

Міністерство освіти і науки України

Національний університет «Києво-Могилянська академія»

Факультет економічних наук

Кафедра фінансів

Кваліфікаційна робота

освітній ступінь – бакалавр

на тему: **«КІЛЬКІСНІ МЕТОДИ РОЗРАХУНКУ ОПЦІОНІВ В
МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЯХ ФІНАНСОВИХ РИНКІВ»**

Спеціальності:

072 Фінанси, банківська справа та страхування

Стець Катерина Миколаївна

Керівник: Дяковський Д.А,
кандидат економічних наук,
старший викладач

Рецензент Мельник С. М
(прізвище та ініціали)

Кваліфікаційна робота захищена
з оцінкою «_____»

Секретар ЕК _____
«____» _____ 2021 р.

Київ 2021

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ 1	6
ТЕОРЕТИЧНІ АСПЕКТИ ОЦІНКИ ОПЦІОНІВ.....	6
1.1 Характеристика та класифікація опціонів. Основні положення та функції.....	6
1.2 Марківський процес в оцінці опціонів.....	13
1.3 Біномінальні дерева	19
Висновки до розділу 1	27
РОЗДІЛ 2	29
ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ В РОЗРАХУНКУ ЦІН ОПЦІОНІВ.....	29
2.1 Геометричний броунівський рух	29
2.2 Часткове диференціальне рівняння Black Scholes Model.....	32
Висновки до розділу 2	40
РОЗДІЛ 3	42
МОДЕЛЮВАННЯ ЦІНОУТВОРЕННЯ ОПЦІОНІВ.....	42
3.1 Модель Black Scholes на Python	42
3.2 Прогнозування волатильності на Python	52
3.3 Пропозиції хеджування відкритих позицій в українських реаліях	59
Висновки до розділу 3	69
ВИСНОВКИ.....	71
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	72
ДОДАТКИ	76

ВСТУП

Актуальність теми. В сучасному кризовому світі виробники страждають від втрати ймовірного та реального прибутку в результаті волатильності цін. Неможливо впевнено планувати казначейські операції підприємства через можливий брак коштів. Через цю проблему компанії починають шукати укладати страхові контракти задля забезпечення стабільного фінансового потоку. Найбільш доцільним та доступним інструментом для страхування та хеджування цінових ризиків є опціон. Саме тому, вибір математичного методу оцінки опціонів є нагальною дилемою сучасних трейдерів.

Серед наукових праць, у яких досліджуються теоретичні та практичні аспекти визначення вартості опціонів, слід виокремити публікації таких іноземних науковців, як: Ф.Блек(F.Black), М.Шоулз (M.Scholes), Д.Трейнор (D.Trainor), Пол Самуельсон (Paul A. Samuelson), Ш.Касов (S.T. Kassouf), Е.Торп (Edward O.Thorp), Т. Коупленд (T. Copeland), М. Кендалл, Дж. Олсон (J. Ohlson), Г. Мандл (G. Mandle), К. Рабель (K. Rabel), П. Зепельфріке (P. Seppelfricke), В. Пеемьоллер (V. Peemöller) та ін.

Питання визначення вартості опціонів розглядаються в працях таких відомих вітчизняних науковців, як А.А.Марков, Овчаров Л. А., Вентцель Е.С., В.М. Геєць, М.А. Козоріз, О.Я. Побурко, Г.П. Федорова, І.Й. Яремко, І. Івашковська, Д. Степанов, О. Мендрул, Т. Момот та інших.

Мета і задачі дослідження. Метою дослідження є вивчення теоретичних та практичних аспектів встановлення методів розрахунку справедливої ціни опціонів.

Виходячи зі встановленої мети в даній роботі поставлені та вирішені наступні завдання:

- визначити поняття опціонів та їх сутність, розглянути основні положення та функції похідного фінансового інструменту;
- дослідити математичні моделі розрахунку справедливої ціни опціонів;
- здійснити аналіз використання похідного фінансового інструменту українськими виробниками задля хеджування ризиків;
- здійснити розгляд практичного застосування математичних методів розрахунку опціонів для українських агровиробників.

Об'єкт і предмет дослідження.

Об'єктом дослідження - методика розрахунку справедливої ціни похідних фінансових інструментів, зокрема опціонів.

Предмет дослідження - вивчення теоретичних та практичних аспектів розрахунку ціни опціонів.

Дана робота складається з трьох розділів.

У першому розділі описано теоретичні аспекти моделей оцінки розрахунку ціни опціонів, зокрема основні положення, класифікація опціонів та марківський процес в оцінці опціонів.

У другому розділі було проведено аналіз застосування головних математичних моделей в розрахунку ціни опціонів. Було висвітлено детальну історію, суть та практичне застосування головної математичної моделі розрахунку справедливої ціни опціонів.

У третьому розділі було проведено моделювання справедливої ціни опціонів та прогнозування волатильності активу. Був проведений аналіз активності українських агровиробників в сфері мінімізації ризиків господарчої діяльності, які спричинені високим рівнем волатильності

світових цін. Розроблено пропозиції щодо практичного використання фінансового деривативу в цілях хеджування ризиків вітчизняних виробників.

Загальний обсяг роботи складає 75 сторінок, 30 рисунків , 6 таблиць та 1 додаток.

Теоретичною і методологічною основою роботи послужили розробки вітчизняних і зарубіжних вчених в області аналізу методології розрахунків справедливої ціни опціонів.

Методи дослідження. У роботі було використано такі загальнонаукові методи як узагальнення, порівняння, розрахунок, аналіз, програмування, економічне моделювання.

Інформаційну базу становлять дані Yahoo Finance, Bloomberg, CME Group.

Ключові слова: *європейський опціон, волатильність, модель, фінансовий інструмент, ринок, біржа, трейдер, Python, хеджування, розрахунок, скрипт .*

РОЗДІЛ 1

ТЕОРЕТИЧНІ АСПЕКТИ ОЦІНКИ ОПЦІОНІВ

1.1 Характеристика та класифікація опціонів. Основні положення та функції

Опціон (на англ. Option - вибір, бажання, розсуд) - це один з похідних фінансових інструментів товарного, фондового або валютного ринку. Він являє собою договір, за яким потенційний продавець або потенційний покупець отримує право, але не зобов'язання, здійснити продаж або купівлю активу за заздалегідь обумовленою ціною в певний момент часу в майбутньому або протягом певного відрізка.

Опціон - це контракт, який, в обмін на премію, надає покупцеві право (без зобов'язання) на покупку або продаж фінансового активу за встановленою ціною на певну дату або раніше.

Опціон - це похідний інструмент фінансового типу, при покупці якого у інвестора з'являється право (але не обов'язок) здійснити покупку або продаж в майбутньому активу, що лежить в його основі, за вартістю, зафіксованою в момент покупки. Особа, що продає даний контракт бере на себе зобов'язання передати покупцеві опціону базовий актив за обумовленою ціною (навіть якщо йому буде це не вигідно).

Опціон в перекладі з англійської мови означає вибір, що чітко дає поняття головного його якості: трейдер має найширші можливості визначення конкретних умов опціону, найбільш задовольняють його інтересам, але він не зобов'язаний купувати або продавати актив, що лежить в основі опціону. Власнику опціону дається право на здійснення угоди, але не зобов'язання.

Опціонний контракт називають асиметричним інструментом, так як положення покупця і продавця в угоді нерівнозначні. Граничний ризик покупця опціону лімітований розміром премії, яку він платить продавцю, при цьому потенційно-можливий ризик продавця може бути безмежно високим. Одночасно з цим максимальний дохід продавця може перевищувати обсягу отриманої від покупця премії, а прибуток покупця в теорії може бути нескінченно великою [15, 17, 20, 22, 23].

Торгівля опціонами служить двом цілям: страхування ризиків зміни цін і вилучення спекулятивного прибутку. Однак, на відміну від інших похідних інструментів, опціони цікаві можливостями їх комбінування в опціонні стратегії. Активами, що лежать в основі опціонних контрактів, можуть бути:

- звичайні і привілейовані акції;
- біржові індекси;
- валюти;
- ф'ючерси на біржові товари (енергоносії, метали, зернові і т.д.);
- процентні ставки і облігації.

Розглянемо конкретний приклад. Припустимо, ви вважаєте, що ціна на пшеницю нового врожаю буде вищою, що склалася в даний момент на ринку. Купуючи опціон на її покупку за існуючими в даний період часу ринковими цінами, ви платите продавцеві премію - незначну частину вартості товару. У майбутньому, якщо ваші припущення виправдалися, купуючи пшеницю за «старими» цінами, ви істотно заощадите. А якщо ціна зернових, всупереч прогнозам, знизиться, то ви маєте право відмовитися від угоди, втративши сплачену раніше премію.

Історія опціонів. Всю історію опціонних ринків можна розділити на два періоди - небіржовими і біржовий.

Перші згадки про опціони датуються другим тисячоліттям до нашої ери. До 1973 року існували небіржеві опціони на товари і акції.

Родоначальником біржової торгівлі опціонами є Чиказька торгова палата (біржа) - СВОТ, яка створила до початку 1973 року спеціалізований філія - Чиказьку біржу опціонів (СВОЕ).

26 квітня 1973 року СВОЕ відкрила свої двері. Обсяг торгів в перший день склав 911 опціонних контрактів на 16 акцій. Крім стандартизації умов опціонних контрактів, біржа ввела систему маркет-мейкерів для ринків акцій, включених в лістинг, і також відповідає за опціон Клірингову Корпорацію (ОСС) - гаранта всіх опціонних угод.

Після цього зростання біржового ринку опціонів відбувався темпами, що не піддаються опису:

Американська фондова біржа (AMEX) включила опціони в свій лістинг в січні 1975 року.

Філадельфійська - в червні.

Успіх біржового ринку, в кінцевому рахунку, прискорив розвиток опціонів в тому вигляді, якому ми їх сьогодні спостерігаємо.

Тривало введення нових продуктів:

- з 1981 року - процентні опціони (на облігації, іпотеки, казначейські векселі);

- з 1982 року - валютні опціони, опціони на ф'ючерсні контракти на облігації;

- з 1983 року - опціони на біржові індекси, опціони на ф'ючерсні контракти на біржові індекси.

Опціонна торгівля набула найбільшого поширення в США, основні обсяги торгівлі опціонами проходять саме на американських біржах:

Чиказька товарна біржа (СМЕ),

Американська фондова біржа (AMEX),

Нью-Йоркська фондова біржа (New York Stock Exchange).

Основний майданчик для торгівлі опціонами в Європі - Лондонська міжнародна біржа фінансових ф'ючерсів і опціонів (LIFFE) [27, 29, 30-32].

Види опціонів. Опціони можна класифікувати наступним чином:

- по типу - колл або пут;
- за базисним активом - товар, акції, валюта, ф'ючерси;
- за стилем - європейський, американський, азіатський;
- за типом розрахунків - зі сплатою премії або без сплати премії;
- по ринку обігу.

Типи опціонів. Існує два типи опціонів.

Опціон колл (call) надає однієї зі сторін контракту, іменованої утримувачем опціону, право купити базисний актив у визначений термін в майбутньому за фіксованою ціною. Його також називають опціоном на покупку.

Опціон пут (put) дає право власнику опціону продати базисний актив у визначений термін в майбутньому за фіксованою ціною. Його також називають опціоном на продаж.

Для власника опціону право на покупку або продаж не є зобов'язанням, тобто він може не використовувати це право.

Види опціонів залежно від базисного активу. Залежно від базисних активів розрізняють наступні види опціонів:

Товарний опціон, що надає покупцеві право купити або продати певну кількість товару за ціною використання опціону до певного терміну.

Фондовий опціон, в основі якого лежать звичайні акції корпорації.

Валютний опціон, що дає право на покупку або продаж певного обсягу іноземної валюти за певною ціною протягом певного періоду часу.

Опціони на готівку товари - процентні опціони, на цінні папери з фіксованою прибутковістю.

Опціон на індекс, об'єктом якого є величина кратна певного фондового індексу.

Опціон на процентну ставку повинен бути сплачений наперед за певною відсотковою ставкою.

Опціон на ф'ючерсний контракт, що дає право на покупку або продаж ф'ючерсного контракту із заданим місяцем поставки і певним базисним активом. Зазвичай термін базисних ф'ючерсних контрактів закінчується незабаром після дати закінчення опціонного контракту.

Існує також ряд більш рідкісних і складних видів.

Стилі опціонів. Важливою характеристикою опціонів є їх стиль. Стиль може бути американським, європейським і азійським. При цьому географічна прив'язка опціону не має значення, наприклад, можна купити американський опціон на європейській біржі.

Американський стиль - опціонний контракт може бути виконаний власником в будь-який день до закінчення терміну.

Європейський стиль - опціонний контракт може бути виконаний тільки після закінчення терміну.

Азійський стиль - опціон виповнюється за середньозваженою ціною за весь період дії опціону протягом усього часу з моменту покупки. Операції з такими опціонами проводяться на позабіржових ринках, типові для валютних ринків і ринків металів.

Біржові опціони частіше є американськими, позабіржові - європейськими та азійськими.

Види опціонів по типу розрахунків. Існує два види опціонів по тиру розрахунків: зі сплатою премії і без сплати премії.

Опціони, за якими покупець виплачує продавцю премію безпосередньо в момент укладання угоди називаються опціонами зі сплатою премії.

Премія опціону - це сума грошей, що сплачується покупцем опціону продавцеві при укладенні опціонного контракту. За економічною суттю премія є платою за право укласти угоду в майбутньому. Величина премії, зазвичай, встановлюється в результаті вирівнювання попиту та пропозиції на ринку між покупцями і продавцями опціонів. Крім цього, існують математичні моделі, що дозволяють обчислити премію на основі поточної вартості базового активу та його стохастичних властивостей (волатильності, прибутковості, і т. Д.).

Опціони без сплати премії існують тільки на ф'ючерси.

Види опціонів по ринку обігу. Існує два види опціонів по ринку звернення: біржовий і позабіржовий.

Біржові опціони є стандартними біржовими контрактами. Для них біржею встановлюється специфікація контракту. При укладанні угод учасниками торгів обмовляється тільки величина премії за опціоном, всі інші параметри і стандарти встановлені біржею. Інформації, що публікується біржею котируванням за опціоном є середня величина премії по даному опціону за день.

Позабіржові опціони стандартизовані, вони полягають на довільних умовах, які обумовлюють учасники при укладанні угоди. Основними покупцями позабіржового ринку є великі фінансові інститути, яким необхідно хеджувати свої портфелі і відкриті позиції. Їм можуть бути потрібні дати закінчення, відмінні від стандартних. Основними продавцями позабіржових опціонів є в основному великі інвестиційні компанії.

Як це не парадоксально, але позабіржовий ринок розвинений набагато сильніше, ніж біржовий, навіть незважаючи на відсутність системи гарантійного забезпечення та високого рівня ліквідності на ньому. Пояснюється це тим, що види опціонів позабіржового ринку більш гнучкі і більше орієнтовані на кінцевого споживача.

