоді з теорема 2 буде впливати, що якщо $n_1 + n_2 \leq n + 2$, маємо $\left\lceil \frac{n_1}{4} \right\rceil + \left\lceil \frac{n_2}{4} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$. Внутрішні кути у вершинах ортогонального багатокутника або розміром $\frac{\pi}{2}$ або $\frac{3\pi}{3}$, і називаються опуклі або рефлекторні вершини відповідно. Загальновідомий факт, який ми використаємо

тут полягає в тому, що будь-який ортогональний багатокутник з n вершинами має рівно $\frac{n-4}{2}$ рефлекторних вершин.

Враховуючи ортогональний багатокутник P , ми позначимо його краї як верхній, нижній, правий та лівий природним способом, а потім назвемо рефлекторну вершину P верхньою лівою вершиною рефлексу якщо край P , що падають на нього, є лівим верхнім краєм. Правий верхній, правий нижній і лівий нижній край визначається так само.

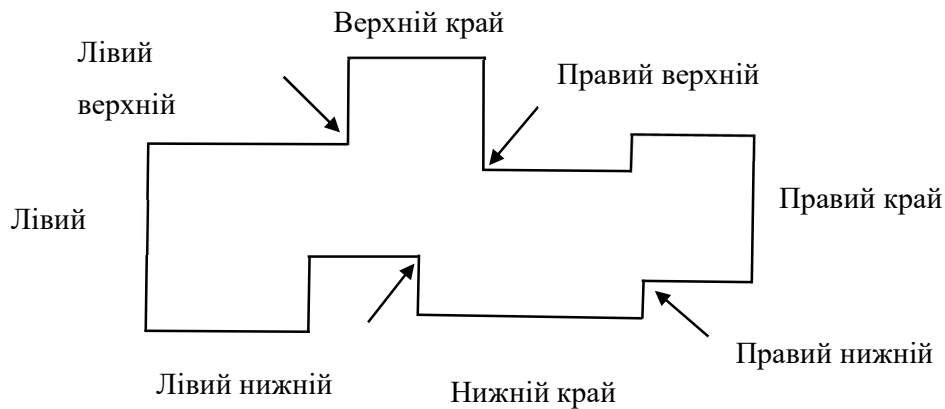


Рис. 3.3 (Класифікація ребер та вершин ортогонального багатокутника)

Доведення теореми 2

Наш результат є правдивим для ортогональних багатокутників з чотирьома або шістьма вершинами. Нехай P буде багатокутником щонайменше з вісьмома вершинами. Розіб'ємо набір рефлекторних вершин P на два набори; S_1 , що містить всі праві верхні і ліві нижні вершини рефлексу P , і S_2 , що містить всі ліві верхні та праві нижні вершини. Оскільки P має $\frac{n-4}{2}$ рефлекторних вершин, то одна з S_1 або S_2 має не більше $\frac{n}{4}$ вершин. Припустимо, що це S_1 . Якщо розміщення камер в кожній вершині S_1 займає весь P , тоді все вирішено. Припустимо що в P є точка p , не охоплена S_1 . Розглянемо найдовший горизонтальний відрізок s , що містить p і міститься в P . Нехай e і f – це краї P , що містять кінцеві точки s .

Розглянемо найбільший прямокутник R , що містить c і міститься в P . Нехай e' і f' - ребра P , які перетинають верхні і нижні ребра R відповідно. Оскільки p не видно з жодної точки в S_1 , виходить, що e і e' зустрічаються у верхній лівій кутовій точці R . Так само f і f' зустрічаються в нижній правій кутовій точці P .

Нехай q і q' - верхня права і нижня ліва вершини R . Якщо вони є вершинами P , то виходить, що P це R , і доводити нічого не потрібно.

Інакше є два випадки:

1. Жодне з q і q' не є вершинами P .
2. Саме один із них, скажімо q , є вершиною P .

Якщо жодне з q і q' не є вершинами P , тоді ми можемо зробити два горизонтальних зрізи, які генерують прямокутник, що міститься в R і містить c як показано на Рисунку 3.4. З цього випливає, що одним із цих двох горизонтальних зрізів є непарний зріз P .

