

ВЗАЄМОЗВ'ЯЗКИ МІЖ ПРОДОВОЛЬЧИМИ, ЕНЕРГЕТИЧНИМИ ТА ВОДНИМИ РЕСУРСАМИ: МЕТОДОЛОГІЯ МОДЕЛЮВАННЯ ТА УПРАВЛІННЯ СТАБІЛЬНИМ РОЗВИТКОМ

К.Л. Атоєв¹, О.М. Голодніков¹, В.М. Горбачук¹,
Т.Ю. Єрмольєва², Ю.М. Єрмольєв², В.С. Кирилюк¹,
П.С. Кнопов¹, Т.В. Пепеляєва¹

¹Інститут кібернетики ім.В.М.Глушкова НАН України, ²Міжнародний
інститут прикладного системного аналізу (ІІАА, Австрія)

ВСТУП

Синергізм кліматичних змін та Четвертої промислової революції (ЧПР) стає вагомим викликом для глобального суспільства. Досягнення у розвитку новітніх технологій (біо- та нано-технології, робототехніка, Інтернет речей, автономні транспортні засоби, 3D-друк, нове природокористування, нові високі гуманітарні технології та інші) та швидке впровадження цифрової інфраструктури створюють нові можливості для стабільного розвитку суспільства [1]. У той же час, зростання соціальної нерівності, та вразливості критичної інфраструктури, розповсюдження небезпечних технологій, постійно зростаюче навантаження на економіку внаслідок старіння населення, забруднення довкілля створюють своєрідний синергетичний ефект, привносять додаткові системні ризики.

Підвищення кількості екстремальних погодних явищ (повені, шторми, та інші), зниження ефективності заходів щодо пом'якшення наслідків зміни клімату та адаптації до них, значні втрати природного різноманіття та екологічний колапс (земля, океан), підвищена потужність природних катастроф (землетруси, цунамі, виверження вулканів, геомагнітні бурі), зростання техногенних надзвичайних ситуацій (розлив нафти, радіоактивне забруднення та інші) – все ці події є головними наслідками кліматичних змін.

Вони провокують такі загрози для стабільного розвитку: 1) продовольчу кризу (кліматичні зміни сповільнюють зростання глобального врожаю, оскільки підвищення середніх температур скорочує сезон росту рослин та знижує врожай); 2) водну кризу

(водний дефіцит може дестабілізувати простір безпеки, тому ринок води у майбутньому може бути схожим з сучасним ринком енергоносіїв з його гострою конкуренцією та боротьбою у «гарячих» точках глобального світу); 3) енергетичну кризу[2].

Енергетична криза пов'язана не тільки з дефіцитом палива, але також зі змінами балансу попиту та пропозиції енергоресурсів внаслідок досягнень в розвитку технологій добування сланцевої нафти і сланцевого газу. Нестабільність цін на енергетичному ринку є одним з проявлень такого дисбалансу. Крім того з розвитком ЧПР, економіка у майбутньому буде ставати менш енергетично залежною, завдяки новітнім технологіям та мірам щодо енергозбереження. Ось чому у центрі уваги опиняються дослідження взаємозв'язку продовольчих, енергетичних та водних ресурсів (ПЕВР).

Створення складної мережі глобальної економіки значно підсилює поля техногенних, природних, економічних і соціальних ризиків. Це обумовлено такими особливостями сучасного суспільства, як підвищена щільність зв'язків між вузлами мережі та різке зростання швидкостей, з якими матеріальні цінності й інформація циркулюють по її структурі. Вузли цієї мережі перетворюються на своєрідні акупунктурні точки вразливості суспільства, в яких слабкі впливи можуть викликати сильні розбіжності траєкторій розвитку систем, непередбачувані за своїми масштабами наслідки, зростання невизначеності майбутнього (Рис.1). Сильні зв'язки між вузлами глобальної сіті призводять до того, що вразливість кожного вузла матиме вирішальне значення для вразливості інших.

Кумулятивний ефект різних джерел ризиків стає важливим генератором невизначеності і нестабільності в сучасному суспільстві. У разі кумулятивних стресорів, відбувається нелінійне підвищення уразливості системи і зниження можливостей її адаптації. Нелінійності призводять до виникнення областей значень системних параметрів, які часто характеризуються непередбачуваною поведінкою, коли малі впливи викликають істотну трансформацію безпеки системи

Отже, кліматичні зміни та ЧПР створюють сукупність взаємопов'язаних криз – продовольчої, водної та енергетичної. Ці кризи посилюють одна іншу. Тому потрібна інтегрована політика для мінімізації їх наслідків. Усе це потребує створення нових методів для комплексного моделювання та управління ризиком, які дозволяють дослідження синергетичної взаємодії між ризиками різного походження. Посилення можливостей модельних досліджень у такої

сфері як вплив глобальних змін на взаємозв'язок ПЕВР в умовах підвищеної невизначеності є головною метою даної статті.

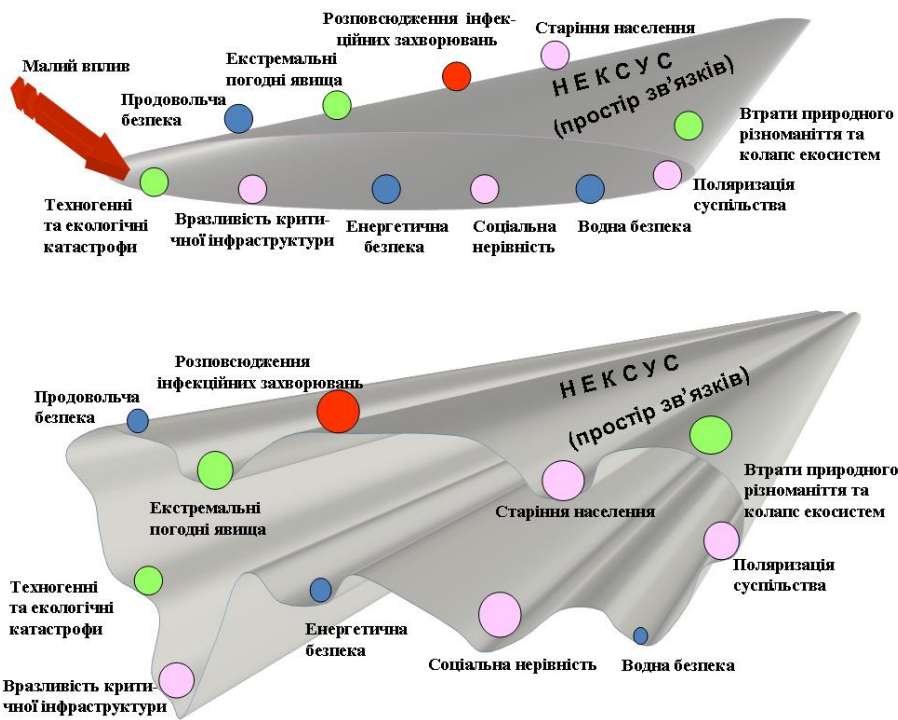


Рис.1. Трансформація простору взаємозв'язків глобальних загроз при малих впливах.

Будуть розглянуті наступні задачі: 1) розробка математичних моделей для прогнозування динаміки взаємозв'язку ПЕВР та можливих механізмів виникнення нестабільності; 2) розробка математичної моделі для аналізу ризику в рослинництві; 3) розробка методології прийняття рішень в умовах ризику та часткової невизначеності; 4) розробка двоетапної та дворівневої моделі еколого-економічних рішень.

1. МОДЕЛЮВАННЯ ВЗАЄМОЗВ'ЯЗКУ ПЕВР

Аналіз, що був проведений в [3,4] дозволив встановити основні вимоги до математичної моделі для дослідження взаємозв'язку ПЕВР. Ефективність моделювання багато в чому залежить від знаходження збалансованості між прагненням до деталізації та необхідністю спрощення моделі. Чим більш деталізованою стає модель, тим більш зростає її розмірність, ускладнюється завдання ідентифікації параметрів моделі і збору вхідних даних, зростає похибка розрахунків та звужується горизонт прогнозування. Крім того, складна система не є простою сумою її підсистем. В той же час без побудови достатньо

детальних моделей, неможливо зрозуміти, як порушення на одному підривні передаються на інші, як дія адаптаційних процесів на рівні однієї підсистеми впливає на діяльність механізмів самоорганізації і функціонування складної соціально-економічної системи в цілому. Неможливим стає і визначення реальних сценаріїв розвитку і оцінка ефективності конкретних управлінських рішень.

Задачі великої розмірності можна вирішувати, використовуючи той факт, що фазовий простір динамічних систем є у більшості випадків неоднорідний. В одній області параметрів стан системи може бути з прийнятною точністю охарактеризований за допомогою невеликої кількості змінних, які складають проекцію малої розмірності. Інші змінні можуть бути підпорядковані змінним проекції (параметрам порядку). Вони є несуттєвими з точки зору опису системи в межах даної області параметрів. У загальному випадку проекції малої розмірності можуть використовуватися в обмежених областях фазового простору, причому в різних областях проекції необов'язково однакові. В області параметрів, в яких побудова проекції малої розмірності з подальшим використанням методів нелінійної динаміки не є можливою, поведінка системи, відрізняється складністю, непередбачуваністю і різноманітністю, внаслідок чого доводиться використовувати імовірнісні методи [5]. Таким чином, при дослідженні складних систем використовується комбінація детерміністських [6,7] і стохастичних моделей [8,9]. У тих випадках, коли внаслідок унікальності явища, імовірнісні методи стають неефективними, поведінка системи досліджується за допомогою методів теорії гладких відображень [6,7].

Дослідження взаємозв'язку ПЕВР потребує використання інтегрованих моделей, які об'єднують різні контури регулювання еколого-економічної системи. Така модель була запропонована Форестером для вивчення глобальної динаміки [10]. Деякі модифікації цієї моделі використовувались для рішення різноманітних задач, пов'язаних з оптимальним управлінням глобальним розвитком [7,11,12]. Однак, більшість моделей економічного розвитку були розроблені ще до ери глобалізації і не дозволяють описати режими поведінки соціально-економічної системи в околиці точок біфуркації, коли системні закони, що керують поведінкою економічних систем, можуть різко змінюватися. Система у таких випадках стає сильно залежною від малих змін параметрів управління і початкових умов. Таким режимам, властивий стрибкоподібний характер, коли малі плавні зміни параметрів системи, приводять до різкої зміни траєкторії розвитку.

У ряді робіт було запропоновано використовувати для дослідження подібних систем теорію режимів із загостренням, яка до цього успішно використовувалася для вирішення завдань газової динаміки, фізики плазми, хімічної кінетики, лазерного термоядерного синтезу. Особливістю режимів із загостренням є те, що в них функція може необмежено зростати за обмежений час. Ці режими, можуть приводити до виникнення просторово локалізованих дисипативних структур. У таких структурах існує можливість появи детермінованого хаосу – дивних аттракторів [13,14].

Глобальна економіка може бути розглянута як відкрита, нелінійна, дисипативна, потенціальна система, така що самоорганізується, самовідтворюється, має сітьові елементи та близька до стану нестійкої рівноваги [15]. Дійсно, в таких областях, як фондові і фінансові ринки, грошове звернення і кредит, економічні системи можуть залишатися нерівноважними досить довгий час. Було відзначено, що коливальна динаміка ряду ключових показників світової економіки (індекс Доу-Джонса, ціна на золото, ціна на нафту і так далі) в певні періоди нагадує хаотичну динаміку коливань, характерних для дивних аттракторів [16].

Як свідчать дані The World Bank, показники приросту ПЕВР в Україні на протязі 1993-2013 рр. (продовольчий індекс, споживання енергії, кількість води забраної з природних водних об'єктів) суттєво коливались (Рис. 2).

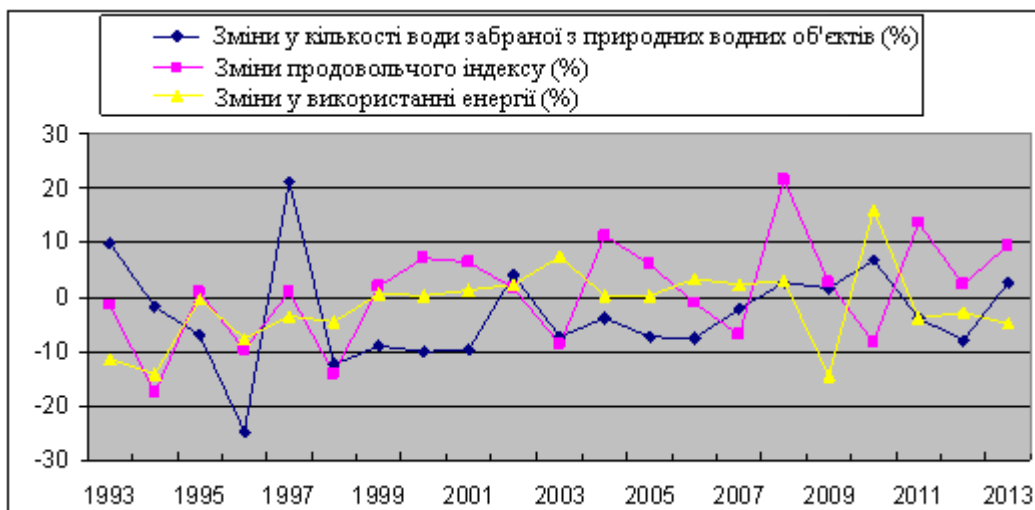


Рис.2. Динаміка змін ПЕВР в Україні (<http://wdi.worldbank.org/table/>).

На рис.3 представлені фазові криві, що характеризують різні проекції коливань цих параметрів для України, Білорусі та Польщі.