Біржі роблять спроби змістити позабіржову торгівлю на біржове ринковий простір. З'явилися FLEX-опціони, умови за якими дозволяють варіювати дати закінчення і страйк-ціни.

Характеристика опціону. Опціон в обов'язковому порядку має:

Базовий актив - тобто той актив, право купити або продати який купується;

Тип - call або put;

Дату виконання;

Премію або ціну опціону (страйк) - позначає плату за право здійснити операцію в майбутньому, яку платить покупець продавцеві в сьогоднішні. Цю інформацію можна почерпнути з заголовка. Наприклад, код опціону SBRF-12.14 141014CA 4500 розшифровується так:

SBRF - опціон на ф'ючерсний контракт на акції Ощадбанку;

12.14 - дата виконання ф'ючерсу;

141014 - останній день звернення опціону;

З - колл-опціон;

A - «американський»;

4500 - страйк-ціна.

Виконання опціону. Щоб виконати опціон, трейдер повинен направити повідомлення або продавцеві, якщо опціон куплений у дилера, або гаранту (клірингової організації), якщо він куплений на біржі. Після отримання правильно складеного повідомлення призначається продавець опціону.

Залежно від його типу продавець зобов'язаний зайняти або довгу, або коротку позицію в базовому контракті (купити або продати базовий контракт) за встановленою ціною виконання [33-35].

Переваги опціонів:

- Відкриття опціонних позицій вимагає менших сум, ніж на ринку спот.
- Ви самі вибираєте ціну виконання, дату закінчення і актив опціонного контракту.
- Дає масу можливостей для хеджування.
- Можна обмежити свої ризики, не обмежуючи при цьому потенційні прибутки.

1.2 Марківський процес в оцінці опціонів

На початку XX ст. французький математик Луї Башельє захистив в Паризькому університеті докторську дисертацію під назвою «Теорія спекуляції», в якій запропонував незвичайну модель ціноутворення акцій на Паризькій фондовій біржі. Проаналізувавши рух ринкових цін на акції, Л. Башельє прийшов до висновку про те, що ціноутворення активів на фондовій біржі повністю стохастично, тому він використовував ідею броунівського руху для моделювання ціноутворення акцій.

Спекулянти випадковим чином виставляють заявки на продаж і на купівлю цінних паперів, це, в свою чергу, випадковим чином впливає на ринкові ціни фондових активів. Даний механізм нагадав французькому математику процес броунівського руху, який спостерігається, наприклад, в біології при русі пилку квітів на поверхні нерухомої води. Новаторським кроком в дослідженнях Л. Башельє було те, що він перейшов в аналізі від абсолютних значень цін фондових активів до величинам їх збільшень. У

тому випадку, коли число заявок на покупку перевищувало число заявок на продаж за той же часовий період, ціна біржового активу зростала на деяку позитивну величину, і навпаки.

Приріст ціни демонструвало властивості випадкового процесу. Несподіваним виявився результат дослідження, що полягає в тому, що збільшення цін акцій виявилися статистично незалежними. Поточне зміна ціни активу не залежало від попереднього збільшення ціни. Тому неможливо передбачати динаміку такого тимчасового ряду, використовуючи тільки лише ретроінформацію. Таким властивістю володіють марківські процеси, про які ще нічого не було відомо в 1900 р Відкриття Л. Башельє випередило свій час, воно було не зрозуміло не тільки практиками фондового ринку, а й економістами-теоретиками. Минуло ще понад півстоліття, перш ніж новаторська робота Башельє була по достоїнству оцінена професіоналами ринку цінних паперів.

Тільки в другій половині XX ст. економісти почали активно застосовувати методи випадкових блукань в своїх дослідженнях. Так, наприклад, відомий англійський статистик М. Кендалл опублікував в 1953 р роботу, в якій було доведено відсутність автокореляцій у тимчасових рядах збільшень цін фондових активів і продемонстрована можливість застосування моделі випадкового блукання при дослідженні процесів на фондовому ринку. Результати досліджень Л. Башельє і М. Кендалла були застосовані при побудові теорії ефективного ринку, яка в даний час досить популярна в економічних дослідженнях¹.

Дослідження Л. Башельє були продовжені і розвинені найбільшим російським математиком Андрієм Марковим (1856-1922), академіком, яка внесла великий внесок в теорію ймовірностей, математичний аналіз і теорію чисел. У 1886 р А. Марков був обраний професором фізико-математичного

факультету Санкт-Петербурзького університету. Його найвідоміші дослідження були присвячені випадковим процесам з дискретною і безперервною тимчасовою компонентою, які згодом були названі його ім'ям. Ланцюги Маркова є важливим математичним інструментом в аналізі випадкових процесів.

Основна ідея Маркова - гіпотеза про те, що дослідження випадкових процесів може бути спрощено, якщо розглядати майбутній розвиток процесу як незалежна від минулих подій, враховуючи тільки нинішнє його стан. Такий підхід використовується для спрощення пророкувань майбутнього стану стохастичного процесу.

Ланцюги Маркова є фундаментальною частиною теорії випадкових процесів. Вони широко використовуються в багатьох різних дисциплінах, в тому числі і в фінансах. Ланцюг Маркова - це стохастичний процес, який задовольняє Марківському властивості, що означає - минуле і майбутнє незалежні, коли даний відомо. Іншими словами, якщо відомо поточний стан процесу, то ніякої додаткової інформації з його минулих станів не потрібно, для того щоб найкращим чином передбачити його майбутній стан. Ця простота дозволяє значно зменшити кількість параметрів при вивченні такого процесу. У математичних термінах визначення може бути виражене в такий спосіб: стохастичний процес $X = \{X_t, t \in \mathbb{N}\}$ в рахунковому просторі S є марківським процесом з дискретним часом, якщо:

для всіх $t \geq 0$ $X_t \in S$;

для всіх $t \geq 1$ і для всіх $i_0, i_1, \dots, i_{t-1} \in S$ маємо:

$$P\{X_t = i_t | X_{t-1} = i_{t-1}, \dots, X_0 = i_0\} = P\{X_t = i_t | X_{t-1} = i_{t-1}\},$$

(1.1)

Ланцюги Маркова використовуються для обчислення ймовірності події переходу об'єкта в інший стан або ймовірності того, що об'єкт залишиться в тому ж стані, що і раніше. Як приклад можна привести розрахунок ймовірності збереження гарної погоди завтра. Якщо ми довільно вибираємо ймовірності прогнозу погоди, то вона може бути такою: якщо сьогодні сонячний день, то ймовірність того, що наступного дня буде дощовий, дорівнює, наприклад, 0,3, а ймовірність того, що наступного дня буде сонячний, дорівнює 0,7. Якщо день сьогодні дощовий, то ймовірність того, що завтра день буде сонячний, - 0,2, а того, що наступного дня залишиться дощовим, - 0,8.

Ланцюги Маркова можуть бути двох різних типів: з дискретним часом і безперервним. Це означає, що є процеси, коли зміни відбуваються в певних станах, і процеси, коли зміни спостерігаються безперервно. У фінансових розрахунках в основному застосовуються ланцюга Маркова з дискретним часом. Одним із прикладів ілюстрації ланцюга Маркова з дискретним часом є ціна активу, значення якої реєструється тільки в певний момент часу. Безперервний ланцюг Маркова змінюється в будь-який час. Це можна пояснити економічним явищем, в якому зміни події відбуваються безперервно і не мають фіксованих «кроків». Одним з добре відомих прикладів безперервної марківського ланцюга є пуассоновський процес, який часто практикується в теорії масового обслуговування.

Для кінцевої ланцюга Маркова простір станів S зазвичай задається формулою $S = \{1, \dots, t\}$, для нескінченного ланцюга Маркова - $S = \{0, 1, 2, \dots\}$. Ланцюги Маркова можуть бути стаціонарними і, отже, незалежними від їх початкового стану. Нескінченні ланцюги Маркова стаціонарного стану не мають, стаціонарна ланцюг Маркова повинна бути однорідною за часом.

Оскільки ланцюга Маркова можуть бути застосовані для моделювання багатьох процесів реального світу, вони використовуються в найрізноманітніших ситуаціях. Їх застосування варіюється від нанесення на карту популяцій тваринного світу до складання комп'ютерних пошукових алгоритмів, написання музичних композицій і розпізнавання мови. В економіці і фінансах вони часто використовуються для прогнозування макроекономічних змінних, ділових циклів, цін опціонів, а також для розрахунку кредитних ризиків. При тестуванні фінансового ринку марківського ланцюга використовуються для моделювання випадкової динаміки. Ціна активу, наприклад, в методі стохастичного дисконтування задається випадковим фактором, який визначається за допомогою марківського ланцюга.

Основною проблемою при застосуванні ланцюгів Маркова є формування матриці переходу зі значеннями ймовірностей переходу. Зрозуміло, ці ймовірності можна було б оцінити, проаналізувавши історичні дані, наприклад, ринкових цін деривативів. Це може, однак, привести до ненадійних результатів, якщо майбутня ситуація на фондовому ринку буде розвиватися не так, як в минулому. Тому можна вчинити по-іншому, ґрунтуючись на комбінації емпіричних даних і більш суб'єктивних, якісних даних, таких як думки експертів. Для об'єднання різних джерел інформації можна використовувати теорію ймовірностей, застосовуючи методи зважування різних джерел даних, наприклад, метод ієрархій Сааті.

На будь-якому ринку цінних паперів може спостерігатися або підйом ринкових цін активів (бичачі ринки, коли учасники оптимістично дивляться в майбутнє), або падіння ринкових цін активів (ведмежий ринок, коли учасниками опановують песимістичні настрої), або бічний ринок (періоди часу, коли ринок не характеризується ні зниженням, ні зростанням загальних

цін). Після тижня, що характеризується бичачої тенденцією, існує ймовірність 0,9 того, що піде ще одна бичача тиждень. Крім того, є ймовірність 0,075, що бичача тиждень зміниться ведмежою, або 0,025 шансу того, що ринок перейде в биковий. Після ведмежою тижня прогнозується ймовірність 0,8 того, що майбутній тиждень також буде ведмежою, і т. д. Записуючи ці ймовірності в таблицю, отримаємо наступну матрицю переходів (1.2):

$$M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,075 & 0,025 \\ 0,15 & 0,8 & 0,05 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

Потім ми створюємо вектор C розмірністю 1×3 , який містить інформацію про те, яка з трьох різних ситуацій нас буде цікавити в майбутньому через певну кількість тижнів. Наприклад, перший стовпець відповідає за бичачий ринок, другий - за ведмежий, третій - за бічною ринок. Якщо ми запишемо вектор C в формі $C = (0; 1; 0)$, то нас буде цікавити ймовірність появи ведмежих тенденцій на ринку через певну кількість тижнів в майбутньому. Наприклад, через 5 тижнів ймовірність того, що на фондовому ринку будуть переважати зниження цін активів, буде дорівнює 0,45 (1.3):

$$P = C \times M^5 = (0 \quad 1 \quad 0) \times \begin{pmatrix} 0,9 & 0,075 & 0,025 \\ 0,15 & 0,8 & 0,05 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix} = \\ (0,48 \quad 0,45 \quad 0,07). \quad (1.3)$$

Неважко показати, що при збільшенні кількості періодів (при p , яка прагне до нескінченності) ймовірності настання бичачих або ведмежих тенденцій на фондовому ринку будуть прагнути до своїх граничних значень (0,63; 0,31; 0,05), а стаціонарні ймовірності цього ланцюга Маркова не залежить від початкового стану. Ці результати можуть бути використані різними способами, наприклад для обчислення середнього часу, необхідного для закінчення ведмежого періоду, або ймовірності того, що бичачий ринок стане ведмежим або бічним.

Ланцюги Маркова використовуються в широкому спектрі академічних завдань: від біології до економіки. При прогнозуванні вартості активу ланцюга Маркова можуть використовуватися для моделювання хаотичності. Ціни на фондові активи встановлюються випадковим чином, що може бути апроксимувати ланцюгом Маркова. Існують різні типи концепцій щодо ланцюгів Маркова в залежності від характеру параметрів і області застосування. Вони можуть бути обчислені по дискретному або безперервному часу. Простір станів може бути як кінцеве, так і лічильно-нескінченне. Ланцюги Маркова з лічильно-нескінченним простором станів можуть бути стаціонарними, що означає: процес сходиться до стійкого стану.

Марківські процеси неоднорідні, можна виділити кілька їх видів: основний процес Вінера, узагальнений процес Вінера і процес Іто. [1-7].

1.3 Біномінальні дерева

Біноміальна модель ціноутворення на опціони - це метод оцінки опціонів, розроблений у 1979 р. Біноміальна модель ціноутворення на опціони використовує ітераційну процедуру, що дозволяє вказати вузли або моменти часу протягом проміжку часу між датою оцінки та датою закінчення строку дії опціону.

Модель зменшує можливості зміни ціни та усуває можливість арбітражу.

З біноміальними ціновими моделями опціонів припускають, що можливі два результати. У моделі ціноутворення ці два результати - це рух вгору або рух вниз. Головною перевагою біноміальної моделі ціноутворення є те, що вони математично прості. Однак ці моделі можуть стати складними в багатоперіодній моделі.

На відміну від моделі Black-Scholes, яка забезпечує числовий результат на основі вхідних даних, біноміальна модель дозволяє розрахувати актив та опціон для декількох періодів разом із діапазоном можливих результатів для кожного періоду.

Перевага цього багатоперіодного перегляду полягає в тому, що трейдер може візуалізувати зміну ціни активів від періоду до періоду та оцінювати варіант на основі рішень, прийнятих у різні моменти часу. Для американського опціону, який може бути здійснений у будь-який час до закінчення терміну дії, біноміальна модель може надати уявлення про те, коли реалізація опціону може бути доцільною і коли вона повинна триматися довше.

Переглядаючи біноміальне дерево значень, трейдер може заздалегідь визначити, коли може бути прийнято рішення щодо відкриття позицій. Якщо опціон має позитивне значення, існує можливість скористатись правом на

здійснення опціону, тоді як, якщо опціон має значення менше нуля, його слід тримати довше.

Для оцінки опціону європейського типу необхідно і достатньо мати лише параметри передбачуваного розподілу цін активу на момент виконання опціону і класичну формулу Black-Scholes. Опціони американського типу відміну від європейських опціонів можуть бути виконані в будь-який час за термін дії. Тому для оцінки американських, а, отже, і реальних опціонів потрібно принципово інша методологія. Відомі моделі, засновані на зворотному динамічному програмуванні дерева цін, не пов'язані безпосередньо з часом, тобто по суті теж є статичними [16, 18, 21, 24-26, 28].