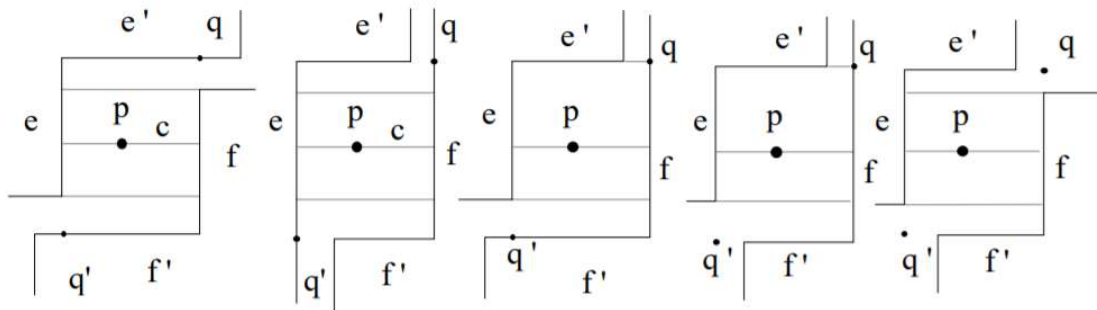


Рис. 3.4 (Це всі випадки, що виникають, коли жодне з q і q' є вершинами P .)

Нехай тоді лише q є вершиною P . Якщо e і f' містяться належним чином в лівому нижньому краї R , то потім, розширивши горизонтальний край P , що падає на нижню вершину e , а вертикальний край P падає до лівої кінцевої точки f' , отримаємо багатокутник з $n - 4$ вершинами, який за допомогою індукції може охоронятися $\frac{n-4}{2}$ камерами. Оскільки R можна охороняти одним захистом, наступний наш результат.

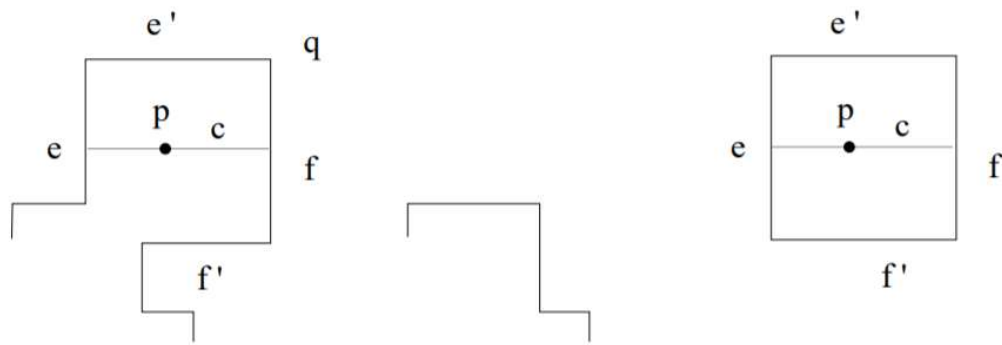


Рис. 3.5 (Випадок, коли e та f' належним чином містяться в лівому та нижньому краї P .)

Припустимо тоді, що f' містить нижній край P або він досягає лівої кінцевої точки f або крайньої лівої кінцівки горизонтального ребра g , що падає на нижню вершину e . У другому випадку, якщо ми досягаємо лівої кінцевої точки f' , ця точка генерує вертикальний непарний зріз P , що залишає багатокутник з шістьма ребрами праворуч, а інший з $n - 4$ ліворуч. У цьому випадку наш результат знову слідує за індукцією. Випадок, коли ми досягаємо крайньої лівої точки g слідує аналогічним чином. Припустимо тоді, що ми потрапили у вертикальний край P . Нехай x - найвища вершина з P , що міститься в l . Тоді ми можемо генерувати два зрізи P в x , горизонтальний зріз h та вертикальний зріз h' . Нехай P' це ортогональний під багатокутник P зліва h' , отриманого розрізанням P вздовж h' , і P'' це під багатокутник над h отримано розрізанням P уздовж h . Якщо P' має t вершин, P'' містить $t + 2$ вершини, і, отже, або h , або h' є непарним вирізом. \square

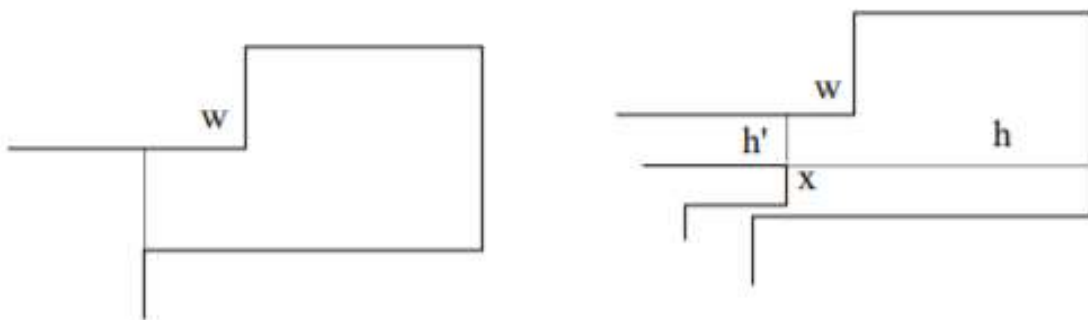


Рис. 3.6 (Випадок, коли f' правильно міститься в нижньому краї R .)