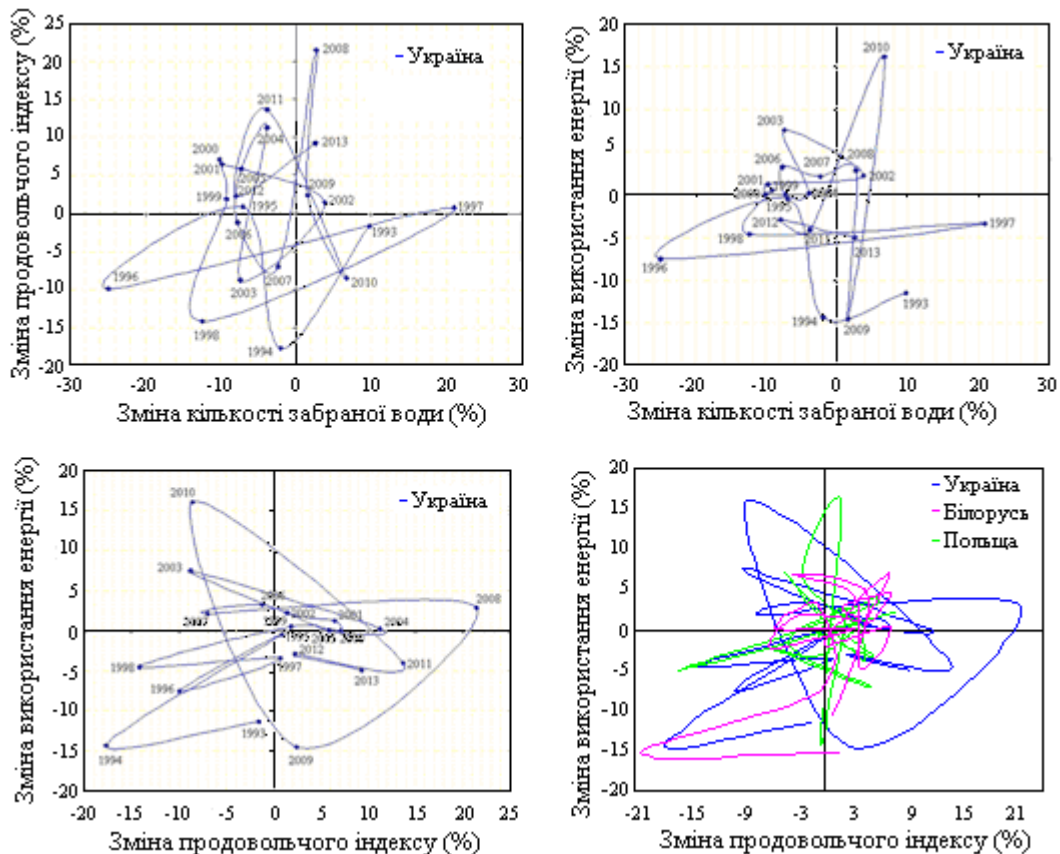


Рис.3. Проекції фазових кривих ПЕВР на протязі 1993-2013 рр. (The World Bank <http://wdi.worldbank.org/table/>)

Трасекторії фазових кривих в окремі періоди можуть трактуватися як рух до граничного циклу, що свідчить про можливості існування стійких циклічних аттракторів. Тому є вагомі причини залучення математичних моделей детермінованого хаосу – «дивних аттракторів» для дослідження механізмів нестабільності взаємозв'язку ПЕВР.

У роботі [17] була запропонована розподілена модель ринкової економіки, яка дозволяє отримати хаотичні рішення в просторі змінних, що характеризують фінансово-економічні показники. В якості змінних цієї моделі використовувалися зміна та інтенсивність руху капи талу (K) та попиту (D) під впливом норми прибутку (U). Однією з властивостей цієї системи була наявність в ній послідовності біфуркацій народження стійких періодичних однорідних просторових вирішень довільного періоду, що формують однорідний по простору, але хаотичний за часом аттрактор.

Розглянемо завдання побудови моделі, яка дозволяла б отримати хаотичні режими в просторі соціально-економічних змінних. Базуючись на дослідженнях глобальної економіки будемо використовувати наступні припущення [18].

Глобальна економіка створює певний попит на діяльність різних виробничих систем, відповідальних за стійкий розвиток суспільства в різних вимірах його функціонування (енергетичному, інформаційному, матеріальному, екологічному, медико-біологічному та інші).

Частина ресурсів, вироблюваних цими системами, витрачається на підтримку їх внутрішньої структури, інакше кажучи, на здійснення внутрішньої функції, інша частина – на зовнішні функції, визначувані попитом глобальної економіки. Ці попити залежать від різних чинників: поточного стану виробничих систем, навантаження, дії зовнішнього середовища, ефективності регуляторних механізмів і так далі

Нехай b_{1i} – поточний попит на діяльність i -ої виробничої системи, нормований на одиницю системи матеріального виробництва, як яка розглядатимемо робоче місце у відповідній галузі виробництва (Y_i). Поточний стан i -ої виробничої системи характеризується рівнем її зовнішньої функції, що визначає її пропозицію на попит глобальної економіки. Пропозиція або відповідає попиту, чи ні.

Нехай b_{2i} – рівень пропозиції, що нормується на одиницю виміру функції i -ої виробничої системи (виробництво матеріальних цінностей, послуг, інформаційного контенту і так далі) X_i . Відповідно до прийнятих позначень $b_{1i}Y_i$ та $b_{2i}X_i$ характеризують відповідно загальний попит на діяльність i -ої системи і загальна пропозиція на підтримку зовнішньої функції, визначувану можливостями існуючих робочих місць.

Нехай швидкість змін пропозиції зовнішній функції пропорційна надлишку попиту глобальної економіки над пропозицією. Тоді маємо наступне рівняння для динаміки пропозиції i -ої системи:

$$dX_i / dt = a_{1i} [b_{1i}Y_i - b_{2i}X_i], \quad (1.1)$$

де a_{1i} – параметр, що характеризує адаптаційні можливості.

Існують регуляторні механізми, які в разі надлишкового попиту приводять до змін у виробничих системах, що залучають до виробництва нові робочі місця. Вважатимемо, що чим більше X_i тим більша кількість робочих місць Y_i залучена в процес. Нехай $c_{1i}(t)$ – попит на збільшення числа робочих місць, нормований на одиницю X_i , а $c_{2i}(t)$ – доля робочих місць Y_i залучених в забезпечення X_i . Тоді $c_{1i}X_i$ та

$c_{2i}Y_i$ відповідно характеризують загальний попит і пропозицію для створення робочих місць. Нехай швидкість зміни числа робочих місць буде пропорційна надлишку їх попиту над пропозицією. Тоді маємо наступне рівняння, що описує динаміку числа робочих місць, залучених у виробництво:

$$dY_i / dt = a_{2i}[c_{1i}X_i - c_{2i}Y_i], \quad (1.2)$$

де a_{2i} має той же сенс, що a_{1i} .

Рівняння (1.2) не враховує, що число Y_i не може зростати необмежено, оскільки існують певні економічні, матеріальні і інформаційні обмежувачі, гальмівні це зростання. Крім того, необхідно врахувати, що частина ресурсів витрачається на підтримку внутрішньої структури виробничих систем, тому відбувається постійне залучення частини Y_i до цього процесу. Відтік робочих місць пропорційний, з одного боку, рівню зовнішньої функції X_i , що створює надлишкове навантаження на структури i -ої системи, а, з іншого боку, рівню структурних порушень (Z_i). Ці порушення виникають у виробничих системах і вимагають додаткових ресурсних витрат на своє усунення.

Зневажливо малий рівень структурних порушень може привести до катастрофічних наслідків, якщо рівні зовнішньої функції X_i , обумовлені економічною інтеграцією, технологічною розвиненістю і політичними зобов'язаннями (глобалізація), – досить високі. Тому рівняння, що описує темп зміни числа робочих місць трансформується до вигляду (1.3)

$$dY_i / dt = a_{2i}[c_{1i}X_i - c_{2i}Y_i - c_{3i}X_iZ_i], \quad (1.3)$$

де c_{3i} – попит на Y_i обумовлений забезпеченням внутрішніх функцій виробничої системи і нормований на одиниці зовнішньої функції і виникаючих порушень.

Вважатимемо, що зростання числа порушень пропорційне рівню навантаження на структури, що забезпечують зовнішню функцію X_i . Це навантаження залежить від величини X_i та числа робочих місць Y_i , залучених в процес виробництва. Також передбачимо, що існують регуляторні (адаптаційні) механізми, які в певних межах здатні усувати виникаючі порушення, активуючись при їх виникненні і накопиченні.

Нехай d_{1i} та d_{2i} – відповідно коефіцієнти пропорційності, тоді швидкість росту порушень описуватиметься наступним рівнянням:

$$dZ_i / dt = [d_{1i}X_iY_i - d_{2i}Z_i], \quad (1.4)$$

Розглянемо одну ізольовану систему, яка має одну зовнішню

функцію. Хай всі модельні коефіцієнти не залежать від часу. Введемо наступні позначення:

$$t = t^* / (a_2 c_2), \quad \sigma = (a_1 b_2) / (a_2 c_2), \quad r = (b_1 c_1) / (b_2 c_2), \quad b = d_2 / (a_2 c_2), \\ x = d_1 X(c_3/d_1)^{1/2} / (a_2 c_2), \quad y = d_1 b_1 Y(c_3/d_1)^{1/2} / (b_2 a_2 c_2), \quad z = (b_1 c_3 Z) / (b_2 a_2 c_2)$$

В цьому випадку рівняння (1.1), (1.3) та (1.4) трансформуються до вигляду (1.5)

$$dx/dt^* = \sigma(y - x), \quad dy/dt^* = rx - y - xz, \quad dz/dt^* = xy - bz, \quad (1.5)$$

Згідно з роботою Лоренца [19], в даній системі виникають підтримувані хаотичні режими. Таким чином, взаємозв'язку між зовнішньою функцією виробничої системи, кількістю робочих місць і структурними порушеннями можуть описуватися моделлю метастабільного хаосу Лоренца. Перехід від стабільності системи (низький рівень вразливості) до її нестабільності (високий рівень вразливості) може бути аналогічний переходу від ламінарного потоку до турбулентного.

Зростання попиту веде до зростання параметру r . Зростання пропозиції до зменшення цього параметру. Існують інтервали відношення попит/ пропозиція, які відповідають різним режимам метастабільного хаосу. Мали флуктуації параметра r можуть визвати суттєву трансформацію динаміки системи. У верхній границі цього інтервалу такі флуктуації можуть визвати катастрофічні наслідки, пов'язані з переходом от стабільності до нестабільності, від стану з низьким рівнем вразливості до стану з її високим рівнем.

Дослідження детермінованого хаосу у фізиці, біології, економіці привело до істотного переосмислення його ролі в самоорганізації складних динамічних систем [20]. Виявилось, що завдяки хаотичним режимам з їх підвищеною чутливістю до малих обурень параметрів, стає можливим переведення систему з околиці одного нестійкого граничного циклу в околицю іншого. Іншими словами стає можливим якісна зміна поведінки соціально-економічної системи, за рахунок малих змін параметрів управління, а значить при значній економії ресурсів. Виходячи з цього розуміння, трансформувалося завдання управління хаосом. Від вибору дій, що управляють, сприяючих припиненню хаосу, до вибору управлінь, що дозволяють стабілізацію певних нестійких періодичних траєкторій [17].

Скорочення ресурсної бази внаслідок кліматичних змін звужує можливості стабільного розвитку. У випадку України, існуючі ресурси, дозволяють лише трохи змінювати параметри управління економікою, тому виникає завдання пошуку таких траєкторій розвитку, які б дозволяли за рахунок малих змін параметрів, здійснювати «перескок» з однієї траєкторії розвитку на іншу. Моделі дивних аттракторів як раз можуть бути використані для дослідження умов, при яких можливий такий своєрідний фазовий перехід з одного граничного циклу до іншого.

За допомогою даних Світового Банку був проведений аналіз динаміки змін показників, що характеризують споживання свіжої води та енергії на протязі 1993 – 2013 років. Як видно з рис.4 у період 1995-1998 років траєкторія фазової кривої змін вказаних показників залишалася в зоні тяжіння граничного циклу 1. Трансформації в економіці України в 1999 та 2000 роках призвели до переходу траєкторії цієї фазової кривої в зону тяжіння іншого аттрактора – граничного циклу 2 (період 2000 – 2004 років). Траєкторія фазової кривої у період 2005 – 2013 років може трактуватися як рух до нового граничного циклу 3.

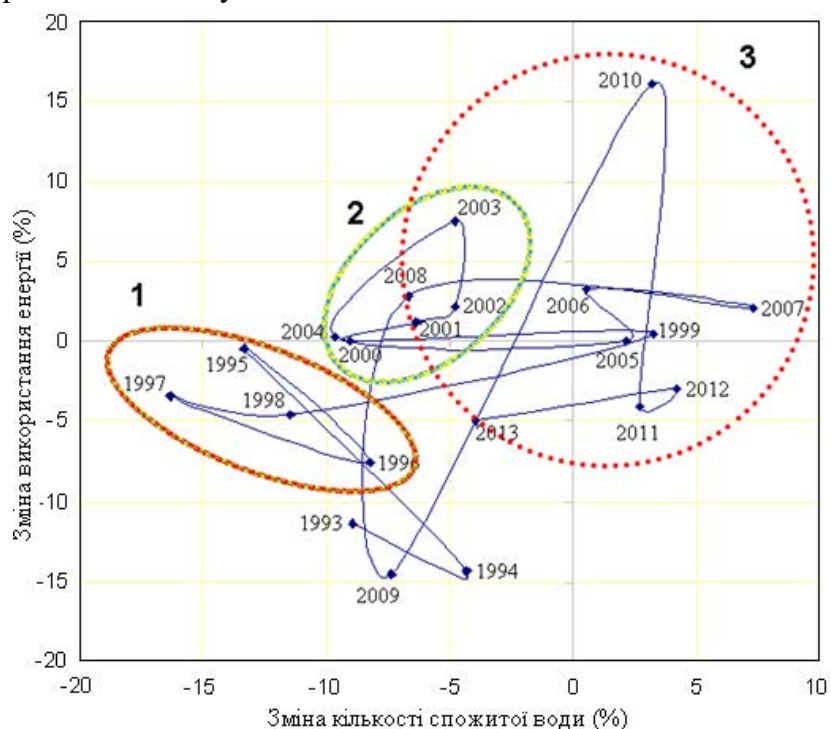


Рис 4. Фазова траєкторія змін споживання свіжої води та енергії в Україні у 1993-2013 роках за даними The World Bank (<http://wdi.worldbank.org/table/>)

Система (1.5) може бути записана в комплексній формі відносно двох комплексних змінних x та y однієї речової змінної z , що має речові параметри σ та b і комплексні параметри $r = r_1 + ir_2$, $a = 1 - ei$. Як показано в [17] в комплексній системі рівнянь Лоренца реалізується сценарій переходу до хаосу через субгармонійний каскад біфуркацій двовірних торів. У системі народжується граничний цикл частоти $\omega = r_2\sigma/(\sigma+1)$.

Повернемося тепер до системи рівнянь (1.1-1.4). В цьому випадку маємо n осциляторів, що генерують коливання з частотами ω_i відповідно. Якщо задати набір функцій зв'язку між осциляторами, то отримаємо систему зв'язаних осциляторів. Колективна синхронізація даних осциляторів може бути досліджена за допомогою моделі Курамото [21], яка має наступний вигляд:

$$\partial\theta_i / \partial dt = \omega_i + K / N \sum_{j=1}^N \sin(\theta_k - \theta_j), \quad i = 1 \dots N$$

де $\theta_i \in [0, 2\pi]$ - фазові змінні, ω_i - власні частоти, $K > 0$ - параметр зв'язку.

Таким чином, завдання управління соціально-економічним розвитком в умовах виникнення хаотичних режимів зводиться до управління частотою ненульового середнього поля, що продукується зв'язаними осциляторами.