З метою підвищення ефективності розрахунків розроблені динамічні моделі в системі Matlab / Simulink. Моделі засновані на формулах Кокса-Росса-Рубінштейна для ланцюгових темпів зростання u , зниження d ціни активу і безризиковою прибутковості a за період, а також для ймовірності p збільшення ціни активу за період:

$$u = e^5, \quad d = e^{-5}, \quad a = e^{r-q}, \quad p = \frac{(a-d)}{(u-d)}, \quad (1.4)$$

Однак наведені формули відрізняються від відомих тим, що волатильність s , безризикова ставка і дивідендна ставка q відносяться до одного шагу.

Значення волатильності s і доходностей r , q за один крок (інтервал) визначаються за такими формулами:

$$s = \frac{s}{\sqrt{n}} \sqrt{t}, \quad r = \frac{R}{n} t, \quad q = \frac{Q}{n} t, \quad (1.5)$$

де S, R, Q - відповідні показники в річному вимірі;

n - заданий число інтервалів;

t - тривалість життя опціону в частках року.

Принцип побудови біноміального дерева полягає в формуванні квадратної матриці, яка заповнена тільки праворуч від головної діагоналі, тому виходить верхня трикутна матриця. Вліво верхньому кутку матриці на перетині першого стовпця і першого рядка завжди одиниця. Перший рядок, відповідна верхній межі дерева цін, - зростаюча геометрична прогресія зі знаменником, рівним коефіцієнту зростання ціни активу $u = \exp(s)$, де s - волатильність за один крок. Головна діагональ, відповідна нижній межі дерева цін, - спадна геометрична прогресія зі знаменником, рівним коефіцієнту падіння ціни активу за один крок $d = \exp(-s)$, звідки випливає, що $d = 1/u$. Інші елементи матриці, відповідні гілкам дерева цін, виходять множенням кожного елемента головної діагоналі по рядках на базисний коефіцієнт зростання зліва направо до останнього стовпчика включно.

Для генерації біноміального дерева розроблені дві схеми: динамічна і матрична. Динамічна схема, за допомогою якої виходить сукупність траєкторій, пов'язана з джерелом часу $In1$ показана на рис 1.1.

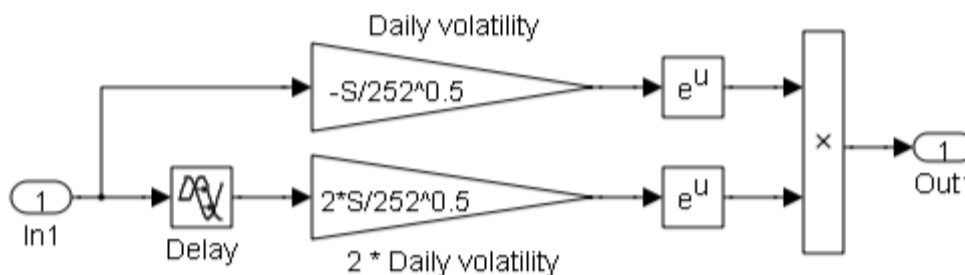


Рисунок 1.1 - Динамічний генератор біноміального дерева

Джерело: сформовано автором на основі [9,10].

В трикутних блоках-помножувачах виконується операція множення волатильності на поточний час, а експоненціальна функція дає відповідні коефіцієнти зростання або падіння. Блок Delay призначений для затримки тимчасового сигналу на один крок модельного часу $[0: 1: n]$, в даному випадку, на один день в межах від нуля до n , де n -термін життя опціону.

Якщо в попередній моделі біноміальне дерево реалізується як сукупність траєкторій, то в останньої моделі, показаної на рис. 1.4, формується квадратна матриця розмірності $(n + 1) \times (n + 1)$, що відповідає біноміальній схемою, де n -число періодів до виконання опціону. Схема матричного генератора показана на рис. 1.2, де призначення блоків зрозуміло за назвами за винятком, можливо, блоку Toeplitz, матриця Теплиця або діагонально-постійна матриця, названа на честь німецького математика, в якій кожна спадна зліва направо діагональ є постійною, оскільки саме так розташовані базисні коефіцієнти зростання в біноміальних деревах.

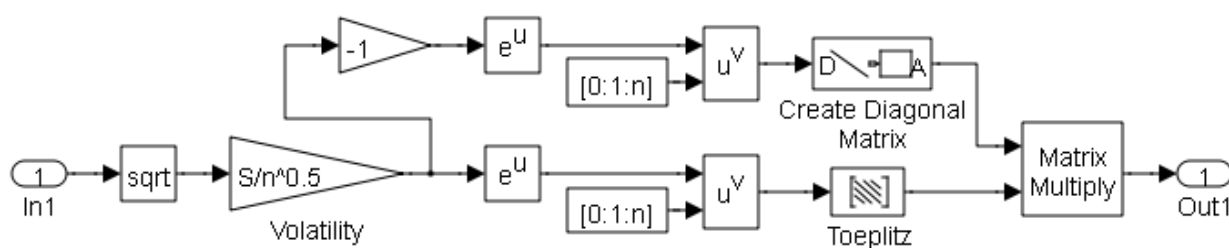


Рисунок 1.2 - Матричний генератор біноміального дерева

Джерело: сформовано автором на основі [9,10].

Принцип розрахунку справедливої ціни американських опціонів в зв'язку з можливістю дострокового виконання полягає в оцінці економічної доцільності дострокового виконання на основі поетапного порівняння

альтернативних рішень від моменту виконання до моменту укладення контракту. Принципова схема розрахунку для найпростішої двохперіодної біноміальної моделі показана на рис 1.3, де наведені всі необхідні вихідні дані, а час до виконання опціону становить один рік.

У функціональних блоках $f(u)$ записані формули виду $[u(1) \times p + u(2) \times (1-p)] \times \exp(-r)$ для обчислення дисконтованих середньозважених значень $u(1)$ і $u(2)$, $u(2)$ і $u(3)$ ймовірних цін попереднього періоду, де вагами є ймовірність зростання і падіння ціни активу, що становлять в сумі одиницю. Отримані результати, які відповідають вартості продовження володіння опціоном, зв'язуються в вектор - стовпець, виконується порівняння цих значень з вихідними даними передостаннього періоду, тобто з вартістю виконання, і вибираються максимальні значення. Далі процедура повторюється до нульового моменту часу, де за допомогою блоку SelectRows виділяється перший рядок, що містить ціну опціону американського типу.

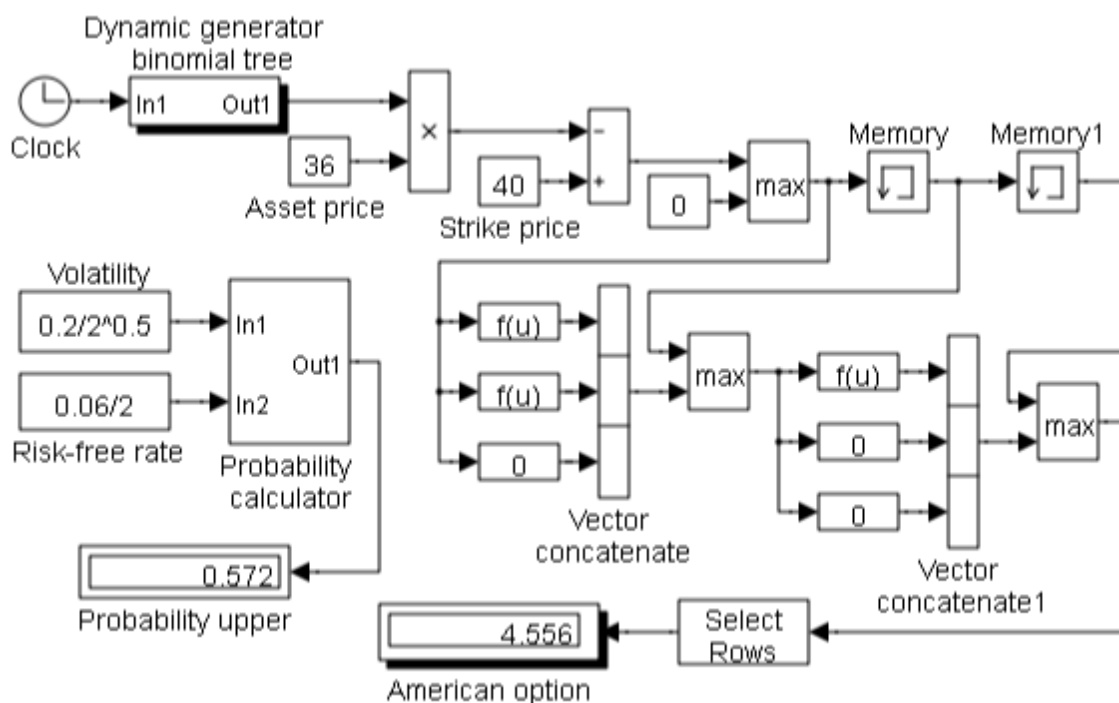


Рисунок 1.3 - Принципова схема оцінки американського опціону

Джерело: сформовано автором на основі [9,10].

Блоки пам'яті Memoгу по суті затримують вихідну інформацію дерева цін кожен раз на один крок. Час до виконання опціону задається в частках року. При заданому часу моделювання, яке тут становить один рік, блок Max обчислює вибірку позитивних значень опціонів на покупку або продаж в залежності від положення знаків плюс і мінус в попередньому блоці.

На рис 1.4 наведена п'ятиперіодна матрична модель для обчислення цін американських опціонів, де показані результати розрахунків по тимчасових інтервалах. Принцип розрахунку залишається тим самим, змінюється тільки технологія, яка в порівнянні з динамічною моделлю дещо ускладнюється.

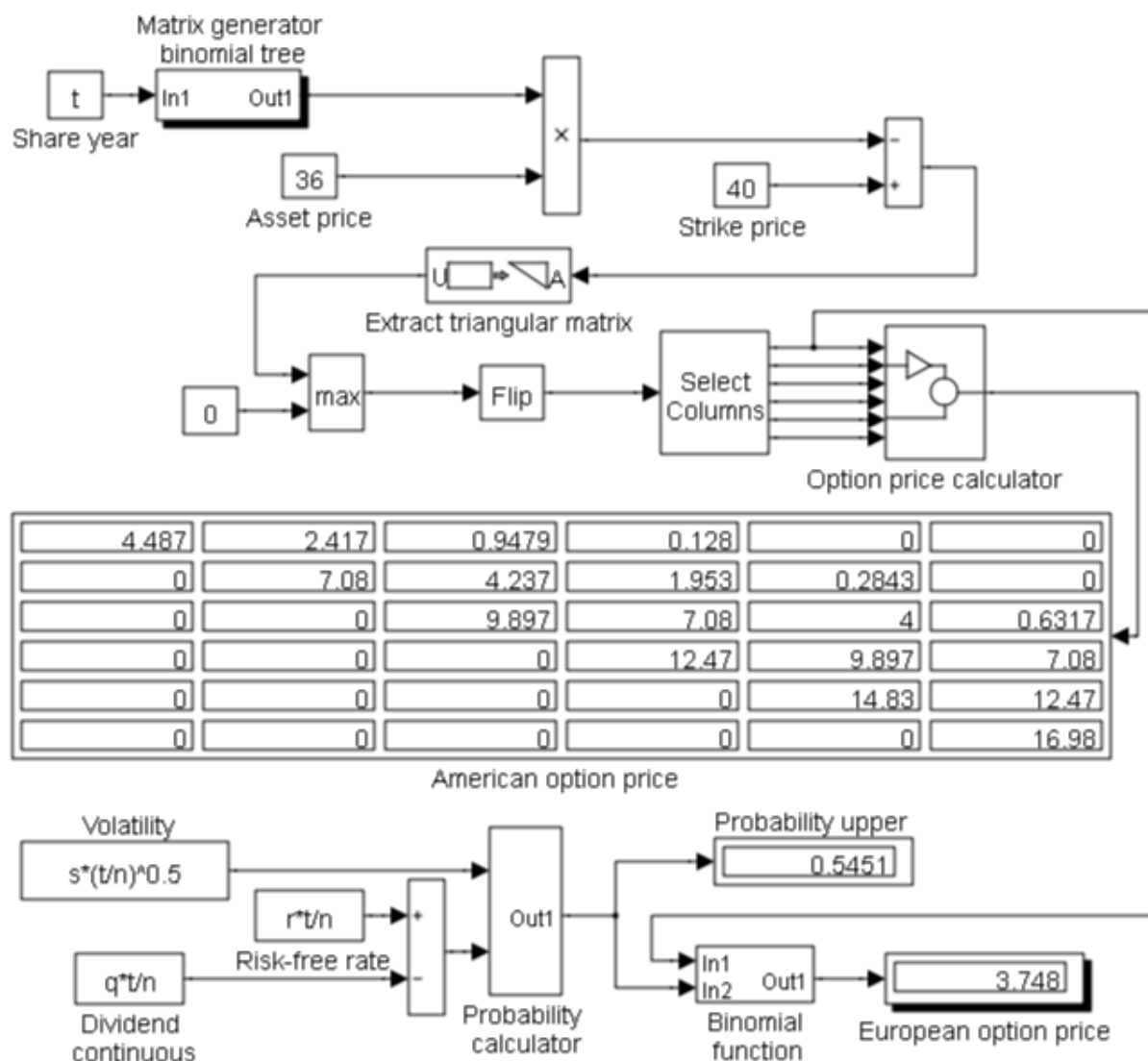


Рисунок 1.4 - Матрична модель американського опціону

Джерело: сформовано автором на основі [9,10].

Тут вихідна матриця дерева цін за допомогою блоку Flip повертається на 180 градусів в горизонтальній площині, так що останній рядок стає першим і навпаки. У блоці SelectColumns виділяються стовпці, починаючи з першого, з якими послідовно виконуються стандартні операції попарного вагового усереднення, дисконтування і порівняння для пошуку максимуму.

Для обчислення ціни європейського опціону використовується вбудована вагова функція біноміального розподілу `binopdf ([0: 1: n], n, 1 -p)`, для якої вхідними величинами служать термін життя опціону NI ймовірність p . Слід зазначити, що така ж функція біноміального розподілу є і в додатку Excel. Отримані значення відповідних ваг множаться на значення ймовірних цін на момент виконання опціону, складаються, а потім дисконтуються до нульового моменту часу за безризиковою ставкою за допомогою модуля `Vinomialfunction`. Видно, що вартість опціону дорівнює 4,487, а точне значення вартості американського опціону на продаж, отримане біноміальним методом для 200 інтервалів -4.4858. Розроблені блокові динамічні моделі мають переваги в порівнянні з відомими моделями по критеріям спостережливості і керованості. Спостереженість в даному контексті трактується, як можливість бачити на екрані тільки те, що необхідно, причому на будь-якому етапі моделювання. Керованість на увазі можливість інтерактивного режиму і цілеспрямованого впливу на роботу моделі за допомогою керуючих параметрів і змінних [8, 9].