3.3 Задача про багатокутник з “дірками”

Дано:

Довести що довільний багатокутник з “дірками” допускає триангуляцію. Знайти кількість необхідних трикутників.

Доведення:

- 1) Спочатку потрібно довести існування діагоналі всередині багатокутника з “дірками”. Це доводиться аналогічно тому, як було доведено у теоремі 1.
- 2) Методом математичної індукції доведемо що багатокутник з дірками можна триангулювати.

Введемо позначення:

n -кількість вершин

h -кількість дірок

БІ: $h=0, n=3$. Очевидно

ІІ: Спочатку робимо індукцію по h , потім по n .

Нехай d - внутрішня діагональ. Якщо одна з її точок належить зовнішньому багатокутнику, а інша внутрішньому, то ця діагональ зменшує кількість дірок на 1 і збільшує кількість вершин на 2.

Інакше обидві вершини належать зовнішньому багатокутнику. Тоді діагональ ділить багатокутник на два інших багатокутника:

$$P_1 \text{ з } h_1 \leq h, n_1 \leq n \text{ і } P_2 \text{ з } h_2 \leq h, n_2 < n$$

В обох випадках отриманий багатокутник допускає триангуляцію за припущенням індукції. \square

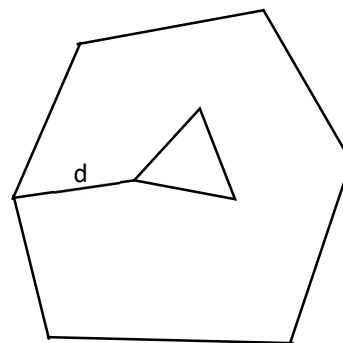


Рис. 3.7

3) Тепер знайдемо кількість необхідних трикутників.

Розглянемо триангульований багатокутник як граф.

n -кількість вершин (багатокутника та дірок)

h -кількість дірок

t -кількість трикутників

$|V| = n$ – кількість вершин

$|E| = \frac{3t+n}{2}$ –кількість ребер. Рахуємо суму сторін всіх трикутників та сторін багатокутника, зовнішні та внутрішні дірки. Виходить, що кожне ребро пораховане двічі, тому ділимо все навпіл.

$|F| = t + h + 1$ – кількість граней. Кожен трикутник це грань, також кожна дірка це грань і ще плюс зовнішня грань.

За теоремою Ейлера:

$$|V| - |E| + |F| = 2$$

$$n - \frac{3t+n}{2} + t + h + 1 = 2$$

$$t = n + 2h - 2$$

Отже, кількість трикутників: $n + 2h - 2$.

4 Висновки

В розділі 2 моєї курсової роботи зроблено огляд означень і теорем про триангуляцію (2.1) та розфарбування простого багатокутника в три кольори. У підрозділі 2.3 розповідається про оцінку точності захисту простого багатокутника за допомогою $n/3$ камер.

В розділі 3 розглянуто часткові випадки задачі про картинну галерею. В підрозділі 3.1 досліджена та розв'язана задача про розбиття багатокутника на опуклі чотирикутники. В підрозділі 3.2 розглянута та доведена теорема про достатню кількість камер для захисту будь якого ортогонального багатокутника з n вершинами. В підрозділі 3.3 розв'язаний частковий випадок задачі про картинну галерею, а саме задача про багатокутник з “дірками”.

5 Список літератури

1. Computational Geometry - Algorithms and Applications, Third Edition / [Mark de Berg, Otfried Cheong, Marc van Kreveld, Mark Overmars] – Springer-Verlag Berlin Heidelberg–2008, 2000, 1997.
2. Sixth proof of the Orthogonal Art Gallery Theorem / [Jorge Urrutia] - February 11, 1997
3. Доказательство из книги. Лучшие доказательства со времен Евклида до наших дней / М. Айгнер, Г. Циглер; Пер. с англ. – М.; Мир, 2006.