2. АНАЛІЗ РИЗИКУ В РОСЛИННИЦТВІ

На сучасному етапі розвитку аграрного сектора України сільськогосподарські товаровиробники самостійно визначають структуру посівних площ, орієнтуючись переважно тільки на поточну кон'юнктуру продовольчого ринку. Погодний ризик, якщо і враховується, то тільки на інтуїтивному рівні. Недостатня увага до цього аспекту на практиці призводить до великих втрат урожаю при несприятливих погодних умовах. Тому набуває особливої актуальності розробка математичних методів оцінки ризику втрат врожаю і його врахування при плануванні структури посівних площ на рівні країни. Для вирішення цієї проблеми в цій статті розроблена математична модель для оптимізації структури посівних площ сільськогосподарських культур на рівні країни з урахуванням ризику втрат врожаю. В її основі лежить підхід, прийнятий в теорії портфельної оптимізації, початок якої було покладено в статті Марковіца [22]. Відповідно до цього підходу обмежені фінансові ресурси розподіляються між фінансовими інструментами таким чином, щоб максимізувати середню прибуток при обмеженнях на ризик втрат.

В роботах [23-27] цей підхід було модифіковано та застосовано для розв'язання прикладних задач не тільки в ризик-менеджменті і фінансової інженерії, а й в таких областях, як сучасна статистика, стохастичне програмування, логістика, медицина, механіка і сільське господарство. У термінах оптимізації структури посівних площ задача полягає в пошуку розподілу загальної посівної площі між областями України, який максимізує середньорічну врожайність при обмеженні на ризик недобору врожаю.

2.1 Постановка задачі

Задача ризик-аналізу в рослинництві полягає в оцінюванні рівня можливих втрат врожаю, спричинених різними причинами, і їх імовірнісних характеристик.

Розглядаються K областей України. Нехай ξ_k – середня по k -й області врожайність деякої сільськогосподарської культури, $k=1, \dots, K$, і ξ – її середня по країні врожайність. Оскільки ці величини з року в рік змінюються випадковим чином, то будемо розглядати їх як випадкові величини. Як еталон, по відношенню до якого визначаються втрати врожаю (недобір врожаю) в k -й області, можна було б вибрати середній багаторічний рівень врожайності по цій області $\bar{\xi}_k = E[\xi_k]$. Але в такому разі не було б єдиного зразка для всіх областей, і порівняння оцінок ризику втрат врожаю між областями було б ускладнено. Тому недобір врожаю в k -й області оцінюватимемо відносно середнього багаторічного рівня врожайності даної культури по всій країні, $\bar{\xi} = E[\xi]$, за формулою

$$\omega_k = \bar{\xi} - \xi_k, \quad k=1,2,\dots,K. \quad (2.1)$$

Позитивні значення випадкової величини ω_k відповідають небажаним наслідкам (недобір врожаю по відношенню до еталонного рівня), а негативні – сприятливим (урожай, який перевищує середній рівень). У зв'язку з цим виникає проблема вибору підходящої міри ризику реалізації небажаних наслідків. З появою статті [22], протягом декількох десятиліть в теорії портфельної оптимізації у якості міри ризику використовувалося стандартне відхилення, що характеризує ширину імовірнісного розподілу. При цьому великі відхилення від середнього як в бік позитивних значень, так і в бік негативних розглядаються як ризиковані. У той же час на практиці мінімізації підлягають тільки односторонні відхилення в позитивний бік, які відповідають втратам врожаю. Тому в останній час широкого

поширення набула міра ризику VaR (Value at Risk), яка враховує відхилення тільки в один (несприятливий) бік.

Розглянемо розподіл ймовірностей випадкової величини ω втрат врожаю

$$F(z) = P\{\omega \leq z\}. \quad (2.2)$$

Тоді VaR при рівні значимості α ($0 < \alpha < 1$) функції розподілу ω визначається за формулою [23–25]:

$$VaR_{\alpha}(\omega) = \min\{z \mid F(z) \geq \alpha\} \quad (2.3)$$

При $\alpha = 0.95$ це визначення означає, що зі ста випадків тільки в п'яти недобір врожаю буде перевищувати $VaR_{0.95}(\omega)$. Якщо функція розподілу $F(z)$ неперервна і строго монотонна, то $VaR_{\alpha}(\omega)$ - квантиль рівня α для цієї функції. Дана міра ризику має простий інтуїтивно зрозумілий сенс. Проте вона не відображає можливість реалізації великих втрат за межами $VaR_{\alpha}(\omega)$ з малими ймовірностями.

Для урахування важких хвостів в функції розподілу втрат, в якості міри ризику використовують $CVaR$ (conditional VaR). Ця міра ризику визначає середні втрати, що перевищують відповідне значення VaR . Якщо функція розподілу $F(z)$ неперервна в точці $VaR_{\alpha}(\omega)$, то $CVaR$ визначається за формулою [25]

$$CVaR_{\alpha}(\omega) = E\{\omega \mid \omega \geq VaR_{\alpha}\}, \quad (4)$$

де E – математичного очікування.

Розглянемо дискретний випадок, коли випадкова величина ω приймає кінцеве число значень, які упорядковані наступним чином: $z_1 < z_2 < \dots < z_N$, і ймовірність реалізації значення z_n дорівнює $p_n > 0$, $n = 1, \dots, N$. Нехай при цьому індекс n_{α} задовольняє умові

$$\sum_{n=1}^{n_{\alpha}} p_n \geq \alpha > \sum_{n=1}^{n_{\alpha}-1} p_n.$$

Тоді $CVaR_{\alpha}(\omega)$ обчислюється за формулою [25]

$$CVaR_{\alpha}(\omega) = \frac{1}{1-\alpha} \left[\left(\sum_{n=1}^{n_{\alpha}} p_n - \alpha \right) z_{n_{\alpha}} + \sum_{n=n_{\alpha}+1}^N p_n z_n \right]. \quad (2.5)$$

Оскільки на практиці розподіл випадкової величини ω невідомий, то для обчислення $CVaR_{\alpha}(\omega)$ використовується сценарний підхід, заснований на історичних даних.

В рамках цього підходу будемо вважати, що випадкова величина ξ_k приймає з рівними ймовірностями значення (сценарії) u_{1k}, \dots, u_{jk} , де u_{jk} – історична (статистична) врожайність сільськогосподарської культури в j -му році (при j -му сценарії) в k -й області, $k = 1, \dots, K$, $j = 1, \dots, J$; J – період (кількість сценаріїв), в межах якого використовуються статистична інформація про врожайність даної культури за минулі роки.

У наступному розділі представлені результати оцінки ризику недобору врожаю озимої пшениці по всіх областях України з використанням в якості міри ризику $CVaR_q(\omega)$, що обчислюється за формулою (2.5). За допомогою співвідношень ризик недобору врожаю – середньорічна врожайність будуть виявлені як області, найбільш сприятливі для виробництва даної сільськогосподарської культури, так і несприятливі. Область, в якій середньорічна врожайність висока при низькому рівні ризику, вважається сприятливою для вирощування даної культури. Це співвідношення використовується в статті в якості базису для оптимального розподілу посівних площ сільськогосподарської культури по областях. Використовуючи великий розкид по областях значень середньорічний врожайності і ризику недобору врожаю, можна вибрати такий розподіл посівних площ по областях, при якому досягається максимальне значення середньорічної врожайності даної культури по країні і при цьому ризик недобору врожаю не перевищує заданого критичного рівня.

Для формулювання задачі оптимального розподілу посівних площ однієї культури по областях з урахуванням ризику втрат врожаю введемо такі позначення. Нехай S – загальна посівна площа, яку планується відвести під цю сільськогосподарську культуру; x_k – частка загальної площі, яка припадає на k -у область, $k = 1, \dots, K$; u_{jk} – врожайність даної культури в k -й області при j -му сценарії, $k = 1, \dots, K$, $j = 1, \dots, J$; s_k – вільна посівна площа, яка може бути відведена під дану культуру в k -й області.

При фіксованому розподілі посівних площ $x = (x_1, \dots, x_K)$ середня по країні врожайність культури при j -му сценарії дорівнює

$$u_j(x) = \sum_{k=1}^K u_{jk} x_k. \quad (2.6)$$

Середньорічна врожайність по країні дорівнює

$$\bar{u}(x) = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J u_j(x) = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K u_{jk} x_k . \quad (2.7)$$

Недобір урожаю в країні при j -м сценарії в порівнянні з еталонним рівнем $\bar{\xi}$ дорівнює

$$\omega(x, j) = \bar{\xi} - u_j(x) = \bar{\xi} - \sum_{k=1}^K u_{jk} x_k . \quad (2.8)$$

Ризик недобору врожаю в порівнянні з еталонним рівнем вимірюється показником $CVaR_q(\omega(x))$ і обчислюється за формулою (2.5), де

$$p_j = \frac{1}{J}, j = 1, \dots, J .$$

Задача оптимізації розподілу посівних площ під одну культуру по областях з урахуванням ризику полягає у визначенні такого розподілу посівних площ, $x^* = (x_1^*, \dots, x_K^*)$, при якому максимізується її середньорічна врожайність по країні

$$\bar{u}(x^*) = \max_x \left[\frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K u_{jk} x_k \right] \quad (2.9)$$

і при цьому виконуються обмеження:

- на ризик недобору врожаю

$$CVaR_q(\omega(x)) \leq R , \quad (2.10)$$

- на суму посівних площ, відведених під культуру в усіх областях

$$\sum_{k=1}^K x_k = 1 , \quad (2.11)$$

- на посівні площі, які можна виділити в окремих областях,

$$0 \leq x_k \leq \frac{S_k}{S}, k = 1, \dots, K . \quad (2.12)$$

Величина R в обмеженні (2.10) відображає прийнятний з точки зору забезпечення продовольчої безпеки країни рівень недобору врожаю в розрахунку на 1 га. При цьому мається на увазі, що компенсувати втрати врожаю можна за рахунок інших джерел, наприклад наявних запасів або скорочення експорту відповідної сільськогосподарської продукції. Оцінка ризику в лівій частині обмеження (2.10) повинна використовуватися як основа для вироблення стратегії формування необхідних обсягів запасів.

Помноживши обидві частини обмеження (2.11) на величину S , отримаємо балансове обмеження, яке гарантує, що сума посівних площ, відведених під цю культуру в усіх областях, дорівнює її загальній посівній площі S на рівні країни.

2.2 Результати розрахунків

В даному розділі математичні методи і модель, що були запропоновані в попередньому розділі, використовуються для проведення ризик-аналізу ефективності виробництва озимої пшениці в кожній області України, а також для рішення задачі оптимального розподілу посівних площ по областях з урахуванням ризику.

З урахуванням того, що період, за який використовуються статистичні дані про врожайність, $J = 13$, при виборі рівня значимості $\alpha = 0.77$, значення $CVaR_{0.77}(\omega)$ приблизно дорівнює середньому значенню недобору врожаю за три найбільш неврожайні роки.

Згідно з методикою, яка застосовується в Україні та в деяких інших країнах СНД, врожайність сільськогосподарських культур визначається в розрахунку на 1 га площі, з якої забирається урожай. Для проведення ризик-аналізу були отримані значення врожайності озимої пшениці в розрахунку на 1 га посівної площі як по областях, так і по країні, і визначено середній за 13 років рівень її врожайності по країні $\bar{\xi}$. Отримане значення $\bar{\xi} = 27.28$ ц з одного гектара засіяної площі в подальшому використовувалося як еталон, щодо якого за формулою (2.1) визначалися втрати врожаю. По кожній області були визначені середньорічні значення врожайності озимої пшениці і розраховані за формулою (2.5) значення ризику недобору її врожаю.

Випадкова мінливість врожайності сільськогосподарської культури у фіксованій області характеризується двома показниками: середньорічний врожайністю і ризиком недобору врожаю по відношенню до еталонного значення. Ці показники характеризують ефективність її виробництва в даній області. Порівняння областей за цими двома показниками зручно проводити з допомогою графіка, на якому по осі X відкладаються значення ризику, $CVaR_{0.77}$, а по осі Y - середньорічна врожайність, ц на 1 га посівної площі (див. Рис. 5). Точці з координатами (x, y) на цьому графіку відповідає область, середньорічна врожайність в якій дорівнює y , а ризик недобору врожаю – x .

У лівому верхньому кутку розташовані точки, які відповідають областям з найбільш сприятливими умовами для виробництва озимої

пшениці, оскільки вони характеризуються порівняно високими рівнями середньорічної врожайності і низькими значеннями ризику недобору врожаю. У цю групу входять Черкаська, Київська, Вінницька та Волинська області.



Рис. 5. Діапазон співвідношень "ризик недобору врожаю - середньорічна врожайність" по областям України для озимої пшениці.

Найменшим ризиком недобору врожаю озимої пшениці характеризується Волинська область, у якій значення ризику $CVaR_{0.77} = 4.45$ ц / га. Таким чином, в середньому за три найбільш неврожайних в цій області роки із 13 недобір врожаю озимої пшениці по відношенню до еталону (27.28 ц / га) становить 4.45 ц / га. Проте середньорічна врожайність цієї культури в Волинській області (28.05 ц / га) набагато нижче відповідного показника в Черкаській області (33.87 ц / га).

Досить хороше співвідношення "ризик недобору врожаю - середньорічна врожайність" демонструє Київська область, в якій середньорічна врожайність озимої пшениці на 4.76 ц / га вище, ніж у Волинській, а ризик вище тільки на 0.41 ц / га.

Найгірше співвідношення "ризик недобору врожаю - середньорічна врожайність" демонструють області, яким відповідають точки в правому нижньому кутку на графіку, оскільки у них низькі рівні середньорічної врожайності і високі значення ризику недобору врожаю. У цю групу входять Миколаївська та Херсонська області. Миколаївська область характеризується найбільшим значенням ризику $CVaR_{0.77} = 16.93$ ц / га на фоні досить низького значення середньорічної врожайності озимої пшениці, 23.76 ц на 1 га посівної площі. Найменший рівень середньорічної врожайності озимої пшениці, 21.98 ц / га, при досить високому рівні ризику, $CVaR_{0.77} = 11.44$ ц / га, демонструє Автономна Республіка Крим.

Розглянемо, як впливає розмір загальної посівної площі S і її розподіл між областями на ефективність виробництва озимої пшениці на рівні країни. Проведено чотири серії розрахунків при значеннях S , рівних 2356.5, 5089.2, 5533.8, 6499.4 тис. га, які відповідають загальним посівним площам, відведеним в Україні під озиму пшеницю в 2003 р, 2006, 2012 і 2011 рр. відповідно.

Для параметру s_k , який використовується в правій частині обмеження (2.12), ми вибрали максимальну за 13 років посівну площу, яку було відведено під озиму пшеницю в k -й області, $k=1, \dots, K$.

У кожній серії розрахунків розв'язувалась задача (2.9) - (2.12) при різних значеннях правої частини в обмеженні (2.10), R_1, \dots, R_N , яким відповідають оптимальні рішення $x_{R_1}^*, \dots, x_{R_N}^*$. Оптимальне рішення $x_{R_n}^*$ задачі (2.9) - (2.12) при фіксованому значенні правої частини R_n в обмеженні (2.10) характеризується співвідношенням "ризик недобору врожаю - середньорічна врожайність": $(CVaR_{0.77}(\omega(x_{R_n}^*)), \bar{u}(x_{R_n}^*))$, $n=1, \dots, N$.