Висновки до розділу 1

Опціон – це похідний фінансовий інструмент для хеджування, контракт, який, в обмін на премію, надає покупцеві право (без зобов'язання) на покупку або продаж фінансового активу за встановленою ціною на певну дату або раніше. Ціноутворення опціону на біржі це випадковий процес, тому гостро постає гіпотеза Маркова про те, що дослідження випадкових процесів може бути спрощено, якщо розглядати майбутній розвиток процесу як незалежна від минулих подій, враховуючи тільки нинішній його стан. З точки зору вірогідності популярними математичними моделями

моделювання ціноутворення опціонів є біноміальні дерева та ланцюги Маркова.

РОЗДІЛ 2

ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ В РОЗРАХУНКУ ЦІН ОПЦІОНІВ

2.1 Геометричний броунівський рух

Геометричний броунівський рух — випадковий процес з неперервним часом, логарифм якого являє собою броунівський рух. Дотримуючись П. Самуельсону, вперше який запропонував використовувати цей процес в моделях динаміки економічних змінних, його також називають економічним броунівським рухом.

Для моделювання траєкторій геометричного броунівського руху на заданому проміжку часу $[0; 7]$ можна використовувати метод Монте-Карло. На рис. 2.1 зображена одна з можливих траєкторій цього випадкового процесу на інтервалі $[0; 1]$ з початковим значенням $X_0 = 10$.

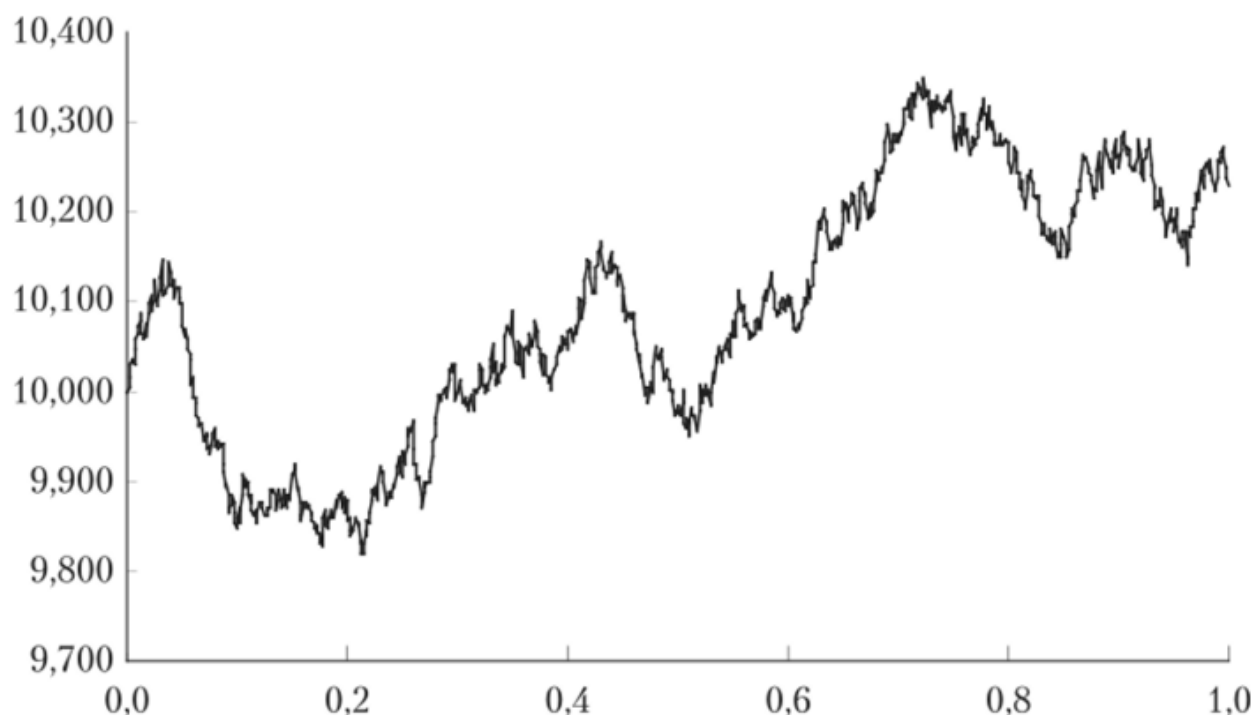


Рисунок 2.1 - Траєкторія геометричного броунівського руху на інтервалі

Джерело: сформовано автором на основі [12].

З Рис. 2.1. ясно, що принаймні візуально траєкторії геометричного броунівського руху відповідають графіками зміни цін різних ризикових фінансових активів, наприклад акцій.

Стохастичне диференціальне рівняння з постійними коефіцієнтами $c, = c$ і $at = a$ має явне рішення такого вигляду:

$$X_t = X_0 e^{at} e^{\sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t}, \quad (2.1)$$

або

$$X_t = S \times e^{h_t}, \quad (2.2)$$

де процес

$$h_t = (a - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t, \quad (2.3)$$

називають броунівським рухом з локальним знесенням $(a - \frac{\sigma^2}{2})t$ і дифузією $A2$.

Тривалий досвід використання моделі геометричного броунівського руху на фінансових ринках стосовно завдань управління портфелем високоліквідних активів і до оцінки вартості різних фінансових інструментів показав її безсумнівну адекватність.

Зокрема, відома теорія ціноутворення опціонів Black Scholes повністю побудована на передумові про те, що ціни базових активів, на які укладаються опціонні контракти, змінюються відповідно до процесів геометричного броунівського руху.

З іншого боку, незважаючи на простоту моделі геометричного броунівського руху, оцінка її параметрів (σ і μ) в режимі онлайн на фондових ринках є складним. Параметр знесення μ , як правило, взагалі не оцінюється надійно за результатами спостережень динаміки цін активів. Проте, як було зазначено вище, динаміка високоліквідних активів на фондових ринках характеризується наявністю властивості квазіергодичності, досить важливого при оцінці прибутковості інвестиційного портфеля і розрахунку вартості фінансових інструментів. Процес геометричного броунівського руху слід використовувати перш за все в якості моделі ціноутворення високоліквідних акцій при побудові управління портфелем цінних паперів або при визначенні справедливих цін відповідних похідних фінансових інструментів.

Тут важливо зазначити, що інвестиційний портфель необов'язково включає в себе високоліквідні акції, що торгуються на фондовому ринку. Він може містити і ряд високоліквідних активів, NPV (чиста поточна вартість, або в англomовній літературі net present value) яких може в багатьох випадках

описуватися моделлю геометричного броунівського руху навіть з постійними коефіцієнтами зносу і волатильності. В якості таких активів можуть виступати, зокрема, фірми, прибутковості діяльності яких схильні до певних випадкових флуктуацій [10-14].

2.2 Часткове диференціальне рівняння Black Scholes Model

Модель Black Scholes - це математична модель, що імітує динаміку фінансового ринку, що містить похідні фінансові інструменти, такі як опціони, ф'ючерси, форварди та свопи.

Ключовою властивістю моделі є те, що вона показує, що опціон має унікальну ціну незалежно від ризику базового забезпечення активу та його очікуваної дохідності. Модель базується на частково диференціальному рівнянні так званому рівнянні Black Scholes, з якого можна вивести формулу Black Scholes, яка дає теоретичну оцінку правильної ціни європейських опціонів на акції. На основі робіт, раніше розроблених дослідниками ринку та практиками, такими як Луї Башельє, Шин Кассуф та Ед Торп, Фішер Блек та Майрон Скоулз продемонстрували в 1968 році, що динамічний перегляд портфеля знімає очікуване повернення цінного паперу, таким чином винаходячи аргумент нейтральний до ризику. У 1970 році, після спроби застосувати формулу до ринків і зазнавши фінансових збитків через відсутність управління ризиками в їх торгівлі, вони вирішили зосередитись у своїй галузі, академічному середовищі. Після трьох років зусиль, формула - названа на честь них за оприлюднення - була нарешті опублікована в 1973 р. У статті під назвою "Ціноутворення на опціони та корпоративні зобов'язання" у Журналі політичної економії. Роберт К. Мертон був першим, хто опублікував статтю, що розширює математичне розуміння моделі

ціноутворення на опціони, і ввів термін "модель ціноутворення на опціони Black.- Scholes ". Мертон і Скоулз отримали Нобелівську премію в галузі економічних наук за свою роботу в 1997 році. Комітет посилався на своє відкриття нейтральної динаміки перегляду як прорив, який відокремлює варіант від ризику базової безпеки. Хоча Блек не міг отримати премію через його смерть у 1995 році, Шведська академія нагородила його посмертно.

Ключовою ідеєю моделі є хеджування опціону шляхом купівлі та продажу базового активу в правильний спосіб і, як наслідок, для усунення ризику. Цей тип хеджування називається "постійний перегляд дельта-хеджування" і є основою для більш складних стратегій хеджування, таких як ті, що застосовуються інвестиційними банками та хедж-фондами.

Припущення моделі:

Оригінальна модель Black-Scholes базується на основному припущенні, що ринок складається принаймні з одного ризикованого активу (наприклад, акції) та одного (по суті) безризикового активу, такого як фонд грошового ринку, готівка чи державні облігації. Крім того, він передбачає три властивості двох активів і чотирьох самого ринку:

- Припущення щодо активів на ринку такі:

- 1) Норма прибутковості безризикового активу є постійною (таким чином ефективно діє як процентна ставка).
- 2) Передбачається, що миттєва логарифмічна дохідність ризикованого активу є нескінченно малою випадковою величиною з постійною волатильністю, точніше, більше схожа до геометричного броунівського руху.
- 3) Ризиковий актив не виплачує дивіденди.

- Припущення щодо самого ринку такі:

- 1) Відсутні можливості арбітражу (безризикового прибутку).

- 2) Можна позичити та взяти у борг будь-яку суму готівки за тією ж ставкою, що і процентна ставка безризикового активу.
- 3) Можна купувати та продавати будь-яку кількість акцій (включаючи короткі продажі).
- 4) На ринку відсутні трансакційні витрати (тобто немає комісії за купівлю або продаж цінних паперів або похідних інструментів).

У подальших розширеннях оригінальної моделі ці припущення були переглянуті з урахуванням динамічних процентних ставок за безризиковий актив (Merton, 1976), трансакційних витрат на купівлю-продаж (Ingersoll, 1976) та виплат дивідендів за ризиковий актив (Whaley, 1981). Проте найчастіше використовується оригінальна модель.

Рівняння Black-Scholes

Рівняння Black-Scholes - це часткове диференціальне рівняння, яке репрезентує розвиток цін європейських фондових опціонів на фінансових ринках, що діють відповідно до динаміки моделі Black-Scholes). Рівняння:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0, \quad (2.4)$$

де V - ціна опціону (як функція від двох змінних: ціни акцій S і часу t),

r - безризикова процентна ставка,

σ - волатильність логарифмічної дохідності базового цінного паперу.

Якщо переписати рівняння у такий вигляд:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = rV - rS \frac{\partial V}{\partial S}, \quad (2.5)$$

Тоді ліва сторона представляє зміну вартості / ціни опціону V через збільшення часу t + опуклість вартості опціону відносно ціни акції. Права сторона представляє безризикову віддачу від довгої позиції в опціоні та короткої позиції, що складається з $\frac{\partial V}{\partial t}$ частка акцій.

$$\Theta + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \Gamma = rV - rS \Delta, \quad (2.6)$$

Ключовим спостереженням дослідників було те, що безризикова дохідність комбінованого портфеля акцій та опціонів праворуч за будь-який нескінченно малий інтервал часу може бути виражене як сума тета (Θ) гамма (Γ). Це спостереження іноді називають "аргументом нейтрального ризику". Це пояснюється тим, що значення тета (Θ), як правило, від'ємне (оскільки вартість опціону зменшується із наближенням часу до закінчення терміну дії), а значення гамми (Γ), як правило, є позитивним (відображає прибутки, отримані портфелем від утримання опціону). Підсумовуючи, втрати від тета та прибутки від гамми компенсують один одного, приводячи до прибутку з безризиковою ставкою.

Формула Black- Scholes.

Формула Black- Scholes є рішенням вищезгаданого рівняння Black- Scholes, враховуючи граничні умови нижче (рівняння 2.7 та 2.8). Формула обчислює ціну європейських опціонів путів та коллів. Тобто він обчислює ціну контрактів на право (але не зобов'язання) придбати або продати деякий базовий актив за заздалегідь визначеною ціною на заздалегідь визначену

дату в майбутньому. На термін погашення / закінчення (T) значення таких європейських опціонів кол (C) та пут (P) задаються відповідно:

$$C_{E,T} = \max(0, S_T - X), \quad (2.7)$$

$$P_{E,T} = \max(0, X - S_T), \quad (2.8)$$

Блек і Скоулз показали, що функціональна форма аналітичного рішення рівняння Black- Scholes (рівняння 1 вище) з граничними умовами, заданими рівняннями 2.7 та 2.8, для європейського колл-опціону є:

$$C_E(S, t) = N(d_1)S - N(d_2)Xe^{-rT}, \quad (2.9)$$

Формула дає значення / ціну європейських колл-опціонів для акцій, що не виплачують дивіденди. Факторами, що входять у формулу, є S = ціна цінного паперу, T = дата закінчення терміну дії, t = поточна дата, X = ціна виконання (strike-ціна), r = безризикова процентна ставка і σ = волатильність (стандартне відхилення базового активу). Функція $N(\cdot)$ представляє кумулятивну функцію розподілу для нормального розподілу і може розглядатися як „ймовірність того, що випадкова величина менша або дорівнює її вхідним значенням (тобто d_1 і d_2) для нормального розподілу“. Будучи ймовірністю, значення $N(\cdot)$, іншими словами, завжди буде знаходитись між $0 \leq N(\cdot) \leq 1$. Вхідні дані d_1 і d_2 визначаються як:

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{X}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad (2.10)$$

$$d_2 = \frac{\ln(\frac{S}{X}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad (2.11)$$

По суті два терміни в сумі, наведеній за формулою Black- Scholes, можуть розглядатися як „поточна ціна акції, зважена на ймовірність того, що ви скористаєтесь своїм варіантом придбання акцій,, за мінусом ”зниженої ціни опціону, зваженою на ймовірність того, що ви скористаєтесь опціоном ", або просто" те, що ви отримаєте "мінус" те, що ви збираєтесь заплатити ".

Для європейського пут-опціону (контракти на право, але не зобов'язання, продати деякий базовий актив за заздалегідь визначеною ціною на заздалегідь визначену дату в майбутньому) еквівалентною функціональною формою є:

$$P_E(S, t) = N(-d_2)Xe^{-r(T-t)} - SN(-d_1), \quad (2.12)$$

Американські опціони

Оскільки американські опціони можуть бути застосовані в будь-яку дату до закінчення терміну дії (так звані «інструменти безперервної шкали часу»), їм набагато складніше мати справу з цими європейськими опціонами («інструменти з визначеним часом»). В першу чергу, оскільки вхідні аргументи будуть впливати на вартість опціону, це потрібно враховувати при вирішенні частково диференційне рівняння Black Scholes.