Якщо відобразити точки з такими координатами на графіку, на якому по осі X відкладаються значення ризику, $CVaR_{0.77}$, а по осі Y - середньорічна врожайність на рівні країни, то отримаємо криву, аналогічну межі ефективності Марковіца, яка широко використовується в теорії портфельної оптимізації.

На рис. 6 відображені чотири таких кривих, помічені номерами 1 - 4.

Крім того, показані також і точки з номерами 5 - 11, що характеризують фактичні значення показників ефективності розподілу посівних площ озимої пшениці по областям України в різні роки.

Крива 1 на графіку є межею ефективності розподілу загальної посівної площі озимої пшениці розміром $S = 2356.5$ тис. га між областями при фіксованих значеннях s_k , $k=1, \dots, K$. Саме на такій площі була посіяна озима пшениця в Україні в 2003 р. Це значення - мінімальне за 2000 - 2012 рр. Кривій 2 відповідає площа розміром $S = 5089.2$ тис. га, кривій 3 - $S = 5533.8$, кривій 4 - $S = 6499.4$ тис. га.

Для кожної точки кривої 1 її Y - координата дорівнює максимально можливому значенню середньорічній врожайності озимої пшениці по країні за умови, що ризик недобору врожаю $CVaR_{0.77}$ не перевищує значення, що відповідає її X -координаті.

Крайня зліва точка на кривій 1 відповідає мінімальному значенню ризику, яке можна досягти при оптимальному розподілі між областями посівної площі розміром $S = 2356.5$ тис. га.

При будь-якому значенні величини R в правій частині обмеження (2.10) меншому, ніж цей мінімальний ризик, задача (2.9) - (2.12) не має допустимого рішення. Крайня праворуч точка на цій кривій відповідає оптимальному рішення задачі (2.9) - (2.12) з максимально можливим ризиком. При значеннях R , що перевершують цей максимальний ризик, обмеження (2.10) буде неактивним, тобто задача (2.9) - (2.12) буде еквівалентна задачі максимізації функції (2.9) при обмеженнях (2.11) і (2.12).

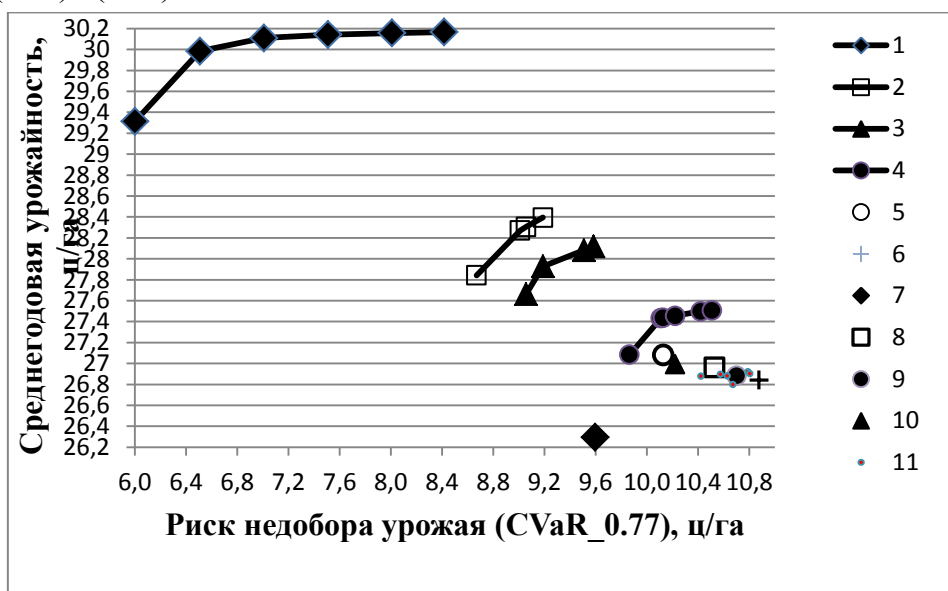


Рис. 6. Співвідношення фактичних показників ефективності розподілу посівних площ озимої пшениці по областях України в різні роки і межами ефективності.

Слід зазначити, що значення максимального ризику для неоптимального розподілу посівної площі по областях може істотно перевищувати максимальний ризик, отриманий при вирішенні задачі (2.9) - (2.12). Таким чином, при заданому значенні ризику значення середньої врожайності можна збільшити тільки до рівня, що визначається відповідною точкою, розташованої на межі ефективності. Подальше підвищення рівня середньої врожайності можна досягти тільки за рахунок збільшення значення допустимого ризику та пошуку оптимального рішення задачі (2.9) - (2.12), якому буде відповідати точка на межі ефективності, що лежить правіше і вище вихідної точки.

Цю ітеративну процедуру можна продовжувати до тих пір, поки обмеження (2.10) залишається активним. Крайній правій точці, розташований на межі ефективності, відповідає максимальний рівень середньої врожайності, який не можна перевершити при фіксованих значеннях розмірів загальної посівної площі S і вільної посівної площі s_k в k -й області, $k=1, \dots, K$, яка може бути відведена під дану культуру.

Зміна значення S призводить до зміни форми і розташування межі ефективності. На рис. 6 видно, що зі збільшенням розміру загальної посівної площі S , яку необхідно розподілити між областями, відповідна межа ефективності зміщується в бік правого нижнього кута. В тому ж напрямку зміщуються їх крайні ліві і крайні праві точки. Така закономірність в розташуванні меж ефективності свідчить про те, що зі збільшенням значення S оптимальні рішення задачі (2.9) - (2.12) характеризуються все гіршими співвідношеннями "ризик недобору врожаю - середньорічна врожайність".

У правому нижньому кутку зображені точки 5 - 11, що характеризують показники ефективності фактичного розподілу посівних площ озимої пшениці різних розмірів S за 2000 - 2012 рр. Для того щоб підкреслити, наскільки рішення задачі (2.9) - (2.12) покращує показники ефективності розподілу посівних площ озимої пшениці в порівнянні з фактичними значеннями, деякі точки позначені тими ж маркерами, що і відповідні їм межі ефективності. Наприклад, нижня точка, позначена ромбиком, відображає співвідношення "ризик недобору врожаю - середньорічна врожайність", що характеризує фактичний розподіл в 2003 р загальної посівної площі озимої пшениці розміром $S = 2356.5$ тис. га між областями. Таким же маркером позначена межа ефективності 1, побудована в результаті вирішення декількох задач при різних значеннях R в правій частині обмеження (2.10) і фіксованому значенні площі $S = 2356.5$ тис. га. Аналогічно, точці 8 і межі ефективності 2, позначеними порожнім квадратом, відповідає одне значення $S = 5089.2$ тис. Га; точці 10 і межі ефективності 3 - значення $S = 5533.8$ тис. га; точці 9 і межі ефективності 4 - значення $S = 6499.4$ тис. га.

Відстань між кожною парою таких графічних об'єктів характеризує ступінь ефективності оптимізації розподілу загальної посівної площі між областями. Рис. 6 демонструє, що найбільша ефективність досягається при мінімальному значенні S . З ростом розміру загальної посівної площі, яку треба розподілити між областями, ефективність оптимізації падає.

Для точок, позначених порожнім кружечком і символом +, відповідні межі ефективності не наведено на графіку. Перша з них відповідає найбільш ефективному фактичному розподілу загальної посівної площі (2000 р), а друга - найбільш неефективному розподілу (2002 р).

У таблиці 2.1 наведені оптимальні варіанти розподілу загальної посівної площі озимої пшениці між областями, які характеризуються мінімальним ризиком недобору врожаю ($CVaR_{0.77}$). Ці варіанти розподілу, отримані при розв'язанні задачі (9) - (12) для $S = 2356.5$ тис. га, 5089.2 тис. га і 5533.8 тис. га, порівнюються в таблиці з розподілами таких же загальних площ, реалізованими в 2003, 2006 і 2012 рр. на практиці.

Області розташовані в таблиці 2.1 в порядку зростання ризику недобору врожаю озимої пшениці. Аналіз показує, що при розподілі загальної посівної площі порівняно малого розміру ($S = 2356.5$ тис. га і $S = 5089.2$ тис. га) з мінімальним значенням ризику недобору врожаю ($CVaR_{0.77}$), під озиму пшеницю в основному виділяються вільні посівні площі в областях з сприятливими умовами для її виробництва (верхні рядки таблиці 2.1).

У зв'язку з обмеженням розміром вільної посівної площі в цих областях s_k , зі збільшенням значення S доводиться задіяти вільні посівні площі в областях з менш сприятливими умовами, що погіршує співвідношення "ризик недобору врожаю - середньорічна врожайність" на рівні країни. Згідно з порядком розташування областей в таблиці, в нижній частині знаходяться області, які характеризуються великим ризиком недобору врожаю. До них відносяться південні і східні області України.

Таблиця демонструє значне зменшення їх частки в загальній посівній площі озимої пшениці в оптимальних варіантах розподілу в порівнянні з варіантами розподілу, реалізованими в різні роки на практиці. При цьому в оптимальних варіантах частка Миколаївської обл., яка характеризується максимальним ризиком, дорівнює нулю.

Порівняння фактичного розподілу з оптимальним свідчить, що саме істотним збільшенням частки областей, несприятливих для вирощування озимої пшениці, в загальній посівній площі, яке практикувалося в різні роки, пояснюється великий ризик недобору врожаю на рівні країни.

Таблиця 2.1.

Порівняння фактичного розподілу загальної посівної площі озимої пшениці по областях з оптимальним для $S = 2356.5$, 5089.2 і 5533.8 тис. га.

Область	Розподіл посівної площі озимої пшениці по областях (%)					
	$S = 2356.5$ тис. га		$S = 5089.2$ тис. га		$S = 5533.8$ тис. га	
	Оптимальний	Фактичний (2003 г)	Оптимальний	Фактичний (2006 г)	Оптимальний	Фактичний (2012 г)
Волинська	5.42	3.90	2.51	2.37	2.31	2.19
Київська	11.43	0.98	5.29	4.13	4.87	3.23
Закарпатська	1.46	1.09	0.67	0.57	0.62	0.62
Львівська	5.92	4.43	2.74	2.36	2.52	2.48
Черкаська	11.25	1.56	5.21	3.83	4.79	3.90
Рівненська	5.17	2.40	2.40	1.78	2.20	1.75
Вінницька	15.90	5.08	7.36	4.38	6.77	6.28
Івано-Франківська	2.62	1.08	1.21	0.81	1.12	0.91
Тернопільська	8.78	3.90	4.07	3.09	3.74	3.74
Хмельницька	12.50	5.20	5.79	3.30	5.32	3.90
Житомирська	0.65	2.18	3.15	1.75	2.90	1.73
Чернівецька	0.00	1.36	1.21	0.64	1.11	0.79
Сумська	0.00	2.84	4.47	1.85	4.11	3.38
АР Крим	7.94	10.93	7.78	5.99	7.16	5.72
Чернігівська	0.00	2.91	3.16	2.40	2.90	2.58
Полтавська	0.00	1.59	7.10	4.98	6.53	3.58
Донецька	0.00	6.42	4.69	6.66	7.54	7.21
Кіровоградська	10.97	2.60	7.54	5.51	6.93	3.91
Запорізька	0.00	6.72	10.07	5.84	9.26	7.52
Харківська	0.00	7.40	9.33	7.06	8.58	6.35
Одеська	0.00	7.30	1.80	8.09	5.18	8.03
Луганська	0.00	7.87	0.00	4.40	3.51	5.34
Херсонська	0.00	7.89	2.45	5.35	0.00	4.39
Дніпропетровська	0.00	0.86	0.00	6.86	0.03	5.99
Миколаївська	0.00	1.54	0.00	5.99	0.00	4.47

Поліпшити співвідношення "ризик недобору врожаю - середньорічна врожайність" на рівні країни можна шляхом збільшення посівних площ озимої пшениці в областях, розташованих у верхніх рядках таблиці, за рахунок культур, другорядних з точки зору продовольчої безпеки.

Згідно зі статистичними даними [28], за 1990 - 2011 рр. площа, з якої зібрано врожай соняшнику, збільшилася в Київській обл. в 17.9 рази (з 4.8 тис. га в 1990 р до 86,0 тис. га в 2011), в Черкаській обл. - в 4.2 рази (з 37.9 тис. га в 1990 р до 157.8 тис. га в 2011), у Вінницькій обл. - в 4.3 рази (з 34.3 тис. га в 1990 р до 148.0 тис. га в 2011); площа, з якої зібрано врожай ріпаку, збільшилася в Київській обл. в 3.8 рази (з 9.2 тис. га в 1990 р до 35,4 тис. га в 2011), в Черкаській обл. - в 46.8 рази (з 1.5 тис. га в 1990 р до 70,2 тис. га в 2011), у Вінницькій обл. - в 12.3 рази (з 11.6 тис. Га в 1990 р до 143,0 тис. Га в 2011).

Якби в 2011 р в під соняшник і рапс були відведені такі ж площі, як і в 1990 р, то у всіх областях утворилися б надлишки вільних посівних площ, про масштаби яких красномовно свідчать такі цифри: в Кіровоградській обл. ці надлишки склали б 124% від посівної площі, виділеної в цій області в 2011 р під озиму пшеницю; в Черкаській - 62%; в Житомирській - 56%; в Полтавській - 55%; у Вінницькій - 49%; в Київській - 48%.

Збільшивши в кожній області розмір посівних площ, відведених в 2011 р під озиму пшеницю, на величину надлишків, що утворилися, отримаємо нові значення вільних посівних площ, s_k , $k=1, \dots, K$. Для цих даних була розв'язана серія задач (2.9) - (2.12) щодо розподілу загальної посівної площі розміром $S = 6499.4$ тис. га між областями при різних значеннях правої частини в обмеженні (2.10).

Аналіз отриманих результатів показав, що при нових значеннях s_k , $k=1, \dots, K$, межа ефективності, що відповідає $S = 6499.4$ тис. га (крива 4 на рис. 6) перемістилася вгору і зрушила вліво. При цьому діапазон значень ризику недобору врожаю, що відповідає перерахованій межі ефективності, покращився з $[9.8551, 10.5]$ до $[8.872, 9.492]$, тобто нове значення максимального ризику - 9.492, стало меншим, ніж старе значення мінімального ризику - 9.8551. Покращився також і діапазон середньорічних значень врожайності з $[27.08, 27.51]$ до $[28.11, 28.59]$, тобто нове мінімальне значення середньорічної врожайності озимої пшениці стало більшим, ніж старе максимальне.

3. МЕТОДОЛОГІЯ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Розділ присвячено опису апарату мір ризику, призначеного для оцінки ризиків в задачах прийняття рішень в умовах невизначеності. Під такими умовами будемо розуміти недетермінованість процесів, що вивчаються, наслідки яких суттєво залежить від деяких випадкових (невизначених) параметрів.

Будемо розрізняти два випадки: коли імовірнісні розподіли таких параметрів відомі для особи, що приймає рішення (ОПР), та коли вони не відомі. В [29] такі випадки було названо відповідно умовами ризику та умовами невизначеності. Зрозуміло, що якусь інформацію про подібні параметри ОПР необхідно мати. Як правило, в різноманітних практичних застосуваннях відома лише часткова інформація про розподіли випадкових параметрів. Наявність навіть великого набору статистичних (історичних) даних не гарантує повної інформації про імовірнісні розподіли. Моделювання майбутнього розвитку подій завжди несе в собі невизначеності, оскільки знання минулого не означає знання майбутнього.

Як правило, ризики процесів зумовлені їх невизначеностями з потенційно можливими несприятливими (аж до найгірших) наслідками. По суті, вони відображають оцінки реалізації песимістичних сценаріїв розвитку подій у вигляді відповідних збитків, втрат, тощо. Зрозуміло, що способи побудови таких оцінок можуть бути різними. Наприклад, вони можуть описуватися середніми втратами, максимальними збитками (найгірший випадок), чи деякими іншими величинами [24,30]. Зазвичай такі оцінки будуються за допомогою певної міри (функції) ризику, що відображає уявлення ОПР про те, як оцінювати ризик.

В роботі описується математичний апарат поліедральних когерентних мір ризику (ПКМР), який вводився для відомих імовірнісних розподілів випадкових величин (в.в.) [31] та потім поширювався на випадок неточних сценарних ймовірностей [32]. Він виявився ефективним для пошуку оптимальних портфельних рішень за співвідношенням винагорода – ризик в умовах невизначеності [32–34].

Тут цей апарат розвивається на випадок неточних по сценарних значень випадкових (невизначених) величин, для яких можуть бути відомі лише їх оцінки зверху та знизу. Крім того, на основі використання ПКМР запропоновано єдиний підхід до розв'язання задач стохастичного програмування та робастної оптимізації.

3.1. Елементи апарату ПКМР

Нехай на ймовірнісному просторі (Ω, Σ, P_0) задана в.в. $X(\cdot): \Omega \rightarrow R$. В [30] для оцінки ризику в.в. фінансового потоку X було введено поняття когерентної міри ризику (КМР), яка представляється в наступному вигляді:

$$\rho(X) = \sup\{E_P[-X]: P \in Q\}, \quad (3.1)$$

де $E_P[\cdot]$ – математичне очікування по ймовірнісній мірі P , Q – деяка опукла замкнена множина ймовірнісних мір. Міра інтерпретує потенційні втрати потоку X , які описуються величиною $(-X)$.

У випадку, коли в.в. X описує витрати, збитки, вартості та інше, що характеризується порядком переваги “чим менше, тим краще”, у відповідній КМР використовують конструкцію, аналогічну до (3.1), але без знаку “мінус” при в.в.:

$$\rho(X) = \sup\{E_P[X]: P \in Q\}. \quad (3.2)$$

Міра (3.2) застосовується в задачах прийняття рішень, в яких в якості критеріїв та в обмеженнях зверху використовуються функції мінімумів, оскільки це означає саме такий порядок переваг. В іншому, протилежному випадку в якості міри ризику доцільно використати представлення (3.1).

Розглянемо тепер скінченну дискретно розподілену в.в. X , яка описується набором своїх посценарних значень $x = (x_1, \dots, x_n)$ з відповідними сценарними ймовірностями $p_0 = (p_1^0, \dots, p_n^0)$. Для таких в.в. в [31] вводилося поняття поліедральної КМР (ПКМР), в якому конструкція (3.2) (відповідно (3.1)) доповнювалась умовою поліедральності (багатогранності) множини Q , тобто його описом у вигляді

$$Q = \{p: Bp \leq c, p \geq 0\}, \quad (3.3)$$

де B і c – матриця та вектор відповідних розмірностей.

Слідуючи [33], розподілимо опис множини Q в (3.3) на стандартну та змістовну частини. Представимо матрицю B та вектор c як

$$B = \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

де B_0 і c_0 з (3.4) є стандартними:

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ -1 & \dots & -1 \end{pmatrix}, c_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

оскільки описують умову $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, а B_1 та c_1 , представляють змістовну частину в (3.4), яка власне і визначає міру ризику у вигляді співвідношень (3.2)–(3.5).

Приклади ПКМР [33]:

П1) середні втрати $E_{p_0}[X]: Q = \{p_0\}$;

П2) максимальні втрати (найгірший випадок): в описі Q (3.2)–(3.5) відсутні B_1 та c_1 .

П3) міра conditional value-at-risk (CVaR) [24]: в описі Q (3.2)–(3.5)

$$B_1 = I, c_1 = \frac{1}{1-\alpha} p_0;$$

П4) спектральна когерентна міра ризику (SCRM) [35]: в описі Q

(3.2)–(3.5) $B_1 = I, c_1 = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1-\alpha_i} \right) p_0$, де λ_i і α_i визначаються з відповідних співвідношень [33].

П5) представлення Кусуокі інваріантних за розподілом КМР

(KRRM) [36]: в описі Q (3.2)–(3.5) $B_1 = I, c_1 = \left(\max_{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Lambda} \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1-\alpha_i} \right) p_0$ [37].

Випадок неточних сценарних ймовірностей. Іноді вдається моделювати сценарії майбутніх подій з розподілом по них значень в.в., проте важко ідентифікувати вектор сценарних ймовірностей p_0 , який лише оцінюється зверху та знизу. Для подібних ситуацій, що називаються випадками неточних ймовірностей, апарат ПКМР пропонує так звані робастні конструкції мір ризику.

Їх побудова полягає в наступному. У випадку відомих розподілів дискретних в.в. міра ризику визначається конструкцією (3.1), (3.3) (чи відповідно (3.2), (3.3)), в якій права частина співвідношення (3.3) залежить від p_0 . Це означає, що множина Q для міри описується деяким багатозначним відображенням (б.в.) $Q(p_0)$.

У випадку невизначеності щодо p_0 у формі $p_0 \in U_P$ міра повинна враховувати збільшення ризику потенційних втрат за рахунок цієї невизначеності. Тоді по початковій мірі $\rho_0(\cdot)$ будується її робастна конструкція:

$$\rho_{\rho_0; U_P}(X) = \sup \{E_P[X]: P \in Q(U_P)\}, \quad (3.6)$$

де $Q(\cdot)$ – б.в. $\rho_0(\cdot)$, $Q(U_P) = \overline{\text{co}}\left(\bigcup_{p_0 \in U_P} Q(p_0)\right)$, $\overline{\text{co}}$ – опукла замкнена оболонка.

Побудова ρ_{ρ_0, U_P} у вигляді (3.6) по початковій мірі ρ_0 у формі (3.2) в загальному випадку не є тривіальною задачею [33]. Проте вона значно спрощується при простій структурі множини U_P , зокрема у випадку неточних ймовірностей, коли вектор сценарних ймовірностей p_0 описується своїми нижніми та верхніми оцінками p_l та p_u відповідно. Тоді множина U_P має вигляд:

$$U_P = \left\{ p : p \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1, p_l \leq p \leq p_u \right\}. \quad (3.7)$$

В цьому випадку робастні конструкції для прикладів мір П1)–П5) є ПКМР, що описуються співвідношеннями (3.2)–(3.5) з наступними атрибутами [33]:

П1') для середніх втрат: $B_1 = \begin{pmatrix} -I \\ I \end{pmatrix}, c_1 = \begin{pmatrix} -p_l \\ p_u \end{pmatrix};$

П2') для максимальних втрат: відсутні B_1 та c_1 ;

П3') для CVaR: $B_1 = I, c_1 = \frac{p_u}{1-\alpha};$

П4') для SCRM: $B_1 = I, c_1 = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1-\alpha_i} \right) p_u$, де λ_i і α_i визначаються з

деяких відповідних співвідношень;

П5') для KRRM: $B_1 = I, c_1 = \left(\max_{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Lambda} \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1-\alpha_i} \right) p_u.$

Випадок неточних посценарних значень в.в. Припустимо, що ми не можемо ідентифікувати посценарні значення в.в., а маємо лише їх верхні і нижні оцінки. У таких випадках можна використати вже розвинений апарат ПКМР наступним чином. Нехай значення в.в. X оцінюються її випадковими (посценарними) верхніми і нижніми оцінками X_l, X_u , тобто як $X \in U_X$, де

$$U_X(\omega) = \{X(\omega) : X_l(\omega) \leq X(\omega) \leq X_u(\omega)\}, \omega \in \Omega \text{ e.a.}$$

Тоді можемо ввести відповідно нижній та верхній варіанти ПКМР. У випадку, коли використовується конструкція (3.2), позначимо як нижню та верхню ПКМР в.в. X відповідно:

$$\rho^l(X) = \sup_{P \in Q} \inf_{Y \in U_X} E_P[Y] = \sup_{P \in Q} \{E_P[X_l] : P \in Q\}, \quad (3.8)$$

$$\rho^u(X) = \sup_{P \in Q} \sup_{Y \in U_X} Y = \sup_{P \in Q} \{E_P[X_u] : P \in Q\}. \quad (3.9)$$

В разі використання конструкції (3.1), враховуючи зміну знаку при в.в. X , відповідні ПКМР визначаються наступним чином:

$$\rho^l(X) = \sup_{P \in Q} \{E_P[-X_u] : P \in Q\}, \rho^u(X) = \sup_{P \in Q} \{E_P[-X_l] : P \in Q\}.$$

Зрозуміло, що обидва варіанти ПКМР співпадають, якщо посценарні значення в.в. відомі. Отже, у випадку неточних посценарних оцінок ми отримаємо верхній та нижній варіанти міри ризику, які в подальшому можуть використовуватися в залежності від постановки задачі.

Комбінація неточних сценарних ймовірностей та неточних посценарних значень. Зрозуміло, що у випадку комбінації попередніх двох невизначеностей ми можемо використати вже розвинутий математичний апарат. Якщо при неточних посценарних значеннях ($X \in U_X$) ми маємо ще неточні сценарні ймовірності ($p_0 \in U_P$), то за співвідношеннями (3.6), (3.8)–(3.9) неважко представити робастні конструкції для $\rho^l(\cdot)$ та $\rho^u(\cdot)$:

$$\begin{aligned} \rho_{\rho_0; U_P}^l(X) &= \sup_{P \in Q(U_P)} \{E_P[X^l] : P \in Q(U_P)\}, \\ \rho_{\rho_0; U_P}^u(X) &= \sup_{P \in Q(U_P)} \{E_P[X^u] : P \in Q(U_P)\}. \end{aligned}$$

3.2. Зведення задач стохастичного програмування та робастної оптимізації до задач з ПКМР

В роботі [37] описувалося зведення широкого класу задач стохастичного програмування (СП) та робастної оптимізації (РО) до детермінованих оптимізаційних задач за допомогою апарату ПКМР. Нагадаємо звідти деякі факти.

Розглянемо задачу оптимізації, в якій присутня невизначеність у вигляді деякого випадкового параметру Y :

$$\begin{aligned} f_0(x, Y) &\rightarrow \min, \\ f_i(x, Y) &\leq 0, i = 1, \dots, m \\ x &\in M \subseteq R^k \end{aligned}$$

де множина M має просту структуру, а сенс символу “min” та нерівностей в обмеженнях в зв’язку з невизначеністю параметру Y уточнимо далі по тексту.

Отже, нехай маємо імовірнісний простір (Ω, Σ, P) , на якому задано імовірнісний розподіл параметру Y , тобто $Y(\cdot): \Omega \rightarrow R^s$, де s – розмірність параметру Y . Тоді для кожної з елементарних подій (сценаріїв) $\omega \in \Omega$ описане значення $f_i(x, Y(\omega)), i = 0, \dots, m$. Отже, при вимірності $f_i(x, Y(\omega)), i = 0, \dots, m$ задано їх розподіл. Оскільки значення $Y = Y(\omega)$ повністю визначається сценарієм ω , для скорочення позначень замість $f_i(x, Y(\omega))$ будемо писати $f_i(x, \omega)$.

У таких позначеннях описана раніше задача оптимізації має вигляд:

$$\begin{aligned} f_0(x, \omega) &\rightarrow "min", \\ f_i(x, \omega) &\leq 0, i = 1, \dots, m \\ x &\in M \subseteq R^k \end{aligned} \quad (3.10)$$

Тепер задачу (3.10) можна уточнити в залежності від розуміння ОПР, яка може обирати ті, чи інші стохастичні критерії для врахування значень функцій $f_i(x, \omega), i = 0, 1, \dots, m$. В СП “min” $f_0(x, \omega)$ та $f_i(x, \omega) \leq 0, i = 1, \dots, m$ можуть розумітися в сенсі, наприклад, середніх, найгірших, чи інших значень в.в., чи виконання обмежень гарантується з деякою ймовірністю [37]. В постановках задач РО в якості подібних критеріїв, як правило, використовуються найгірші значення в.в., хоча можливі й інші варіанти.

В [37] показано, що широкий клас задач СП та РО можна звести до наступної задачі детермінованої оптимізації з ПКМР:

$$\begin{aligned} \rho_0(f_0(x, \omega)) &\rightarrow \min, \\ \rho_i(f_i(x, \omega)) &\leq 0, i = 1, \dots, m \\ x &\in M \end{aligned} \quad (3.11)$$

де $\rho_i(\cdot), i = 0, \dots, m$ – ПКМР вигляду (3.2)–(3.5), які будуються по в.в. $f_i(x, \omega), i = 0, \dots, m$.

Відмітимо, що перехід від однієї постановки проблеми до іншої в задачі (3.11) досягається за рахунок використання відповідної ПКМР. Технічно це реалізується вибором матриці B_1 і вектору c_1 з (3.4), див. приклади П1)–П5).

У випадку неточних сценарних ймовірностей для оцінювання ризику можна скористатися робастними варіантами таких мір з прикладів П1')–П5'). Тоді міри $\rho_i(\cdot), i = 0, \dots, m$ в (3.11) розуміються в такому сенсі.

Задача (3.11) не є простою, це деяка мінімаксна постановка, де внутрішній максимум породжується конструкцією мір ризику. Якщо функції $f_i(x, \omega)$, $i = 0, \dots, m$ опуклі по x , вона є проблемою опуклого програмування і може бути розв'язана відповідними чисельними методами, див., наприклад, [39]. Проте пошук рішень значно спрощується, коли ці функції лінійні, тобто для задач лінійної оптимізації.