Досі немає готових рішень для американських опціонів згідно з рівнянням Black Scholes. Однак існують деякі особливі випадки:

для американських колл-опціонів за базовими активами, які не виплачують дивіденди (або інші виплати), ціна американського колл-опціону є такою ж, як для європейських колл-опціонів .

Для американських опціонів на придбання базових активів, які виплачують дивіденди протягом усього життя, може бути оптимально скористатися цим опціоном достроково. У таких випадках опціон може бути оптимально використаний безпосередньо перед тим, як по акціям перестануть виплачувати дивіденди.

Спочатку перевіряємо чи виконується нерівність:

$$D_1 \leq X(1 - e^{-r(T-t_1)}), \quad (2.13)$$

де S - ціна акції;

X - ціна виконання (*strike-ціна*);

D_1 - виплачений дивіденд;

t - поточна дата;

t_1 - дата виплати дивідендів;

T - дата закінчення строку дії опціону.

Якщо нерівність не виконується, достроково застосовувати її не оптимально. Якщо C - звичайна формула Black Scholes для європейських колл-опціонів, що не виплачують дивіденди (екв. X), значення американського колл-опціону можливо виразити через рівняння, де ціна акції (S) знижена:

$$C_A(S - e^{-r(t_1-t)}D_1, T - t), \quad (2.14)$$

Якщо нерівність виконується, початкові рівняння є оптимальними, і значення американського колл-опціону виражається наступним чином:

$$C_A = (S - e^{-r(t_1-t)}D_1) \times (N(b_1) + (N(a_1, -b_1, \rho)) + X e^{-r(T-t)}N(a_2, -b_2, \rho) - (X - D_1)e^{-r(t_1-t)}N(b_2), \quad (2.15)$$

де S - ціна акції;

T - дата закінчення строку дії опціону;

X - ціна виконання (*strike-ціна*);

r - безризикова відсоткова ставка;

σ - волатильність (стандартне відхилення логарифмічної дохідності акцій);

D_1 - виплата дивідендів.

Крім того, ρ задається як:

$$\rho = -\sqrt{\frac{t_1-t}{T-t}}, \quad (2.16)$$

a_1, a_2 :

$$a_1 = \frac{\ln(\frac{S - D_1 e^{-r(T-t_1)}}{X}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad (2.17)$$

$$a_2 = a_1 - \sigma\sqrt{T-t}, \quad (2.18)$$

b_1, b_2 :

$$b_1 = \frac{\ln(\frac{S - D_1 e^{-r(t_1-t)}}{S}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(t_1-t)}{\sigma\sqrt{t_1-t}}, \quad (2.19)$$

$$b_2 = b_1 - \sigma\sqrt{T-t}, \quad (2.20)$$

Обмеження

Само собою зрозуміло, що модель Black Scholes - це саме така теоретична модель, яка намагається оцінити, як поводить ся ринок, враховуючи вищезазначені припущення та невід'ємні обмеження наших власних чисельних оцінок безризикових процентних ставок (r) та майбутньої волатильності (σ). Тут слід підкреслити, що не всі припущення насправді є емпірично справедливими. Наприклад, суттєві обмеження виникають через:

- Заниження екстремальних рухів акцій, що призводять до хвостового ризику
- Припущення про миттєву, безвитратну торгівлю, що призводить до ризику ліквідності
- Припущення стаціонарного процесу, що призводить до ризику волатильності
- Припущення безперервного часу та торгівлі, що призводить до ризику розриву

Це повинно враховуватися у всіх інвестиційних стратегіях, наприклад, шляхом торгівлі на декількох біржах, хеджування за допомогою хеджування волатильності та гамма-хеджування відповідно.

У наступній частині буде розглянуто спосіб практичного використання вищезгаданої моделі та висвітлено можливості автоматизації розрахунку справедливої ціни опціонів.

Висновки до розділу 2

Для точного розрахунку ціни опціонів найбільш детально розроблена та популярна математична модель – це модель Black- Scholes. Ключовою ідеєю

моделі є хеджування опціону шляхом купівлі та продажу базового активу в правильний спосіб і, як наслідок, для усунення ризику.

РОЗДІЛ 3

МОДЕЛЮВАННЯ ЦІНОУТВОРЕННЯ ОПЦІОНІВ

3.1 Модель Black Scholes на Python

Як зазначалося раніше, опціон - це право купувати або продавати акції за узгодженою ціною та датою. Існує два типи опціонів, що використовуються для різних ситуацій, - це або колл-опціон, припускається що акція збільшиться в ціні, або пут-опціон, припускається що акція зменшиться у ціні.

Існують також два типи опціонів: американський та європейський. Розрахунки моделлю Black Scholes, які будуть зроблені нижче, стосуються європейських опціонів.

Модель Black Scholes вважається одним з найкращих способів визначення справедливих цін на опціони. Для цього потрібно п'ять змінних:

- strike-ціна опціону
- поточна ціна акцій
- час до закінчення строку дії
- безризикова ставка
- волатильність.

Нижче наведена формула розрахунку справедливої ціни за моделлю Black Scholes:

$$C = N(d_1)S_t - N(d_2)Ke^{-rt}, \quad (3.1)$$

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}}, \quad (3.2)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}, \quad (3.3)$$

де C = ціна колл-опціону;

N = кумулятивна функція розподілу стандартного нормального розподілу;

S_t = спотова ціна активу;

K = strike-ціна;

r = безризикова процентна ставка;

t = час до закінчення строку дії опціону;

σ = волатильність активу.

Модель обмежена певними фактами та станом. Наприклад, згідно з формулою протягом тримання опціону дивіденди не виплачувались (проте далі в розрахунок можливо додати цей аргумент), не враховані транзакційні та комісійні витрати при купівлі опціону. Вищезгаданою формулою можливо моделювати лише європейські опціони після закінчення терміну їх дії.

Так як вирахувати вручну за формулою є складно, в сучасних реаліях трейдери та аналітики розраховують ціну опціону завдяки програмуванню.

В моїй роботі будуть наведені приклади розрахунку ціни опціону за моделлю Black Scholes на двох найбільш зручних в програмуванні мовах : на Python та Matlab.

Програмування розрахунку ціни опціону за моделлю Black Scholes на Python:

- 1) Імпортуємо бібліотеки задля створення функції розрахунку справедливої ціни опціону. Для цього нам потрібні бібліотеки `numpy`, `math` та `scipy.stats`(рис 3.1) .

```
import numpy as np
import scipy.stats as si
import math
```

Рисунок 3.1 – Імпорт потрібних бібліотек в код

Джерело: складено автором на основі коду.

- 2) Задаємо формулу та аргументи, які вона може приймати.

До вищезгаданих компонентів формули можемо додати ставку дивідендів, які виплачувались. Перелік аргументів, які приймає функція (рис 3.2):

S = Ціна акцій на момент часу t

K = Strike Ціна

T = Час до закінчення строку дії опціону, зазначений як кількість років.

r = безризикова процентна ставка

d = ставка дивідендів

vol = волатильність активу (стандартне відхилення активу)

```
def BlackScholesModel(S,K,T,r,d,vol):
```

Рисунок 3.2 – Синтаксис головної формули моделі

Джерело: складено автором на основі коду.

- 3) Для коректного відображення ставок та зручності при розрахунку в коді, будь-яке число, яке ми введемо для безризикової ставки, дивідендної дохідності або волатильності, буде перетворено у відсотки, для цього ми просто ділимо на 100 (рис 3.3):

```
r=r/100
d=d/100
vol=vol/100
```

Рисунок 3.3 – Синтаксис коректного відображення ставок

Джерело: складено автором на основі коду.

- 4) Наступний крок це розрахунок $N(d1)$.

LN від (S / K) буде розраховано за допомогою `np.log`, тоді для дисперсії (або волатильності в квадраті) використовуємо `double *`, також використовуємо той самий метод для квадратного кореня, виконуючи $T^{0.5}$. Що стосується нормальної кумулятивної функції розподілу, ми можемо використовувати `"scipy.stats.norm.cdf"` (рис 3.4):

```
d1= ((np.log(S/K)) + ((r+0.5*vol**2)*T))/(vol*(T**0.5))
Nd1= si.norm.cdf(d1,0.0,1.0)
```

Рисунок 3.4 – Синтаксис розрахунку $N(d1)$.

Джерело: складено автором на основі коду.

5) Розрахунок $N(d2)$ проводимо так само, як для $N(d1)$ (рис 3.5):

```
d2= d1-(vol*(T**0.5))
Nd2= si.norm.cdf(d2,0.0,1.0)
```

Рисунок 3.5 – Синтаксис розрахунку $N(d2)$.

Джерело: складено автором на основі коду.

6) Один із останніх кроків, коли у нас є всі необхідні аргументи, ми можемо нарешті написати рівняння і вивести результат на екран, для цього ми просто називаємо нещодавно створені аргументи, також для $K e^{-rt}$, ми можемо використовувати експоненціальну функцію з математичної бібліотеки (рис 3.6):

```
C= (S*Nd1) - (K*(math.exp(-r*T))*Nd2)
return C
si.norm.cdf()
```

Рисунок 3.6 – Синтаксис повної головної формули з аргументами

Джерело: складено автором на основі коду.

7) Такий вигляд має повний код (рис 3.7):

```

import numpy as np
import scipy.stats as si
import math
def BlackScholesModel(S,K,T,r,d,vol):

    r=r/100
    d=d/100
    vol=vol/100
    d1= ((np.log(S/K)) + ((r+0.5*vol**2)*T))/(vol*(T**0.5))
    Nd1= si.norm.cdf(d1,0.0,1.0)
    d2= d1-(vol*(T**0.5))
    Nd2= si.norm.cdf(d2,0.0,1.0)

    C= (S*Nd1) - (K*(math.exp(-r*T))*Nd2)
    return C
    si.norm.cdf[()]

```

Рисунок 3.7 – Повний код моделі на Python

Джерело: складено автором на основі коду.

Завдяки калькулятору створеному раніше, можливо вирахувати справедливу ціну опціонів для будь-яких активів.

Застосуємо калькулятор для вираховування ціни опціонів. Зазначу, що вхідні аргументи для розрахунку були взяті на офіційному сайті Чиказької біржі в онлайн-режимі станом на 09.05.2021:

1.Розрахунок ціни опціону на кукурудзу за наступними вхідними параметрами:

- Strike-ціна- 705.0\$
- Спотова ціна активу– 726\$
- 30 днів до закінчення строку опціону
- 5% безризиковості
- Дивіденди не виплачуються
- 6.25% волатильності

Результат (рис 3.8):

```
C= BlackScholesModel(726,705,(30/365),5,0,6.25)
print(C)
```

24.04512744364058

Рисунок 3.8 – Розрахунок ціни опціону на кукурудзу

Джерело: складено автором на основі власних розрахунків.

Ціна опціону, який торгується на біржі (рис 3.9):

CALLS							
UPDATED	VOLUME	HIGH	LOW	PRIOR SETTLE	CHANGE	LAST	STRIKE PRICE
16:00:00 CT 09 May 2021	0	-	-	39'1	-	-	705.0

Рис 3.9 – Ціна опціону в реальному часі на чиказькій товарній біржі

Джерело : [36].

Бачимо, що біржова ціна вище за справедливу ціну прораховану моделлю, отже купуємо колл-опціон, так як біржа закладає в розрахунок ціни більшу волатильність. За моделлю, чим більше волатильність на даний момент часу, тим більше буде попит на продукцію.

2. Розрахунок ціни опціону на соєву олію за наступними вхідними параметрами:

- Strike-ціна - 61.5\$
- Спотова ціна активу - 67.95\$
- 30 днів до закінчення строку опціону
- 10% безризиковості
- Дивіденди не виплачуються
- 11.3% волатильності.

Результат (рис 3.10):

```
C= BlackScholesModel(67.95,61.5,(30/365),10,0,11.3)
print(C)
```

6.9536424547949025

Рисунок 3.10 – Розрахунок ціни опціону на соєву олію

Джерело: складено автором на основі власних розрахунків.

Ціна опціону, який торгується на біржі (рис 3.11):

CALLS							
UPDATED	VOLUME	HIGH	LOW	PRIOR SETTLE	CHANGE	LAST	STRIKE PRICE
16:00:00 CT 09 May 2021	0	-	-	3.655	-	-	61.5

Рис 3.11 – Ціна опціону в реальному часі на чиказькій товарній біржі

Джерело: [37].

Бачимо, що біржова ціна нижче за справедливу ціну прораховану моделлю, отже купуємо пут-опціон, так як біржа закладає в розрахунок меншу волатильність. За моделлю, чим менше волатильність на даний момент часу, тим менше буде попит на продукцію.

3. Розрахунок ціни опціону на пшеницю за наступними вхідними параметрами:

- Strike-ціна– 730\$
- Спотова ціна активу- 751\$
- 30 днів до закінчення строку опціону
- 4% безризиковості
- Дивіденди не виплачуються
- 10.2% волатильності

Результат (рис 3.12):


```
C= BlackScholesModel(751,730,(30/365),4,0,10.2)
print(C)
```

24.931940348804005

Рисунок 3.12 – Розрахунок ціни опціону на пшеницю

Джерело: складено автором на основі власних розрахунків.

Ціна опціону, який торгується на біржі (рис 3.13):

CALLS							
UPDATED	VOLUME	HIGH	LOW	PRIOR SETTLE	CHANGE	LAST	STRIKE PRICE
16:00:00 CT 09 May 2021	0	-	-	42'7	-	-	730.0

Рис 3.13 – Ціна опціону в реальному часі на чиказькій товарній біржі

Джерело : [38].

Бачимо, що біржова ціна вище за справедливую ціну прораховану моделлю, отже покупаємо колл-опціон, так як біржа закладає в розрахунок більшу волатильність.

4. Розрахунок ціни опціону на золото за наступними вхідними параметрами:

- Strike-ціна– 1815\$
- Спотова ціна активу- 1,835.98\$
- 30 днів до закінчення строку опціону,
- 6% безризиковості,
- Дивіденди не виплачуються
- 4.74% волатильності.

Результат (рис 3.14):

```
C= BlackScholesModel(1835.98,1815,(30/365),6,0,4.74)
print(C)
```

```
31.272474537343214
```

Рисунок 3.14 – Розрахунок ціни опціону на золото

Джерело: складено автором на основі власних розрахунків.

Ціна опціону, який торгується на біржі (рис 3.15):

UPDATED	VOLUME	HIGH	LOW	PRIOR SETTLE	CHANGE	LAST	STRIKE PRICE
01:20:28 CT 10 May 2021	4	33.80	33.80	29.50	+4.30	33.80	1815.0

Рис 3.15 – Ціна опціону в реальному часі на чиказькій товарній біржі

Джерело : [39].