3.3. Задачі лінійної оптимізації та оптимізації портфелю при невизначеності

Припустимо, що в задачі (3.11) функції $f_i(x, \omega), i = 0, \dots, m$ лінійні по x , тобто $f_i(x, \omega) = \langle l_i(\omega), x \rangle - a_i(\omega), i = 0, \dots, m$, а множина M має просту структуру, наприклад, у вигляді опуклого багатокутника. В цьому випадку задача набуває наступного вигляду:

$$\begin{aligned} \rho_0(\langle l_0(\omega), x \rangle - a_0(\omega)) &\rightarrow \min. \\ \rho_i(\langle l_i(\omega), x \rangle - a_i(\omega)) &\leq 0, i = 1, \dots, m \\ x \in M &\subseteq R^k \end{aligned} \quad (3.12)$$

Якщо простір елементарних подій Ω описує скінченний дискретний розподіл, то вектори $l_i(\omega)$ і величини $a_i(\omega)$ при $i = 0, \dots, m$ розподілені по n сценаріях, і цей розподіл можна представити відповідними матрицями і векторами. Вводячи позначення:

$$L_i = \begin{pmatrix} l_{i1}(\omega_1) & \dots & l_{ik}(\omega_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ l_{i1}(\omega_n) & \dots & l_{ik}(\omega_n) \end{pmatrix}, \quad a_i = \begin{pmatrix} a_i(\omega_1) \\ \dots \\ a_i(\omega_n) \end{pmatrix}, \quad i = 0, \dots, m,$$

де $l_{ij}(\omega_k)$ – j -а компонента l_i -го вектору в сценарії ω_k , та враховуючи конструкцію ПКМР, перепишемо задачу (3.12) як

$$\begin{aligned} \max_p \{ \langle L_0 x - a_0, p \rangle : p \in Q_0 \} &\rightarrow \min_x, \\ \max_p \{ \langle L_i x - a_i, p \rangle : p \in Q_i \} &\leq 0, i = 1, \dots, m \\ x \in M &\subseteq R^k \end{aligned} \quad (3.13)$$

Нехай кожна з поліедральних множин $Q_i, i = 0, \dots, m$ представляється у вигляді

$$Q_i = \{p : B_i p \leq c_i, p \geq 0\}, i = 0, \dots, m,$$

з відповідними стандартними та змістовними частинами для B_i, c_i , $i = 0, \dots, m$ у вигляді B_i^0, c_i^0 і B_i^1, c_i^1 відповідно.

В таких позначеннях задача (3.13) має вигляд

$$\begin{aligned} \max_p \{ < L_0 x - a_0, p > : B_0 p \leq c_0, p \geq 0 \} \rightarrow \min_x, \\ \max_p \{ < L_i x - a_i, p > : B_i p \leq c_i, p \geq 0 \} \leq 0, i = 1, \dots, m \\ x \in M \subseteq R^k \end{aligned} \quad (3.14)$$

Як показано в [37], пошук рішення проблеми (3.14) зводиться до розв'язання відповідної задачі лінійного програмування (ЛП).

Теорема 3.1. Якщо задача (3.14) сумісна, то її оптимальним рішенням є компонента x рішення (v_0, \dots, v_m, x) наступної задачі ЛП:

$$\begin{aligned} \min_{(v_0, \dots, v_m, x)} & < c_0, v_0 >, \\ & - B_0^T v_0 + L_0 x \leq a_0 \\ & < c_i, v_i > \leq \delta_i, i = 1, \dots, m \\ & - B_i^T v_i + L_i x \leq a_i, i = 1, \dots, m \\ & x \in M, v_i \geq 0, i = 0, \dots, m \end{aligned} \quad (3.15)$$

а значення по функціях в рішеннях цих задач співпадають.

Підставляючи в (3.15) різні варіанти змістовних частин матриць та векторів, що представляють відповідні ПКМР, ми можемо технологічно розв'язувати задачі вигляду (3.12) як відповідні проблеми ЛП для всього класу ПКМР.

Оптимізація портфелю за співвідношенням винагорода-ризик. З представленої вище теореми слідують отримані раніше результати відносно оптимізації портфелів за співвідношенням винагорода-ризик. Наведемо деякі з них. Відмітимо, що зі змістовних міркувань для побудови ПКМР тут використовується конструкція (3.1), (3.3)–(3.5).

Нехай маємо k фінансових інструментів, що називаються компонентами портфелю, розподіл прибутковості яких описується матрицею H розмірності $n \times k$, де j -й стовпчик описує розподіл j -ї компоненти. Вектор $u = (u_1, \dots, u_k)$, що описує структуру портфелю, розглядається як змінна, де $\sum_1^k u_i = 1$, $u_i \geq 0$, $i = 1, \dots, k$. Необхідно

знайти таку структуру портфелю u , яка оптимізує його сукупний результат за співвідношенням прибутковості-ризик.

При відомих розподілах, крім матриці H розподілів прибутковості компонент по сценаріях, ми знаємо ще вектор сценарних ймовірностей p_0 . В таких умовах маємо дві пов'язані постановки задач: мінімізацію ПКМР портфелю при гарантованій середній прибутковості та максимізацію середньої прибутковості портфелю при обмеженнях на ПКМР.

Позначимо допустиме значення середньої прибутковості портфелю $E_{p_0}[Hu]$ як μ_0 , обрану ПКМР – як $\rho(Hu)$, допустиме значення ПКМР портфелю – як ρ_0 . Тоді ці задачі формуються відповідно у вигляді:

$$\begin{aligned} \min \quad & \rho(Hu). \\ \sum_{i=1}^n u_i = 1, u_i \geq 0 \\ E_{p_0}[Hu] \geq \mu_0 \end{aligned} \quad (3.16) \quad \begin{aligned} \max \quad & E_{p_0}[Hu]. \\ \sum_{i=1}^n u_i = 1, u_i \geq 0 \\ \rho(Hu) \leq \rho_0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Зведення таких проблем до задач ЛП можна сформулювати у вигляді наступної теореми.

Теорема 3.2 [31]. Якщо проблеми (3.16), (3.1), (3.3)–(3.5) та (3.17), (3.1), (3.3)–(3.5) сумісні, їх оптимальними портфелями є відповідно компоненти u рішень (v, u) наступних задач ЛП:

$$\begin{aligned} \min_{(v,u)} \quad & < c, v >, & \max_{(v,u)} \quad & < H^T p_0, u >, \\ -B^T v - Hu \leq 0 & & -B^T v - Hu \leq 0 & \\ -p_0^T Hu \leq -\mu & & < c, v > \leq \rho_0 & \\ \sum u_i = 1 & & \sum u_i = 1 & \\ v \geq 0, u \geq 0 & & v \geq 0, u \geq 0 & \end{aligned}$$

а значення в рішеннях по функціях цих задач відповідно співпадають.

Відмітимо, що подібний результат може бути сформульований й для задачі максимізації прибутковості портфелю типу (3.17) при обмеженнях на кілька ПКМР.

Випадок неточних сценарних ймовірностей. У цьому випадку по початковій мірі $\rho(\cdot)$ та множині невизначеності U_P у відповідності з (3.6) будуються робастні варіанти мір ризику $\rho_{\rho, U_P}(\cdot)$, а в якості робастного аналогу очікуваній прибутковості використовується наступна функція винагороди

$$r(X) = \min\{E_P[X] : P \in U_P\},$$

де U_P у випадку неточних ймовірностей представляється у формі простої поліедральної множини (3.7). Тоді маємо

$$r(X) = \min\{E_P[X] : P \in Q\},$$

де Q описується у формі (3.3) з наступними атрибутами:

$$B = \begin{pmatrix} -I \\ I \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} -p_l \\ p_u \end{pmatrix}.$$

Введемо позначення для матриць B і векторів c з опису поліедральних множин: B_r і c_r – для функції винагороди $r(\cdot)$; B_ρ і c_ρ – для робастних варіантів мір ризику $\rho_{\rho, U_P}(\cdot)$. В цих позначеннях робастні варіанти задач мінімізації ПКМР портфелю при гарантованому рівні винагороди r_0 і максимізації функції винагороди портфелю при обмеженнях на ПКМР рівнем ρ_0 , мають відповідно вигляд:

$$\begin{aligned} \min \quad & \rho_{\rho, U_P}(Hu) \\ \sum_{i=1}^n u_i &= 1, u_i \geq 0 \\ r(Hu) &\geq r_0 \end{aligned} \quad (3.18) \qquad \begin{aligned} \max \quad & r(Hu) \\ \sum_{i=1}^n u_i &= 1, u_i \geq 0 \\ \rho_{\rho, U_P}(Hu) &\leq \rho_0 \end{aligned}$$

(3.19)

Теорема 3.3 [33]. Якщо проблеми (3.18) і (3.19) сумісні, їх оптимальними портфелями є відповідно u компоненти рішень (v, u, w) наступних проблем ЛП

$$\begin{aligned} \min_{(v, u, w)} \quad & \langle c_\rho, v \rangle, \\ -B_r^T w - Hu &\leq 0 \\ -\langle c_r, w \rangle &\leq -r_0 \\ -B_\rho^T v - Hu &\leq 0 \\ \sum_{i=1}^n u_i &= 1, u \geq 0 \\ v &\geq 0, w \geq 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \max_{(v, u, w)} \quad & \langle -c_r, w \rangle, \\ -B_r^T w - Hu &\leq 0 \\ -B_\rho^T v - Hu &\leq 0 \\ \langle c_\rho, v \rangle &\leq \rho_0 \\ \sum_{i=1}^n u_i &= 1, u \geq 0 \\ v &\geq 0, w \geq 0 \end{aligned}$$

а значення в рішеннях по функціях цих задач відповідно співпадають.

Подібний результат можна сформулювати також для максимізації функції винагороди портфелю при обмеженнях на кілька ПКМР. При цьому зросте розмірність відповідної задачі ЛП, яка повинна враховувати всі такі обмеження.

3.4. Задачі оптимізації в умовах неточних посценарних оцінок

В умовах неточних посценарних оцінок в.в. ми можемо використовувати конструкції описаних в розділі 1 верхніх та нижніх варіантів ПКМР.

Розглянемо задачу (3.11), де в якості в правих частин обмежень замість 0 стоять деякі параметри δ_i :

$$\begin{aligned} \rho_0(f_0(x, \omega)) &\rightarrow \min, \\ \rho_i(f_i(x, \omega)) &\leq \delta_i, i = 1, \dots, m \\ x &\in M \end{aligned} \quad (3.20)$$

Зрозуміло, що використання в ній в якості $\rho(X)$ верхньої оцінки $\rho''(X)$ дозволить отримувати гарантовані результати для обмежень і значень критеріїв, що оптимізуються. Рішення такої задачі буде робастним відносно неточного посценарного оцінювання в.в., а адекватний вибір варіанту ПКМР в конструкції (3.2)–(3.5) забезпечить робастність рішення відносно невизначеності, зумовленої імовірнісним розподілом в.в.

Проте використання лише верхніх оцінок $\rho''(X)$ в якості ПКМР може приводити до занадто консервативних рішень. Для отримання більш збалансованих рішень необхідне врахування також нижніх оцінок $\rho'(X)$. Проте в цьому випадку ефективність рішень треба порівнювати по двох оцінках ПКМР, отже, в рамках багатокритеріального підходу будувати множину Парето-оптимальних рішень та обирати з них вдалі. Такий процес не є тривіальним.

Розглянемо використання обох оцінок $\rho'(X)$ та $\rho''(X)$ в задачі (3.20). Зрозуміло, що тепер вона має вигляд наступної двохкритеріальної задачі:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{l} \rho_0''(f_0(x, \omega)) \\ \rho_0'(f_0(x, \omega)) \end{array} \right) &\rightarrow \min, \\ \rho_i''(f_i(x, \omega)) &\leq \delta_i'', i = 1, \dots, m \\ \rho_i'(f_i(x, \omega)) &\leq \delta_i', i = 1, \dots, m \\ x &\in M \end{aligned} \quad (3.21)$$

а рішення треба обирати з її Парето-оптимальної множини. Відмітимо, що в такій постановці для параметрів обмежень очевидні умови: $0 \leq \delta_i' \leq \delta_i'', i = 1, \dots, m$.

Багатокритеріальна оптимізація забезпечує достатній набір прийомів вибору рішень з Парето-оптимальної множини, починаючи зі

згортання критеріїв. Розглянемо тут лише підхід оптимізації одного з критеріїв при обмеженнях на інші. Тоді, виходячи з (3.21), можемо сформулювати наступні дві задачі:

$$\begin{aligned}
 & \rho_0^u(f_0(x, \omega)) \rightarrow \min, & \rho_0^l(f_0(x, \omega)) \rightarrow \min. \\
 & \rho_i^u(f_i(x, \omega)) \leq \delta_i^u, i = 1, \dots, m & \rho_i^u(f_i(x, \omega)) \leq \delta_i^u, i = 0, \dots, m \\
 & \rho_i^l(f_i(x, \omega)) \leq \delta_i^l, i = 0, \dots, m & \rho_i^l(f_i(x, \omega)) \leq \delta_i^l, i = 1, \dots, m \\
 & x \in M & x \in M
 \end{aligned}
 \tag{3.22}$$

(3.23)

При лінійності по x функцій $f_i(x, \omega), i = 0, \dots, m$ ці проблеми можна звести до задач ЛП у формі, аналогічній теоремі 3.1. Звернемося до задачі (3.12):

$$\begin{aligned}
 & \rho_0(< l_0(\omega), x > -a_0(\omega)) \rightarrow \min. \\
 & \rho_i(< l_i(\omega), x > -a_i(\omega)) \leq \delta_i, i = 1, \dots, m \\
 & x \in M \subseteq R^k
 \end{aligned}$$

У випадку, коли в.в. $l_i(\omega)$ та $a_i(\omega)$ при $i = 0, \dots, m$, розподілені по n сценаріях $(\omega_1, \dots, \omega_n)$, можна лише оцінювати зверху та знизу величинами $l_i^u(\omega)$, $a_i^u(\omega)$ і $l_i^l(\omega)$, $a_i^l(\omega)$ відповідно, це оцінювання можна представити відповідними матрицями і векторами:

$$\begin{aligned}
 L_i^u &= \begin{pmatrix} l_{i1}^u(\omega_1) & \dots & l_{ik}^u(\omega_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ l_{i1}^u(\omega_n) & \dots & l_{ik}^u(\omega_n) \end{pmatrix}, a_i^u = \begin{pmatrix} a_i^u(\omega_1) \\ \dots \\ a_i^u(\omega_n) \end{pmatrix}, i = 0, \dots, m, \\
 L_i^l &= \begin{pmatrix} l_{i1}^l(\omega_1) & \dots & l_{ik}^l(\omega_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ l_{i1}^l(\omega_n) & \dots & l_{ik}^l(\omega_n) \end{pmatrix}, a_i^l = \begin{pmatrix} a_i^l(\omega_1) \\ \dots \\ a_i^l(\omega_n) \end{pmatrix}, i = 0, \dots, m.
 \end{aligned}$$

Враховуючи конструкцію ПКМР, перепишемо задачі (3.22), (3.23) відповідно як

$$\begin{aligned}
& \max \{ \langle L_0^u x - a_0^u, p \rangle : p \in Q_0 \} \rightarrow \min, \\
& \max \{ \langle L_i^u x - a_i^u, p \rangle : p \in Q_i \} \leq \delta_i^u, i = 1, \dots, m \\
& \max \{ \langle L_i^l x - a_i^l, p \rangle : p \in Q_i \} \leq \delta_i^l, i = 0, \dots, m \\
& x \in M \subseteq R^k
\end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned}
& \max \{ \langle L_0^l x - a_0^l, p \rangle : p \in Q_0 \} \rightarrow \min, \\
& \max \{ \langle L_i^l x - a_i^l, p \rangle : p \in Q_i \} \leq \delta_i^l, i = 1, \dots, m \\
& \max \{ \langle L_i^u x - a_i^u, p \rangle : p \in Q_i \} \leq \delta_i^u, i = 0, \dots, m \\
& x \in M \subseteq R^k
\end{aligned} \tag{3.25}$$

де $\delta_i^l \geq 0, i = 1, \dots, m, \delta_i^u \geq 0, i = 0, \dots, m$ – деякі фіксовані величини.