У цьому випадку ціна майже однакова, проте біржова ціна вище за справедливу ціну прораховану моделлю, отже купуємо колл-опціон, так як біржа закладає в розрахунок більшу волатильність.

5. Розрахунок ціни опціону на платину за наступними вхідними параметрами:

- Strike-ціна - 1240.0\$
- Спотова ціна активу- 1,265.68\$
- 30 днів до закінчення строку опціону
- 7% безризиковості
- Дивіденди не виплачуються
- 9.7% волатильності

Результат (рис 3.16):

```
C= BlackScholesModel(1265.68,1240,(30/365),7,0,9.7)
print(C)
```

```
36.00991214874364
```

Рисунок 3.16 – Розрахунок ціни опціону на платину

Джерело: складено автором на основі коду.

Ціна опціону, який торгується на біржі (рис 3.17):

CALLS							
UPDATED	VOLUME	HIGH	LOW	PRIOR SETTLE	CHANGE	LAST	STRIKE PRICE
16:00:00 CT 09 May 2021	0	-	-	38.40	-	-	1240.0

Рис 3.17 – Ціна опціону в реальному часі на чиказькій товарній біржі

Джерело : [40].

Так само як і в минулому випадку ціна майже однакова, проте біржова ціна вище за справедливу ціну прораховану моделлю, отже купуємо колл-опціон, так як біржа закладає в розрахунок більшу волатильність.

Як вже було зауважено, на ціни опціонів більшою мірою впливають ціни активів на які створені опціони, однак важливо також знати інші фактори, які використовуються в їх ціноутворенні. Трьома основними змінними параметрами є : ціна базового цінного паперу, час і волатильність. Мається на увазі, що волатильність є ключовим фактором при вимірюванні того, дешеві ціни опціонів, чи дорогі. Це дозволяє трейдерам визначити, якою, на їх думку, буде майбутня волатильність. Рекомендується купувати, коли передбачувана волатильність є найнижчою, оскільки це, як правило, означає що ціни є заниженими. Це пов'язано з тим, що опціони, що мають високий рівень прихованої волатильності, призведуть до високо дорогих

премій за опціони. На протилежному боці, коли передбачувана волатильність низька, це означає, що очікування ринку та попит на опціон зменшуються, а отже, це спричиняє зниження цін.

Наведена вище модель дозволить будь-кому вирахувати справедливую ціну на опціон та прийняти рішення про подальші хеджувальні дії. Проте, якщо цього не достатньо, то далі буде наведена розробка по прогнозуванню волатильності потрібного активу.

3.2 Прогнозування волатильності на Python

Як зазначалось вище, якщо трейдеру для прийняття рішення недостатньо справедливої ціни опціону, то є можливим додаткове моделювання волатильності активу.

Для цього знову була обрана мова програмування Python, оскільки вона найкраще адаптована для фінансового моделювання через наявність різноманітних бібліотек, в яких вже є реалізовані рішення.

Отже, програмування прогнозу волатильності ринку або певного активу застосовуючи GARCH модель на Python:

1) Збір даних.

Для отримання даних про акції та активи я використала бібліотеку yFinance від Yahoo Finance. yFinance - це бібліотека Python з відкритим кодом, яка дозволяє нам отримувати онлайн будь-які дані про акції без завантаження в csv. або xls. файл за заздалегідь визначений період часу.

Оскільки Google Collab не містить цієї бібліотеки, я написала додатково синтаксис, який дозволив завантажити цю бібліотеку в Google Collab (рис 3.18):

```
!apt-get -qq install -y graphviz && pip install yfinance
import yfinance as yf

Requirement already satisfied: yfinance in /usr/local/lib/python3.7/dist-packages (0.1.59)
Requirement already satisfied: pandas>=0.24 in /usr/local/lib/python3.7/dist-packages (from yfinance) (1.1.5)
Requirement already satisfied: multitasking>=0.0.7 in /usr/local/lib/python3.7/dist-packages (from yfinance) (0.0.9)
Requirement already satisfied: lxml>=4.5.1 in /usr/local/lib/python3.7/dist-packages (from yfinance) (4.6.3)
Requirement already satisfied: numpy>=1.15 in /usr/local/lib/python3.7/dist-packages (from yfinance) (1.19.5)
Requirement already satisfied: requests>=2.20 in /usr/local/lib/python3.7/dist-packages (from yfinance) (2.23.0)
Requirement already satisfied: python-dateutil>=2.7.3 in /usr/local/lib/python3.7/dist-packages (from pandas>=0.24->yfinance) (2.8.1)
Requirement already satisfied: pytz>=2017.2 in /usr/local/lib/python3.7/dist-packages (from pandas>=0.24->yfinance) (2018.9)
Requirement already satisfied: certifi>=2017.4.17 in /usr/local/lib/python3.7/dist-packages (from requests>=2.20->yfinance) (2020.12.5)
Requirement already satisfied: urllib3!=1.25.0,!<1.25.1,<1.26,>=1.21.1 in /usr/local/lib/python3.7/dist-packages (from requests>=2.20->yfinance) (1.24.3)
Requirement already satisfied: idna<3,>=2.5 in /usr/local/lib/python3.7/dist-packages (from requests>=2.20->yfinance) (2.10)
Requirement already satisfied: chardet<4,>=3.0.2 in /usr/local/lib/python3.7/dist-packages (from requests>=2.20->yfinance) (3.0.4)
Requirement already satisfied: six>=1.5 in /usr/local/lib/python3.7/dist-packages (from python-dateutil>=2.7.3->pandas>=0.24->yfinance) (1.15.0)
```

Рис 3.18 – Підключення бібліотеки yfinance для завантаження даних

Джерело: складено автором на основі коду.

Далі також було завантажено відповідні бібліотеки для майбутнього моделювання (рис 3.19):

```
!apt-get -qq install -y graphviz && pip install yfinance
!pip install arch
import yfinance as yf
from arch import arch_model
from arch.__future__ import reindexing
import math
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
%matplotlib inline
```

Рис 3.19 – Підключення додаткових бібліотек

Джерело: складено автором на основі коду.

Далі перевіримо чи підключились бібліотеки та спробуємо вивантажити дані про актив золото (рис 3.20):

```
gold_df = yf.download('GC=F',
                      start='2016-01-04',
                      end='2021-05-10',
                      progress=False)
gold_df.head()
```

	Open	High	Low	Close	Adj Close	Volume
Date						
2016-01-04	1063.400024	1082.500000	1063.199951	1075.099976	1075.099976	143
2016-01-05	1075.599976	1081.500000	1075.300049	1078.400024	1078.400024	82
2016-01-06	1081.599976	1093.699951	1081.599976	1091.900024	1091.900024	52
2016-01-07	1091.599976	1109.400024	1091.599976	1107.699951	1107.699951	122
2016-01-08	1111.099976	1111.099976	1093.000000	1097.800049	1097.800049	98

Рис 3.20 – Вигрузка даних про актив золото

Джерело: складено автором на основі коду.

Як бачимо на результаті вище, код успішно репрезентує дані щодо золота з 2016-01-04 по 2021-05-10.

2) Візуалізація щоденної віддачі.

Наступним кроком є візуалізація щоденних прибутків(Return) на визначеному проміжку часу (рис 3.21):

```
stock_data['Return'] = 100 * (stock_data['Close'].pct_change())
stock_data.dropna(inplace=True)
```

```
fig = plt.figure()
fig.set_figwidth(12)
plt.plot(stock_data['Return'], label = 'Daily Returns')
plt.legend(loc='upper right')
plt.title('Daily Returns 2016-2021')
plt.show()
```

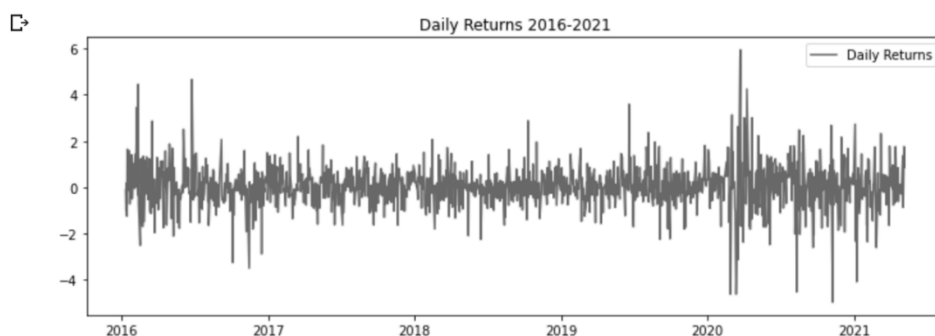


Рис 3.21 – Код візуалізації щоденних прибутків разом з графіком

Джерело: складено автором на основі коду.

На скрипті вище зазначена формула розрахунку щоденної прибутковості акції базуючись на відсотковій зміні закритих цін з 2016 - 2021 року.

Метод `pct_change` автоматично обчислює процентні зміни ціни закриття поточного дня порівняно з попереднім днем. На графіку видно, що процентні зміни можуть бути як позитивними, так і негативними залежно від напрямку зміни ціни. Також в скрипті вже почищені дані від нульових значень задля коректності виконання коду.

З наведеної вище лінійної діаграми ми можемо спостерігати щоденну прибутковість акцій, яка має волатильний характер, і найбільш інтенсивно це спостерігалось приблизно в березні-квітні 2020 року, в час початку глобальної COVID19-кризи. Загалом коливання щоденної прибутковості є більш інтенсивними в 2020 році і після шоку країн від COVID19 почалася спадна тенденція на початку 2021 року.

3) Розрахунок місячної та річної волатильності.

Повертаючись до потреб трейдера , якщо в минулій моделі ми розраховували справедливую ціну опціону, порівнювали її з ціною на біржі та робили висновок в яку позицію входити в залежності від волатильності на актив, яку заклав ринок в своїй ціні на похідний фінансовий інструмент активу, то зараз для підтвердження рішення трейдера ми можемо вирахувати волатильність на той чи інший актив наступним кодом (рис 3.22):

```

daily_vol = stock_data['Return'].std()

monthly_vol = math.sqrt(21) * daily_vol
print ('Monthly volatility: ', '{:.2f}%'.format(monthly_vol))

annual_vol = math.sqrt(252) * daily_vol
print ('Annual volatility: ', '{:.2f}%'.format(annual_vol ))

Monthly volatility:  4.29%
Annual volatility:  14.87%

```

Рис 3.22 – Код розрахунку помісячної та річної волатильності активу

Джерело: складено автором на основі коду.

У кодi вище було використано метод `std` для обчислення стандартного відхилення ціни добової прибутковості(віддачі), і отримані значення присвоюються змінній `daily_vol`. Припустимо, що існує 21 торговий день на місяць, і тому місячна волатильність обчислюється множенням квадратного кореня з 21 на денну волатильність. І також припускається, що є 252 торгових дні на місяць, і тому річна волатильність обчислюється множенням квадратного кореня з 252 на денну волатильність. Даний скрипт показує річну та місячну волатильність золота. Повертаючись до попередньої моделі ми в розрахунок ціни опціону закладали приблизну волатильність за Bloomberg, яка дорівнювала 4.74%. Після порівняння справедливої ціни на опціон з біржовою була надана пропозиція купувати колл-опціон, оскільки біржа закладає в розрахунок більшу волатильність. І бачимо, що прорахована річна волатильність дійсно вище ніж місячна закладена Bloomberg.

4) Побудова прогнозування волатильності активу за допомогою моделі GARCH.

Аби передбачити волатильність цін на актив треба побудувати модель GARCH (узагальнена авторегресивна умовна гетероскедастична модель) на основі історичних цін на закриття та волатильності. Математична логіка

моделі GARCH може здатися складною, але є можливою за використання архівної бібліотеки Python для інкапсуляції математичної складності у лише кілька рядків скриптів (рис 3.23):

```
garchvol_model = arch_model(stock_data['Return'], p = 1, q = 1,
                             mean = 'constant', vol = 'GARCH', dist = 'normal')

gmvol_result = garchvol_model.fit(displ='off')
print(gmvol_result.params)

print('\n')

gmvol_forecast = gmvol_result.forecast(horizon = 5)
print(gmvol_forecast.variance[-1:])
```

mu	0.028871
omega	0.009818
alpha[1]	0.032894
beta[1]	0.954675
Name: params, dtype: float64	

	h.1	h.2	h.3	h.4	h.5
Date					
2021-05-07	0.792443	0.792411	0.792379	0.792347	0.792316

Рис 3.23 – Код побудови моделі прогнозування волатильності активу

Джерело: складено автором на основі коду.

Код завантажує дані щоденної прибутковості золота у функцію `arch_model`. Встановлюємо значення p і q на 1, а потім залишаємо значення `mean`, `vol` та `dist` за замовчуванням, які є "constant", "GARCH" та "normal".

Чим більша результуюча величина альфа, тим більший негайний вплив волатильності активу. З іншого боку, більша бета призводить до більшої тривалості впливу волатильності. Використовуємо метод перехідного прогнозу, щоб скласти прогноз на 5 періодів наперед і показуємо дисперсні вихідні дані. Наведений вище результат прогнозу включає прогноз на 1 крок вперед із використанням даних до 7 травня 2021 року включно. Тепер можемо протестувати нашу модель використовуючи історичні дані за n -проміжок часу. Встановлюємо період тесту на 365 днів. Далі створюємо навчальний набір багаторазово у циклі, використовуючи значення щоденної віддачі активу, розпочаті з першого дня до $-(test_size-i)$ дня. Це означає, що

в першому циклі дані з першої дати 4 січня 2016 року по 14 листопада 2019 року будуть відповідати моделі GARCH. У другому циклі дані отримуються з 5 січня 2016 року по 15 листопада 2019 року і т. Д. У кожному циклі модель GARCH тренується за поточним навчальним набором з параметрами p і q , встановленими на 1. Поточна модель використовується для прогнозування волатильності з одноразовим кроком, і потім прогнозована дисперсія волатильності є квадратичною. Остаточне значення стандартного відхилення додається до `rolling_predictions` (рис 3.24):

```
rolling_predictions = []
test_size = 365

for i in range(test_size):
    train = stock_data['Return'][:-test_size-i]
    model = arch_model(train, p=1, q=1)
    model_fit = model.fit(disp='off')
    pred = model_fit.forecast(horizon=1)
    rolling_predictions.append(np.sqrt(pred.variance.values[-1,:][0]))

rolling_predictions = pd.Series(rolling_predictions, index=stock_data['Return'].index[-365:])

plt.figure(figsize=(10,4))
plt.plot(rolling_predictions)
plt.title('Rolling Prediction')
plt.show()
```

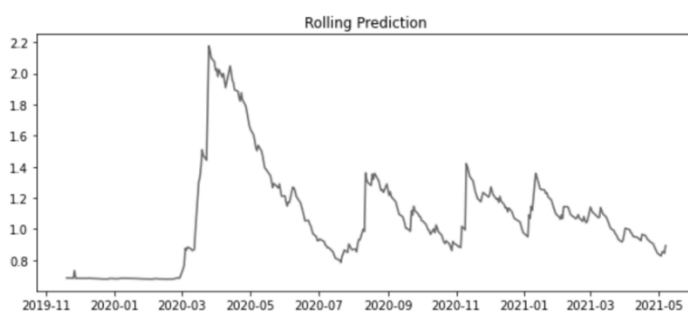


Рис 3.24 – Код побудови графіка прогнозування волатильності активу

Джерело: складено автором на основі коду.