Аналогічно попередньому ці проблеми можуть бути зведені до відповідних задач ЛП. Нехай, як і раніше, кожна з поліедральних множин $Q_i, i = 0, \dots, m$ представлена відповідно своїми матрицею B_i і вектором c_i :

$$Q_i = \{p : B_i p \leq c_i, p \geq 0\}, i = 0, \dots, m.$$

Теорема 3.4. Якщо задачі (3.24) та (3.25) сумісні, їх оптимальними рішеннями є відповідно компоненти x рішень $(v_0^l, \dots, v_m^l, v_0^u, \dots, v_m^u, x)$ наступних задач ЛП:

$$\begin{aligned}
& \min_{(v_0^l, \dots, v_m^l, v_0^u, \dots, v_m^u, x)} < c_0, v_0^u >, \\
& -B_0^T v_0^u + L_0^u x \leq a_0^u \\
& < c_i, v_i^u > \leq \delta_i^u, i = 1, \dots, m \\
& -B_i^T v_i^u + L_i^u x \leq a_i^u, i = 1, \dots, m \\
& < c_i, v_i^l > \leq \delta_i^l, i = 0, \dots, m \\
& -B_i^T v_i^l + L_i^l x \leq a_i^l, i = 0, \dots, m \\
& x \in M, v_i^l \geq 0, v_i^u \geq 0, i = 0, \dots, m \\
& \min_{(v_0^l, \dots, v_m^l, v_0^u, \dots, v_m^u, x)} < c_0, v_0^l >, \\
& -B_0^T v_0^l + L_0^l x \leq a_0^l \\
& < c_i, v_i^l > \leq \delta_i^l, i = 1, \dots, m \\
& -B_i^T v_i^l + L_i^l x \leq a_i^l, i = 1, \dots, m \\
& < c_i, v_i^u > \leq \delta_i^u, i = 0, \dots, m \\
& -B_i^T v_i^u + L_i^u x \leq a_i^u, i = 0, \dots, m \\
& x \in M, v_i^l \geq 0, v_i^u \geq 0, i = 0, \dots, m
\end{aligned}$$

а значення по функціях в рішеннях цих задач співпадають.

Неважко також сформулювати результати аналогічні теоремі 3.3 щодо оптимізації портфелю за співвідношенням винагорода-ризик, використовуючи для цього відповідно верхні та нижні оцінки матриць розподілів прибутковості компонент, мір ризику та функцій винагороди.

Отже, апарат ПКМР розповсюджено на широкий клас невизначеностей, що дозволяє використовувати його при: 1) відомих ймовірнісних розподілах в.в.; 2) неточних посценарних ймовірностях; 3) неточних посценарних значеннях в.в.; 4) комбінаціях неточних ймовірностей та неточних посценарних значень.

Розвиток апарату мір ризику орієнтований на оцінювання ризику для побудови ефективних (оптимальних) рішень в умовах невизначеності і дає можливість запропонувати єдиний підхід до розв'язання задач СП та РО. У випадку неточних посценарних ймовірностей використовуються так звані робастні варіанти мір ризику та функцій виграшу, за співвідношенням яких шукається оптимальне рішення. У випадку неточних посценарних оцінок використовуються верхні і нижні варіанти мір ризику та функцій винагороди, які потребують пошуку відповідних Парето-оптимальних рішень. У випадку комбінації неточних ймовірностей та неточних оцінок

необхідно шукати подібні Парето-оптимальні рішення, але для робастних варіантів мір ризику та функцій винагороди.

Розвиток апарату ПКМР дозволяє узагальнити попередньо відомі теореми щодо зведення задач лінійної оптимізації при невизначеності та задач оптимізації портфелю за співвідношенням винагорода-ризик до відповідних задач лінійного програмування. Це дає можливість розв'язувати ці проблеми навіть при великих розмірностях застосуванням стандартної техніки ЛП.

4. ДВОЕТАПНА ТА ДВОРІВНЕВА МОДЕЛІ ЕКОЛОГО-ЕКОНОМІЧНИХ РІШЕНЬ

Розробка й обґрунтування програм страхування з урахуванням катастрофічних ризиків залишаються актуальними для прийняття еколого-економічних рішень. Через кліматичні зміни та зростання ризиків повеней у світі стає актуальною добре продумана програма страхування та менеджменту ризику паводків, що залучає різних заінтересованих осіб (сторін, агентів). Основний виклик – це придатність стандартних підходів до розрахунків страхових премій рідких катастрофічних втрат [40, 41]. Мета – спроектувати програму розподілу повеневих втрат, яка включає приватне страхування, основане на географічно специфічних вразливостях [42]. Аналіз ґрунтується на розробленій інтегрованій моделі менеджменту катастрофічних ризиків (integrated catastrophe risk management, ICRM), яка складається з GIS-моделі паводків і стохастичної процедури оптимізації за географічно специфічними вразливостями. Для досягнення стійкості й робастності програми страхування до повеней з різними рецидивами модель ICRM використовує процедуру стохастичної оптимізації, основану на залежних від квантилів функціях ризику системної неспроможності, які враховують надмірність і недостатність платежів заінтересованих осіб. Порівняємо два альтернативні способи розрахунку страхових премій – оснований на моделі ICRM робастний спосіб і традиційний підхід середньорічних втрат (average annual loss, AAL).

Страхування від повеней вважається нагальним елементом політики Flood Risk Management (FRM). Добре продумана програма страхування від повеней має: розповсюджувати ризики поміж учасників, місцевостей і періодів часу, гарантуючи наявність коштів для покриття втрат [43]; підвищувати громадську обізнаність про ризики повеней [44]; часто пропонувати цінові знижки; сприяти заходам пом'якшення збитків [45]; поліпшувати ефективність використання цінної землі [46].

Багаторівнева програма страхування від лих (multi-layer disaster insurance program, MLDIP) у формі державно-приватного партнерства (public-private partnership, PPP) [47, 48] може включати рівень приватного страхування, рівень передачі ризику через перестрахування та/або катастрофічні облігації й кредити, рівень урядових внесків. MLDIP вимагає аналізу взаємозалежних чутливостей до ризику залучених заінтересованих осіб. Наприклад, коли страховик бажає знижувати ймовірність свого банкрутства, то може вводити вищі премії або звужувати покриття, перестраховуватися чи купувати катастрофічні облігації. Тоді тягар втрат зсуватиметься від страховика до інших заінтересованих осіб (індивідуумів, компаній перестрахування, урядових організацій), що при високій нерівності розподілу витрат може вести до нестійкості чи неспроможності цих осіб. Таким чином, успіх програм поділу втрат залежить від взаємної (системної) стійкості залучених неоднорідних заінтересованих осіб. Така стійкість потребує аналізу складних розподілів спільної ймовірності втрат, залежних від різних агентів і небезпек, притаманних даному регіону.

Моделі катастроф складаються з кількох модулів – генератора небезпек, модуля вразливості та модуля фінансування. При розробці інструментарію моделей катастрофічних для конкретних регіонів повеней використовуються насичені просторові дані та оцінюються страхові премії, виходячи не лише з історичних спостережень, але й різних соціо-економічних і кліматичних сценаріїв [44]. Однак у багатьох таких моделях ціноутворення катастрофічного ризику базується на AAL без явного врахування цілей та обмежень залучених заінтересованих осіб. Вага ризику часто виражається через стандартне відхилення та навантаження адміністративних витрат чи просто через AAL, що може вводити в оману без урахування скошеності катастрофічних ризиків і просторової залежності витрат від стратегій. Лише стандартне відхилення й середнє не можуть слугувати прийнятними індикаторами ціноутворення катастрофічних ризиків, бо характеризують нормальні ризики і не охоплюють специфіку розподілів катастрофічних втрат з повільно спадаючими хвостами (heavy-tailed). Навпаки, такі залежні від квантилів індикатори, як вартість за ризик (Value-at-Risk, VaR) та умовна вартість за ризик (Conditional Value-at-Risk, CVaR) [24], знаходять застосування у визначенні стратегій страхування від катастроф [49]. Виходячи із загальної моделі ICRM [49–51], яку розробив Міжнародний інститут прикладного системного аналізу (International Institute for Applied Systems Analysis, IIASA), і поєднуючи залежні від квантилів функції

ризиків та процедури стохастичної оптимізації (stochastic optimization, StO) [47, 49, 52], було побудовано географічно насичену модель ICRM, що дозволяє коректно охоплювати просторово-часові профілі катастрофічних ризиків для проектування робастного страхування і брати до уваги цілі заінтересованих осіб (учасників).

Ціль роботи [42] – розробити оснований на ICRM підхід для оцінювання залежних від розміщення робастних стратегій страхування і порівняти знайдені стратегії з традиційним ціноутворенням AAL в районі Рійнмонд-Дрехтстеден (Rijnmond- Drechtsteden, RiD) біля Роттердама (Нідерланди) за межами дамб. Поєднуючи модель HIS-SSM (Highwater Information System – Damage and Casualties Module) і процедуру стохастичної оптимізації, для цього будується модель ICRM конкретного району з місцевостей за межами основної протиповеневої системи (тобто за межами дамбових укріплень), яким загрожують повені, щоб генерувати сценарії повеневих втрат і вимірювати робастні страхові премії. До недавніх пір у Нідерландах не існувало страхування від річкових і прибережних повеней, залишаючи програму відновлення після лиха єдиним фінансовим інструментом FRM. Таке страхування одні вважали неможливим, а інші – можливим при різних схемах перестраховування. Наприкінці 2012 р. для захищених дамбами районів з'явилися перші контракти страхування від повеней. Дослідження системи страхування від повеней у Нідерландах, в основному, торкалися ризиків повеней у межах дамб.

На простому прикладі можна показати оманливість наслідків стратегії використання AAL для оцінки колективних збитків. Альтернативна стратегія спирається на квантілі. Остання застосовується у загальній мультиагентній явній просторовій моделі ICRM для даного регіону. Ця модель включає негладкі стохастичні функції ризику, дозволяючи досягати робастної системної спроможності у формі ймовірнісної рівноваги між пропозицією страхування і попитом на страхування. У ситуації єдиного агрегованого страховика (фонду на катастрофи) та єдиного агрегованого страхувальника (даного регіону) ця рівновага зводиться до залежних від квантилів обмежень типу VaR. Авжеж, потрібні докладні дані про даний регіон. На чисельних експериментах видно, як модель ICRM дозволяє проектувати робастну програму поділу повеневих втрат у регіоні RiD шляхом оцінювання ризиків у страхуванні від повеней, виходячи із залежних від місцевостей премій, враховуючи також потенційну передачу ризику через умовний кредит на уникнення ризику, і з часткових компенсацій урядом. Порівняно з AAL, робастні залежні від місцевостей компенсації підвищують

стійкість страхування і знижують попит на інші заходи передачі ризику. Долучення уряду й запровадження кредиту збільшує попит на страхування, допомагає задовольняти необхідні зобов'язання й уникати неплатоспроможності.

Катастрофічні втрати піддають сумніву придатність стандартних підходів, що використовують актуарно справедливі премії (очікувані втрати). Якщо катастрофи стаються лавиноподібно у часі й просторі, то їхніми робастними індикаторами колективних незалежних втрат не є середні значення і стандартні відхилення, бо середні втрати не вирізняють випадку катастрофічних колективних втрат.

Аналіз страхової спроможності при взаємозалежних місцевих катастрофічних втратах вимагає розробки моделі ICRM і методів StO, які дозволяють імітувати колективні збитки для проектування робастного портфеля покриттів і премій. Цей портфель створює системну спроможність, яка, в імовірнісному сенсі, запобігає недоборам страховиків і переплатам від місцевих громад.

У стохастичній явній просторовій моделі ICRM [47, 50, 51] досліджуваний регіон Нідерландів поділяється на підрегіони чи місцевості $j = 1, \dots, m$. Місцевості може відповідати захищений дамбами район, набір домогосподарств, муніципалітет, захищена від повеней зона тощо. Нехай у період часу t вартість майна (будинків, земель, фабрик тощо) чи багатства (wealth) місцевості j оцінюється W_j^t .

Припустимо, у програму поділу втрат залучені n агентів (страховиків, урядових установ, фондів), які можуть укладати контракти з місцевими громадами для покриття їхніх потенційних втрат. Кожний агент $i = 1, \dots, n$ має початковий фонд R_i^0 (резерв ризику), який, у загальному випадку, залежить від осяжності катастрофічних подій. Нехай горизонт планування охоплює періоди часу $t = 0, 1, \dots$. Резерв ризику у кожний період часу $(t + 1)$ дорівнює

$$R_i^{t+1} = R_i^t + \sum_{j=1}^m [\pi_{ij}^t - c_{ij}^t(q_{ij}^t)] - \sum_{j=1}^m L_j(\omega_t) q_{ij}^t, \quad (4.1)$$

де: q_{ij}^t – (частка) покриття агентом (страховою компанією) i у місцевості j у період часу t ; $\sum_{i=1}^n q_{ij}^t < 1$; π_{ij}^t – премія агента (страхової компанії) i у місцевості j у період часу t ; $c_{ij}^t(q_{ij}^t)$ –

трансакційні, адміністративні, експлуатаційні та інші видатки агента i у місцевості j у період часу t ; $L_j^t(\omega_t)$ – втрати (збитки) у місцевості j , спричинені катастрофою ω_t у період часу t ; $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{t-1})$ – випадкові катастрофічні події, які можуть трапитися у випадковій кількості різних місцевостей. Загалом катастрофічна подія ω_t у період часу t моделюється випадковою підмножиною місцевостей, а також величинами впливу цієї події на кожну таку місцевість. Втрати $L_j^t(\omega_t)$ залежать від події ω_t , заходів пом'якшення (скажімо, протиповеневих дамб) і вразливості цінності майна до такої події у місцевості j .