Для того, щоб отримати кращу картину того, наскільки точною є модель GARCH у прогнозуванні волатильності, створимо ще один підскрипт для щоденної віддачі (справжні значення) і накладемо її на графік перехідної прогнозованої лінії (рис 3.25):

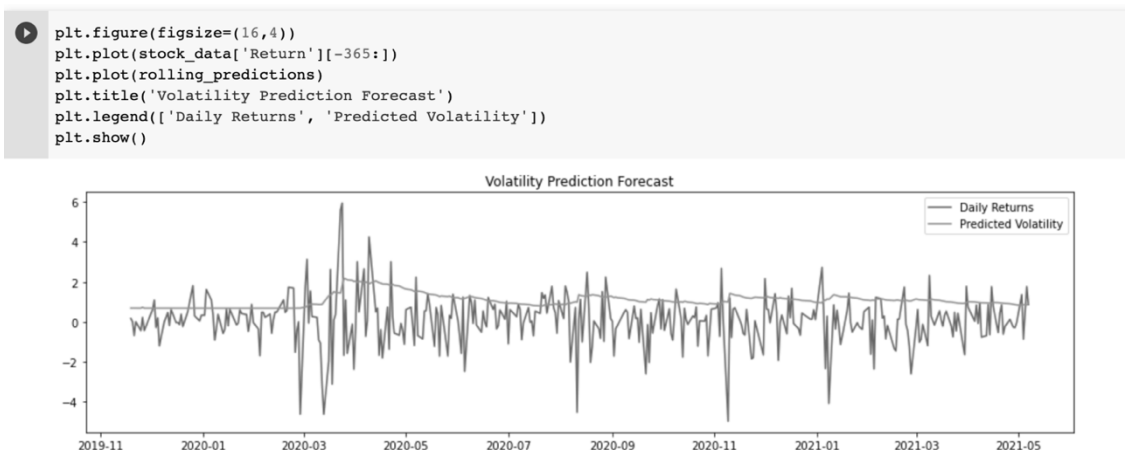


Рис 3.25 – Код побудови графіку щоденної віддачі та прогнозованої волатильності

Джерело: складено автором на основі коду.

З наведеного вище графіка можемо помітити, що прогнозована волатильність, як правило, відповідає щоденним прибутковостям/віддачі (справжні значення). Це означає, що модель GARCH працює добре. У тому районі, де прогнозована волатильність висока (наприклад, березень-квітень 2020 р.), висока також добова прибутковість. Можемо бачити, що прогнозована волатильність на початку 2021 року, як правило, менш коливається, і тому вона має відносно менший ризик протягом цього періоду.

3.3 Пропозиції хеджування відкритих позицій в українських реаліях

Значний сегмент українського товаро-виробництва займає агровиробництво. Цей сектор економіки знаходиться під значним впливом коливання світових цін на продукцію, який обумовлений сезонним коливанням, погодними умовами, якістю та кількістю врожаю. Також ми маємо значний вплив валютних коливань на цій сектор, тому що він має як експортний, так і імпортовий характер операцій (Додаток А).

Даний графік демонструє розмір коливання цін на кукурудзу на Чикагський товарній біржі СВОТ, починаючи з періоду збору врожаю (жовтень 2020 року) до початку травня 2021 року, практично до кінця сезону поставки кукурудзи. Різниця цін ($627 - 387 = 240$ центів/бушель, 94,48 дол США / МТ) протягом 9 місяців.

Велика волатильність цін – це нова проблема? Так, але це умови існування для агровиробника. Врожайність та ціноутворення на продукцію, розуміння світової кон'юнктури ринку – це фактори, які пов'язані та формують основу стратегії продаж агровиробника. Фермери мають доступ до певних інструментів, які дозволяють їм працювати на волатильних ринках, зменшити ризики і зберегти прибуток. Але кожний бізнес має свої певні характеристики, тому єдиного сценарію як зменшити ризики немає. Важливо планувати продажі, оцінювати ризики та застосовувати певні інструменти. Велике значення має інформаційний ресурс, який використовується для визначення рівня безпеки існування бізнес моделі. Необхідно постійно оновлювати інформацію, звертати увагу тільки на важливі, підтверджені факти, проводити фундаментальний та технічний аналіз ринку, а також оновлювати торгівельний баланс в регіоні та на світовому рівні.

Які існують доступні інструменти для зменшення цінових коливань?

- 1) Фізичні контракти купівлі – продажу (back to back) – прибуток фіксується на момент укладання контракту і не може бути переглянутим. Рівень цінового ризику достатньо високий, тому що на момент поставки товару ціна може бути або нижче контрактної, при цьому виробник (продавець) значно виграє, або вище контрактної. В цьому випадку – зобов'язання поставки виробнику необхідно виконувати, але зафіксувати ціну на більш вищому рівні вже неможливо. В кінцевому випадку, виробник «недозаробляє» грошові кошти.

Якщо такий контракт має ознаки форвардної поставки, тоді як показала практика минулого року, багато виробників взагалі не виконали фізичну поставку та порушили умови контрактів, що недопустимо в ринкових умовах, та перепродали товар по більш вигідних цінах.

- 2) Ф'ючерсні контракти – мають своє значне застосування на європейських та американських ринках, але практично не застосовуються українськими виробниками середньої ланки по причині високої собівартості та необхідності значних фінансових потоків без впевненості в майбутньому успіху. А саме ця група виробників є найбільш незахищеною від цінових коливань. Ф'ючерсні контракти торгуються на централізованих біржах, стандартними лотами та товаром детермінованої якості. Якщо ми говоримо про основні світові біржі на яких торгуються вищезгадані контракти, то це – Чикагська товарна біржа (CBOT), Європейська біржа (Matif/EURONEXT). Щоб використовувати ф'ючерсні контракти як інструмент лімітування ризиків, український товаровиробник повинен мати аккаунт на цих біржах, що практично неможливо в реаліях сьогодення. Існує також Українська товарна біржа, але кількість лотів, які торгуються на цій біржі не дозволяє проводити операції по хеджуванню. Хеджування – це стратегія управління ризиками, яка дозволяє зменшити вірогідність збитків, пов'язаних з коливанням цін. При цьому, необхідно сформувати дві рівні але протилежні позиції на двох різних ринках (наприклад продати 5000 тон кукурудзи на фізичному ринку, та купити 5000 тон кукурудзи на Чикагській біржі). Ф'ючерсні контракти можна перекладати на наступний період, тому цей інструмент більш гнучкий.
- 3) Базисні контракти - якщо бізнес включає продаж або покупку зернових та олійних культур, та ви бачите, що місцева ціна (ціна на фізичний товар)

відрізняється від ціни на біржі – то така цінова різниця (ФІЗИКА – ФЬЮЧЕРС = БАЗИС) формує поняття базис.

Таблиця 3.1 Матриця базису в залежності від сценарію

Фізичні ціни зростають до ціни біржі	Базис зростає	+5	Базис зменшується	Фізичні ціни зменшуються до ціни біржі
	Стає більш позитивним	0	Стає негативним	
		-5		

Джерело: складено автором.

Аналіз базису формує рішення про продаж товару на фізичному ринку. Наприклад, якщо базис вузький та ціна фізичного товару практично дорівнює ціні на біржі, то краще фіксувати ціну. Якщо базис великий – то краще купити фьючерсні контракти. На момент поставки береться до уваги місцезнаходження товару, його якість та строки постачання. При закритті контракту фізична та ф'ючерсна ціна співпадають в місці поставки. Це гарантує пряма кореляція між фізичним та ф'ючерсним ринками, але такі стратегічно-економічні рішення не працюють в Україні.

- 4) Опціони. Ринок опціонів – це практично ринок страхування, який дозволяє виробнику, при фіксації ціни отримати гарантовану ціну, яка захистить його від подальшого падіння цін, а використовуючи опціони додати «премію» до мінімально гарантованої ціни. Але – настане «страховий випадок» чи ні –

ніхто гарантувати не може. Яка ціль виробника? Виробник хоче отримати страховку ціни за допомогою покупця. Ціль: фіксувати мінімальну ціну, але не виключаючи нові цінові можливості. Пропоную розглянути практичну ситуацію. Для сільськогосподарського виробника існує певна матриця сценаріїв ціноутворення на товар та можливих управлінських рішень.

Таблиця 3.2 Матриця можливих рішень агровиробника

Момент часу	Майбутній врожай	Зібраний врожай
Бачення ринку:	Висока ймовірність падіння цін.	Слабка надія на ріст ціни.
Можливі дії:	Покластись на долю або укласти форвардну угоду.	Продати товар зараз та отримати кошти.
Бачення ринку:		Впевненість в значному рості ціни.
Можливі дії:		Зберігати товар та очікувати високу ціну.
Переваги використання опціону	Фіксація гарантованої ціни, яка захищає від подальшого падіння цін.	Є ризик фізичної та якісної втрати товару, тому фіксація ціни по ринку дає можливість позбавитися ризику втрати товару, затрат на зберігання товару та його фінансового обслуговування.

Продовження Таблиці 3.2

Можливості використання опціону	Купити пут-опціон – є можливість захистити ціну від подальшого падіння на розмір витраченої премії на покупку, при цьому Покупець пута має необмеженні можливості приймати участь в рості ціни та фіксувати прибуток на біржі.	Купити колл-опціон – є можливість зафіксувати збитки на розмір витраченої премії на покупку, при цьому Покупець колл має необмеженні можливості приймати участь в рості світових цін та фіксувати прибуток на біржі.
--	--	--

Джерело: складено автором.

Сценарії існує два:

Таблиця 3.3 Сценарії для агровиробника

1. Я НЕ ПРОДАВ ВРОЖАЙ	2. Я ПРОДАВ ВРОЖАЙ
Куплю пут-опціон та отримаю дохід, якщо ціни далі будуть падати.	Куплю колл-опціон та отримаю дохід, якщо ціни будуть далі зростати.
Врожай /товар не продан. Ризик – зменшення прибутку.	Врожай/товар Продан. Ризик – ціни зростають, що призводить до недоотриманого прибутку.

Джерело: складено автором.

ЯК ОБРАТИ ОПЦІОН?

Звертаємо увагу на премію.

Премія (вартість) опціона зникає, якщо опціон не перепродано або не надана заявка на закриття.

Розмір премії залежить від мінімально акцептованої ціни продажу.

Мінімальна ціна повинна бути близької до ціни рівня продажу.

Таблиця 3.4 Наповнення премії опціону

ПРЕМІЯ має	Внутрішню вартість	Сума грошей, яка отримана при закритті опціона за визначеною страйк ціною.
		Якщо у опціона є внутрішня вартість, то він може бути реалізован з прибутком.
	Часову вартість	Якщо у опціона немає внутрішньої вартості, то премія має тільки часову вартість.
		Ця вартість показує готовність покупців та їх очікування реалізувати опціон до або на момент закриття.

Джерело: складено автором.

При зростанні волатильності - премія також зростає. Внутрішня вартість пут-опціона зростає на ринку падіння ціни. Внутрішня вартість колл-опціона зростає на ринку зростання ціни. Часова вартість опціона зменшується з часом.

Як надати можливості перегляду ціну та захистити себе від ризику?

Перекласти ризик на когось іншого! Яким чином це можна зробити?

- Придбати право перегляду ціни в форвардному контракті з трейдером.

- Придбати право перегляду ціни в опціонному контракті.

Вибрати інструмент хеджування треба за наступними критеріями:

- **Доступність.** Вільний доступ до ринку на якому проводяться операції купівлі-продажу хеджуючих інструментів.

- **Кореляція.** Ступінь взаємозв'язку та подібність поведінки зміни ціни на ринку фізичного товару та інструментів хеджування.

- **Базисний ризик.** Ризик відмінності у ціновій динаміці товару на фізичному ринку та цінах інструменту хеджування.

- **Ліквідність.** Можливість швидкого здійснення операцій купівлі-продажу хеджуючих інструментів

- **Кредитний ризик контрагента.** Оцінка ризику невиконання умов контракту з купівлі-продажу хеджуючого інструменту з боку контрагента.

- **Справедлива ціна інструменту.** Справедливу ціну на інструмент було змодельовано у попередньому розділі. За рівнем справедливої ціни на інструмент можливо зробити вибір інструмента хеджування.

Таблиця 3.5. Порівняльні характеристики форвардного та опціонного варіантів

Властивості інструментів хеджування	Опціон	Форвард
Виконання	Більш трудомісткий	Порівняно легкий
Витрати на програму	Змінні	Фіксовані

Продовження Таблиці 3.5

Базисний ризик	Присутній	Відсутній
Можливості для гнучкого ціноутворення за рахунок мінливості Базису	Існують	Відсутній
Можливість ефективного ребалансування портфелю контрактів	Існують	Обмежені
Відсутність зобов'язань по поставці	Можлива	Неможлива
Кредитний ризик контрагента	Cleared/OTC	OTC

Джерело: складено автором.

Таблиця 3.6. Ліквідність ф'ючерсів CBOT та Euronext

Показник	CBOT	Euronext
Валюта контракту	USD	EUR
Розмір контракту, тн	127	50
Середній денний обсяг торгів, контрактів	134 254	723
Середній денний обсяг торгів, тн	17 050 301	36 127
Середній розмір відкритих позицій, контрактів	466 952	7 776
Середній розмір відкритих позицій, тн	59 302 901	388 801

Джерело: складено автором на основі [42,43].

Тобто бачимо, що CBOT більш ліквідна біржа з точки зору ф'ючерсів.

Після оцінки всіх ризиків та можливостей, виробник вибирає як він практично може скористатися інструментом хеджування.

Перше : при наявності необхідних базових знань по роботі з даними інструментами, виробник може спробувати використати опціони самостійно. Для цього йому необхідно мати доступ до світових бірж та брокерських компаній, які обслуговують ці операції. Це можливо, але для великих агрохолдінгів, які мають фінансові та інфраструктурні можливості. Наскільки відомо, деякі холдинги страхують таким чином власне виробництво, яке інколи сягає понад 1,5 – 2 млн тон на рік (Агропросперіс, Кернел, МХП ті інші).

Друге : не маючи прямого доступу до обслуговуючих компаній та фінансів, виробники середньої ланки (земельний банк 40 - 80 000 га, 200 – 400 000 т врожаю) кооперуються або з іноземними трейдерами або с постачальниками інпутів для виробництва (компанії – постачальники засобів захисту рослин, мін.добрив, насіння). Це відбувається наступним чином:

- Перемовини та підписання контракту на постачання сг.продукції;
- Перемовини та вибір методу хеджування, підтвердження фінансового ліміту хеджування.
- Поставка товару та його сплата, закриття опціонів.
- Моніторинг історії операції (попередня вартість товару, кінцева вартість товару , вартість опціонів, фінальне закриття опціонів, додана вартість до ціни контракту.

Основні види форвардних контрактів, які можуть бути використані з опціонами:

СЦЕНАРІЙ 1 : Я не продав врожай, використовую пут-опціон.

СЦЕНАРІЙ 2 : Я продав врожай, використовую опціон кол.

Третє : не маючи прямого доступу до обслуговуючих компаній та фінансів, виробники середньої та малої ланки (земельний банк 5 - 80 000 га., 20 000 – 400 000 т.врожаю) кооперуються з аналітичним та консалтинговими компаніями, які мають власний фінансовий та інфраструктурний ресурс.

Такі компанії проводять повний спектр аналітичної роботи з оцінки ризиків товарної позиції виробника. Також знаходять покупців на товар виробника, які повністю зменшують ризик невиконання умов оплати або постачання по форвардному контракту, ведуть перемовини, роблять контракти, а інколи навіть забезпечують логістику товару до місця призначення. Форвардні контракти можуть бути як експортні, так і на поставку товару на внутрішній ринок (елеватор, наприклад).

В тому числі, аналітичні компанії хеджують товарну позицію, згідно обраного інструменту (ф'ючерс, контракт на поставку товару з переглядом ціни, опціонні контракти) та контролюють виконання контракту зі сторони постачальника та зі сторони покупця. І в головна перевага аналітичних компаній в тому, що вони закривають опціони, використовуючи власні кошти.

При всіх плюсових якостях такої співпраці єдиний недолік – використання коштів консультаційної компанії, які мають включатися в вартість опціонів і таким чином, виробник з одного боку отримає гарантовану мінімальну ціну, з іншого боку – можливий перегляд ціни в бік збільшення буде зменшений на вартість послуг аналітичної компанії.

Висновки до розділу 3

З боку агровиробників опціони є ідеальним страховим інструментом для отримання мінімально гарантованої ціни та зменшення впливу волатильності на діяльність підприємства. Наразі в Україні практика

використання похідного фінансового інструмента лише зароджується та має значні перспективи на розвиток.

ВИСНОВКИ

В ході виконання даної бакалаврської роботи було здійснено дослідження кількісних методів розрахунку ціни опціонів в математичних моделях фінансових ринків. В результаті дійшли наступних висновків.

Опціон - це похідний інструмент фінансового типу, при покупці якого у інвестора з'являється право (але не обов'язок) здійснити покупку або продаж в майбутньому активу, що лежить в його основі, за вартістю, зафіксованою в момент покупки. Особа, що продає даний контракт бере на себе зобов'язання передати покупцеві опціону базовий актив за обумовленою ціною (навіть якщо йому буде це не вигідно). Опціони використовуються задля хеджування цінових ризиків. Наразі існує багато різних типів математичних моделей ціноутворення опціонів, кожна з яких є унікальною та наділена певними особливостями використання .

В роботі було розроблено автоматизоване рішення калькуляції справедливої ціни опціону на основі загальної моделі Black Scholes та прогнозування волатильності на основі моделі GARCH для трейдерів та агровиробників.

Так як фінансова грамотність агровиробників в Україні не є достатньою для використання опціонів, задля покращення ліквідності та прибутковості виробників головною пропозицією є оформлення графічного інтерфейсу для вже розробленої в роботі калькуляції справедливої ціни опціонів та її практичного використання серед українського бізнесу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ильинский А. Биномиальное дерево и многопериодные модели биржевых цен // Валютный спекулянт. 2000. № 9 (11). С. 46-49.
2. Myers D., Wallin L., Wikstrom P. An introduction to Markov chains and their applications within finance // MVE220 Financial Risk: Reading Project. URL:
<http://www.math.chalmers.se/Stat/Grundutb/CTH/mve220/1617/readingprojects16-17/IntroMarkovChainsandApplications.pdf>.
3. Konstantopoulos T. Introductory lecture notes on Markov chains and random walks // Autumn 2009. URL: <https://pdfslide.us/documents/introductory-lecture-notes-on-markov-chains-and-random-walks.html>.
4. Вентцель Е. Г, Овчаров Л. А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения : учеб, пособие для вузов. 2-е изд., стер. М. : Высшая школа, 2000.
5. Siu T.-K., Ching W.-K., Fung S. E., Ng M. K. On a multivariate Markov chain model for credit risk measurement // Quantitative Finance. Feb. 2007. Vol. 5 (6). P. 543—556.
6. Myers D., Wallin L., Wikstrom P. Op. cit.
7. Иванченко И. С. Моделирование финансового рынка : курс лекций. Ростов н/Д : РГЭУ, 2009.
8. Халл Д. Опционы, фьючерсы и другие производные финансовые инструменты. – М.: Вильямс, 2008.
9. Уотшем Т. Дж., Паррамоу К. Количественные методы в финансах. – М.: ЮНИТИ, 1999.
10. Булгаков Ю. В. Біноміальні моделі опціонів, 2013
11. Bachelier L. Theorie de la speculation // Annales de l'Ecole Normale Supérieure. 1900. Vol. 17. P. 21-86.

12. Samuelson P. A. Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly // *Industrial Management Review*. 1965. Vol. 6. P. 41-50.
13. Black F. y Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities // *Journal of Political Economy*. 1973. Vol. 81. № 3. P. 637-654.
14. Брейли Р. y Майерс С. Принципы корпоративных финансов. М.: Олимп-Бизнес, 2008.
15. Cox J. Option pricing: A simplified approach / J. Cox, S. Ross, M. Rubinstein. // *Journal of Financial Economics*. – 1979. – No7. – С. 229-263.
16. Damodaran A. *Applied Corporate Finance* / Aswath Damodaran. – New York: Wiley, 2014. – 654 с.
17. Hull J. C. *OPTIONS, FUTURES, AND OTHER DERIVATIVES* / J. C. Hull. – Toronto: Prentice Hall, 2012. – 841 с.
18. Black F. The Pricing of Options and Corporate Liabilities / F. Black, M. Scholes. – 1973. – No3. – С. 637-654.
19. Reuters: An Introduction to Derivatives – Toronto: John Wiley & Sons, 1999. – 208 с.
20. Garman M. Foreign Currency Option Values / M. Garman, S. Kohlhagen. // *Journal of International Money and Finance*. – 1983. – No2. – С. 231-237.
21. Bollerslev T. Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity / T. Bollerslev. // *Journal of Econometrics*. – 1986. – No31. – С. 307-327.
22. Duan J. THE GARCH OPTION PRICING MODEL / Jin-Chuan Duan. // *Mathematical Finance*. – 1995. – No5. – С. 13-32.
23. Hafner W. Vinzenz Bronzin's Option Pricing Models: Exposition and Appraisal / W. Hafner, H. Zimmermann., 2009. – 548 с.
24. Bachelier L. Theorie de la Speculation / Louis Bachelier. // *Annales scientifiques de l'É.N.S.* – 1900. – No3. – С. 21-86.

- 25.Cuthbertson K. Derivatives: Theory and Practice / K. Cuthbertson, D. Nitzsche, N. O'Sullivan. – Chichester: Wiley, 2019. – 912 c.
- 26.Sprenkle C. M. Warrant prices as indicators of expectations and preferences / Case M. Sprenkle. // Yale Economics Essays. – 1961. – No1. – C. 178-231.
- 27.Boness J. Elements of a theory of stock-option value. / James Boness. // Journal of Political Economy. – 1964. – No72. – C. 163-175.
- 28.Samuelson P. A. Rational theory of warrant pricing. / Paul A. Samuelson. // Industrial Management Review. – 1965. – No6. – C. 13-32.
- 29.Gultekin B. Option Pricing Model Estimates: Some Empirical Results / B. Gultekin, R. Rogalski. // Financial Management. – 1982. – C. 58-96.
- 30.Whaley R. Valuation of American Call Options on Dividend-Paying Stocks / R. Whaley. // Journal of Financial Economics. –1982. –No10. – C. 29-58.
- 31.Black F. Fact and Fantasy in the Use of Options / F. Black. // Financial Analysis Journal. – 1975. – No31. – C. 61-72.
- 32.Cox J. Notes on Option Pricing. I: Constant Elasticity of Variance Diffusions / J. Cox. // Stanford University. – 1975.
- 33.Merton R. Option Pricing When Underlying Stock Returns are Discontinuous / R. Merton. // Journal of Financial Economics. – 1976. – No3. – C. 125-144.
- 34.Heston S. L. A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options / Steven L. Heston. // Review of Financial Studies. – 1993. – No6. – C. 327-343.
- 35.Kim Y. Pricing Options under Stochastic Interest Rates: A New Approach / Y. Kim, N. Kunitomo. // Asia-Pacific Financial Markets. – 1999. – No6. – C. 49-70.
- 36.Chicago Mercantile Exchange Group Inc, 2021
URL:https://www.cmegroup.com/trading/agricultural/grain-and-oilseed/corn_quotes_globex.html (дата звернення: 16:00:00 09.05.2021)

37. Chicago Mercantile Exchange Group Inc, 2021

URL: https://www.cmegroup.com/trading/agricultural/grain-and-oilseed/soybean-oil_quotes_options.html#optionProductId=313&strikeRange=ATM (дата звернення: 16:00:00 09.05.2021)

38. Chicago Mercantile Exchange Group Inc, 2021 .URL:

https://www.cmegroup.com/trading/agricultural/grain-and-oilseed/wheat_quotes_globex_options.html#optionProductId=324&strikeRange=ATM (дата звернення: 16:00:00 09.05.2021)

39. Chicago Mercantile Exchange Group Inc, 2021

URL: https://www.cmegroup.com/trading/metals/precious/gold_quotes_globex_options.html#optionProductId=192&strikeRange=ATM (дата звернення: 01:20:28 10.05.2021)

40. Chicago Mercantile Exchange Group Inc, 2021 URL:

https://www.cmegroup.com/trading/metals/precious/platinum_quotes_globex_options.html#optionProductId=2910&strikeRange=ATM (дата звернення: 16:00:00 09.05.2021)

41. Chicago Mercantile Exchange Group Inc, 2021 URL:

https://www.cmegroup.com/trading/agricultural/grain-and-oilseed/corn_quotes_globex.html

42. European New Exchange Technology, 2021 URL:

<https://live.euronext.com/en/product/commodities-futures/EMA-DPAR>
(дата звернення: 22:30:00 10.05.2021)

43. Chicago Mercantile Exchange Group Inc, 2021 URL:

<https://www.cmegroup.com/market-data/volume-open-interest.html> (дата звернення: 21:30:00 10.05.2021)

ДОДАТКИ

Додаток А

Волатильність ціни ф'ючерсів на кукурудзу

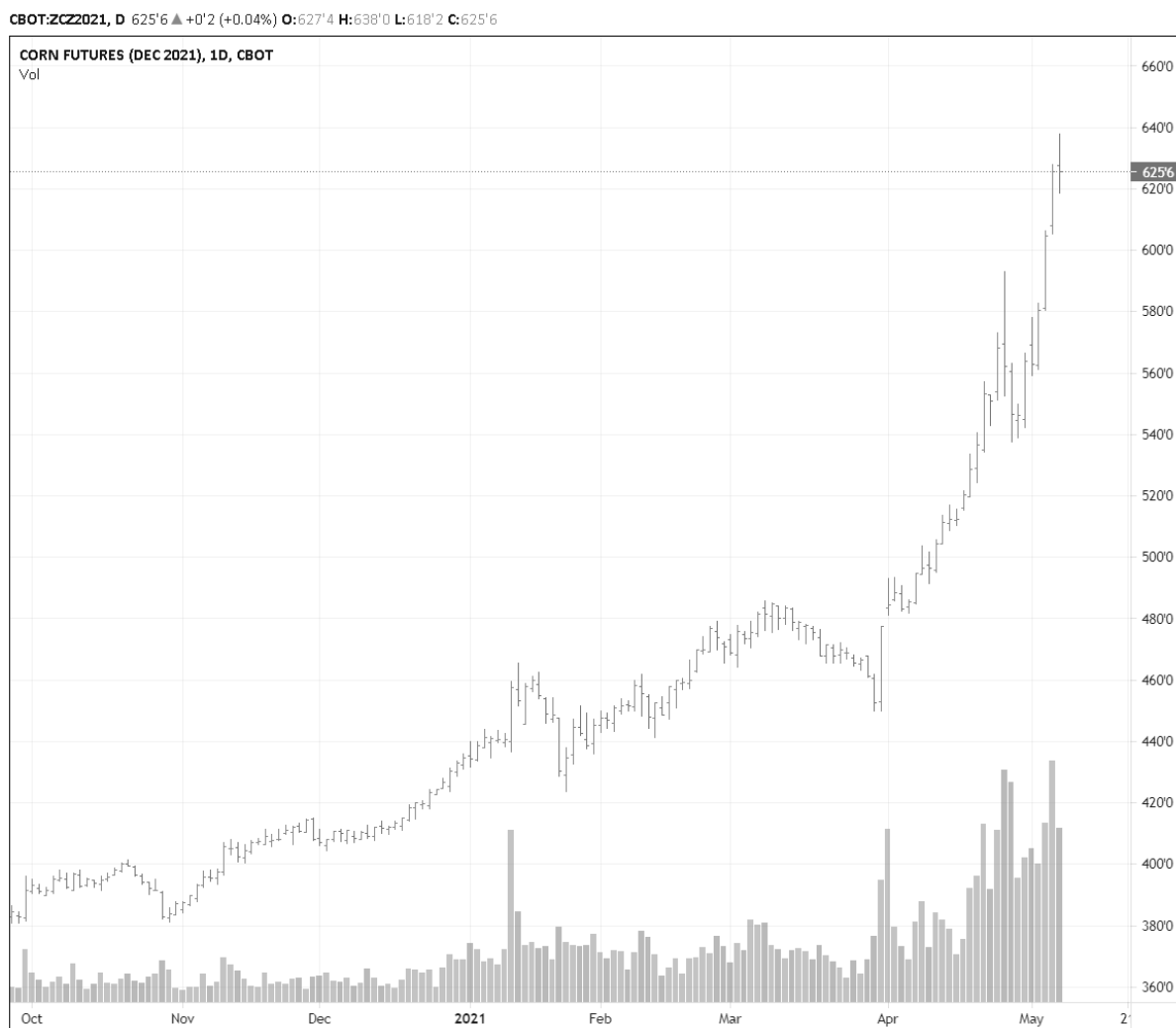


Рис А.1 – Графік ціни ф'ючерсів на кукурудзу

Джерело : [41].