Змінні рішень q_{ij}^t та π_{ij}^t дозволяють характеризувати відмінності за ризиками у різних місцевостях. Припускається, що всі агенти можуть покривати різні частки катастрофічних втрат у даній місцевості. У випадку катастрофи місцевість j зазнає втрат $L_j^t(\omega_t)$. Індивідууми цієї місцевості отримують компенсацію $L_j^t(\omega_t) \times q_{ij}^t$ від компанії i , коли настають такі втрати, і платять страхові премії π_{ij}^t . Вартість майна місцевості j у період часу $(t+1)$ визначається рекуррентно:

$$W_i^{t+1} = W_i^t + \sum_{j=1}^m [L_j^t(\omega_t) \times q_{ij}^t - \pi_{ij}^t] - L_i^t(\omega_t). \quad (4.2)$$

Зазначимо, що у формулах (4.1), (4.2) випадкові змінні $R_i^t = R_i^t(x, \omega)$, $W_j^t = W_j^t(x, \omega)$ неявно залежать від передісторії – випадкової події ω_k та змінних рішень $x^k = (q^k, \pi^k)$, де: $q^k = \{q_{ij}^k, i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, m\}$; $\pi^k = \{\pi_{ij}^k, i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, m\}$; $k=0, 1, \dots, t-1$.

Робастність програми страхування визначається тим, чи накопичений резерв ризику $R_i^t(x, \omega)$ у випадковий період часу $t = \tau(\omega)$ першої катастрофічної події (звідки $L_j^t(\omega_t) = 0$ при $t < \tau(\omega)$) унікає, в імовірнісному сенсі, неспроможності всіх агентів, тобто визначається подією (event)

$$e_1 = \{\omega : R_i^{\tau(\omega)}(x, \omega) \leq 0, i = 1, \dots, n\}. \quad (4.3)$$

Інтерес кожного індивідуума (місцевості) $j = 1, \dots, m$ полягає у тому, щоб уникати знецінення свого майна, тобто події $e_{2j} = \{\omega : W_j^{\tau(\omega)}(x, \omega) \leq 0\}$. Робастність програми страхування передбачає уникнення об'єднання подій

$$e_2 = e_{21} \cup e_{22} \cup \dots \cup e_{2m} = \{\omega : W_j^{\tau(\omega)}(x, \omega) \leq 0\}, \quad j = 1, \dots, m. \quad (4.4)$$

Від подій (4.3), (4.4) залежить стійкість (здатність до відновлення) програми страхування у сенсі системної спроможності. Мета програми – уникати таких подій настільки, наскільки це можливо. Досягати цієї мети можна, наприклад, мінімізуючи очікувані (expected) непокриті втрати

$$E \sum_{j=1}^m (1 - q_j) L_j^{\tau(\omega)} \quad (4.5)$$

при обмеженні ймовірності (probability)

$$P(e_1 \vee e_2) \leq \bar{p}, \quad (4.6)$$

де \bar{p} – критичний поріг ймовірності для системної неспроможності (системного провалу чи дефолту) програми страхування, яка може трапитися, скажімо, лише раз у століття. Позначення $P(e_1 \vee e_2)$ використовується для ймовірності спроможності як деякої функції від подій e_1, e_2 .

Загальний підхід можна конкретизувати, щоб охоплювати особливості наявних даних, які імітуються модулями регіональної стохастичної моделі ICRM через сценарії повеней і збитків у регіоні RiD. Основа мета конкретного прикладу – порівняти вплив залежних від місцевостей премій, які визначаються регіональною моделлю ICRM, і премій, які визначаються традиційним підходом AAL. У цьому прикладі припускаємо, що в регіоні діє лише один агрегований страховик (фонд катастрофи), тобто $n=1$. Також припускаємо, що $c_{ij}^t(q_{ij}^t) \equiv 0$, а накопичені до першої повені премії пропорційні часу $\tau(\omega)$ її настання: $\pi_j^{\tau(\omega)} = \pi_j \times \tau(\omega)$, де π_j – страхова премія, яку платить місцевість j .

Програма страхування від повеней є системно спроможною, якщо дозволяє уникати подій (4.3), (4.4), наскільки це можливо в

імовірнісному сенсі. Беручи до уваги припущення і формулу (4.1), подію (4.3) перепишемо як

$$e_1 = \left\{ \omega : C(\pi, q, \omega) \equiv \sum_{j=1}^m [\pi_j \tau(\omega) - q_j L_j^{\tau(\omega)}] \leq 0 \right\}; \quad (4.7)$$

враховуючи також формулу (4.2), подію (4.4) перепишемо як

$$e_2 = \left\{ \omega : D_j(\pi_j, q_j, \omega) \equiv q_j L_j^{\tau(\omega)} - \pi_j \tau(\omega) \leq 0 \right\}, \quad j = 1, \dots, m; \quad (4.8)$$

тут q_j – страхове покриття для місцевості j , а $L_j^{\tau(\omega)}$ – стохастичні втрати місцевості j , спричинені настанням випадкових повеней, $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_m), q = (q_1, \dots, q_m)$.

Виходячи із загальної структури моделі ICRM, сформулюємо її у варіанті опуклої стохастичної оптимізації функції штрафу – мінімізації функції (4.5) плюс зважені функції ризику порушення обмежень (4.7), (4.8)

$$F(x) = E \sum_{j=1}^m (1 - q_j) L_j^{\tau(\omega)} + \alpha E \max \{0, -C(\pi, q, \omega)\} + \\ + \sum_{j=1}^m \beta_j E \max \{0, -D_j(\pi_j, q_j, \omega)\}, \quad (4.9)$$

де $x = (\pi, q)$ – вектор рішень, $0 \leq \alpha$ – штраф за порушення обмеження (4.7), $0 \leq \beta_j$ – штрафний параметр за порушення обмеження $j = 1, \dots, m$ групи (4.8), $\alpha E \max \{0, -C(\pi, q, \omega)\}$ – зважений очікуваний недобір програми страхування, $\sum_{j=1}^m \beta_j E \max \{0, -D_j(\pi_j, q_j, \omega)\}$ – сума зважених переоплат страхувальників.

Врахування обмежень (4.7), (4.8) у цільовій функції (4.9) через функції ризику створює сили, які зменшують до 0 абсолютні величини розходжень $C(\pi, q, \omega)$, $D_j(\pi_j, q_j, \omega)$, $j = 1, \dots, m$. Отже, мінімізація суми (4.9) дозволяє агрегувати систему страхування чи фонд катастрофи до деякої негладкої цільової функції [53].

Мінімізація по x функції $F(x)$ рівносильна максимізації по x функції

$$-F(x) = E \sum_{j=1}^m (q_j - 1) L_j^{\tau(\omega)} - \alpha E \max \{0, -C(\pi, q, \omega)\} - \\ - \sum_{j=1}^m \beta_j E \max \{0, -D_j(\pi_j, q_j, \omega)\}.$$

Звідси, беручи до уваги незалежність $E \sum_{j=1}^m L_j^{\tau(\omega)}$ від x та

$$E \sum_{j=1}^m (1 - q_j) L_j^{\tau(\omega)} = E \sum_{j=1}^m q_j L_j^{\tau(\omega)} - E \sum_{j=1}^m L_j^{\tau(\omega)},$$

приходимо до задачі максимізації по x функції

$$G(x) \equiv E \sum_{j=1}^m q_j L_j^{\tau(\omega)} - \alpha E \max \{0, -C(\pi, q, \omega)\} - \\ - \sum_{j=1}^m \beta_j E \max \{0, -D_j(\pi_j, q_j, \omega)\},$$

де зростання $E \sum_{j=1}^m q_j L_j^{\tau(\omega)}$ означає збільшення прибутку страховиків, а

зростання $-\alpha E \max \{0, -C(\pi, q, \omega)\}$ та $-\sum_{j=1}^m \beta_j E \max \{0, -D_j(\pi_j, q_j, \omega)\}$ означає зменшення недоборів

страховиків і переplat індивідуумів, що сприяє попиту на страхування, страховим покриттям, доходам і компенсаціям страхувальників. Таким чином, зростання $G(x)$ можна інтерпретувати як зростання регіонального добробуту всіх учасників з урахуванням ризиків. Значення x у програмі розподілу повнених втрат може вибиратися урядом.

Штрафні коефіцієнти α та β_j регулюють компроміс між рівнем премій і загальними покриттями. Коефіцієнт α можна також вважати ціною кредиту, який програма страхування (фонд катастрофи) купуватиме при зменшенні його резерву нижче певного критичного рівня. У багаторівневій програмі страхування вибір α визначає ступінь участі уряду у PPP, тобто величину внеску уряду у дану страхову програму. Коефіцієнти β_j забезпечують бажані верхні межі переplat індивідуумів з боку попиту даної програми.

Мінімізація функції (4.9) дозволяє досягати робастної імовірнісної рівноваги між попитом і пропозицією страхування, яка характеризується квантильними обмеженнями системної неспроможності типу (4.6). Покажемо цей важливий факт, припускаючи, що опукла функція (4.9) має неперервні похідні (скажімо, розглядувана функція розподілу має неперервну функцію щільності), і уникаючи ускладнень, пов'язаних з негладким аналізом. Тоді, припускаючи також додатність $\tau(\omega)$, умова оптимальності $\text{grad } F(x) = \vec{0}$ задачі мінімізації функції (4.9) при даному векторі покриттів q для додатних компонентів премії за ризик $\pi_j(q)$ має форму рівноваги системного ризику [54]:

$$0 = F_{x_j} = -\alpha P\{-C(\pi, q, \omega) \leq 0\} + \beta_j P\{-D_j(\pi_j, q_j, \omega) \leq 0\}. \quad (4.10)$$

Якщо $q_j = q_0$, $\pi_j = \pi_0$, $m = 1$, то в силу співвідношення (4.7) маємо

$$e_1 = \left\{ \omega : 0 \geq C(\pi, q, \omega) \equiv \sum_{j=1}^m [\pi_j \tau(\omega) - q_j L_j^{\tau(\omega)}] = \pi_0 \tau(\omega) - q_0 L_1^{\tau(\omega)} \right\}$$

,

а в силу співвідношення (4.8) –

$$e_2 = \left\{ \omega : 0 \geq D_j(\pi_j, q_j, \omega) \equiv q_j L_j^{\tau(\omega)} - \pi_j \tau(\omega) = q_0 L_j^{\tau(\omega)} - \pi_0 \tau(\omega) \right\}$$

,

$$j = 1.$$

Тоді обмеження (4.6) задовольняється лише при $\bar{p} = 1$ (вироджується), тобто

$$P(e_1) = 1 - P(e_2),$$

а рівняння (4.10) задає рівноважну ціну $\pi(q)$ для даного покриття q :

$$0 = -\alpha P(e_1) + \beta_j [1 - P(e_1)]; \quad (\alpha + \beta_j) P(e_1) = \beta_j;$$

$$P\{\pi \tau(\omega) \leq q L_j^{\tau(\omega)}\} = P(e_1) = \frac{\beta_j}{\alpha + \beta_j}.$$

Таким чином, параметри α , β_j та покриття q впливають на ймовірність $P(e_1)$ неспроможності страхувальників. Щоб дослідити цей вплив, безумовну задачу StO (4.9) з негладкими функціями штрафу за ризик перепишемо як задачу лінійного програмування з обмеженнями. Для цього до стратегічних змінних рішення ex ante π_j , q_j додамо нові адаптивні змінні ex post ζ_j^s та ε^s , значення яких обираються після спостереження стохастичних втрат $L_j^{\tau(\omega)}$, – (невід’ємні) величини кредитів та урядової допомоги відповідно, де $s = 1, \dots, S$ – випадкові сценарії [55]. Нові змінні дозволятимуть усувати переплати страхувальників і недобори страховиків, сприяючи системній спроможності програми страхування від повеней.

Нехай сценарій s задає втрати $L_j^s = L_j^t(\omega^s)$ для $t = \tau(\omega^s) = \tau^s$ у місцевостях $j = 1, \dots, m$ з ймовірністю p_s . Тоді задача (4.9) рівносильна задачі мінімізації по $y = (\pi_j, q_j, \zeta_j^s, \varepsilon^s)$ функції

$$F(y) = \sum_{s=1}^S p_s \sum_{j=1}^m (1 - q_j) L_j^s + \alpha \sum_{s=1}^S p_s \sum_{j=1}^m \zeta_j^s + \beta \sum_{s=1}^S p_s \varepsilon^s$$

при обмеженнях

$$\zeta_j^s \geq 0, \varepsilon^s \geq 0, s = 1, \dots, S,$$

$$-d_j^s \equiv \pi_j \tau^s - q_j L_j^s \geq \zeta_j^s,$$

$$\sum_{j=1}^m d_j^s \geq \varepsilon^s.$$

Для отриманої задачі наявні ефективні засоби розв’язання.

Задача централізованого плановика не бере до уваги можливості децентралізованого прийняття рішень [56] або ефекти морального ризику [57], коли поведінка страхувальника (покупця страховки; insurance buyer, IB) змінюється внаслідок отримання ним інформації про страхове покриття за контрактом зі страховиком (продавцем страховки, страховою компанією; insurance company, IC). Моральний ризик означає, що після підписання такого контракту IC має враховувати більшу ймовірність збитків, а також платити вищу страхову допомогу при настанні страхового випадку. Це спричинює не

лише очікувані втрати, але й збільшує адміністративні видатки та ризикові навантаження, руйнуючи конкурентоздатність ІС. Тоді за недосконалої класифікації ризиків ІС стягує вищу ціну за страхування з клієнтів, які характеризуються нижчим моральним ризиком, і змушує їх переходити до конкурента.

Це створює для ІС стимул до управління ефектами морального ризику з погляду лідера при укладанні контракту [58]. Мета управління – визначити оптимальну функцію платежу з точки зору ІС, щоб забезпечити дії послідовника (ІВ) в інтересах ІС настільки, наскільки це можливо в рамках існуючих каналів розподілу вигравшів. Функція платежу вказує, як страхова допомога залежить від функції збитків. Повне покриття збитків означає, що запобіжні зусилля ІВ зовсім не фінансуються. На відміну від оптимальної функції платежу за відсутності морального ризику, за присутності морального ризику не є оптимальним забезпечувати повне граничне покриття понад страхове відрахування, не враховуючи інших вигравшів від запобігання страхового випадку (скажімо, вигравшів кращого здоров'я), коли витрати ІВ на це запобігання дуже низькі [58].

Хоча зазвичай припускають, що ІС зовсім не може спостерігати запобіжні зусилля ІВ, не варто стверджувати, що управління ефектами морального ризику не може бути частиною технології страхування. Наприклад, у комерційному страхуванні ІС дійсно інспектують протипожежні заходи доволі ретельно; що стосується компенсацій працівникам, ІС часто зберігає право перевіряти стан здоров'я бенефіціара (страхувальника) шляхом відвідування його вдома. ІС може також перевіряти, чи ІВ дотримувався належної обачності (*duty of diligence*), як застережено полісом, причому недотримання належної обачності дозволяє ІС скорочувати чи скасовувати страхову допомогу. Авжеж, подібна діяльність ІС є досить витратною. Тому ІС перевірятиме на моральний ризик не у 100 % випадків, а вибиратиме оптимальну ймовірність такої перевірки.

На мові теорії ігор ІС та ІВ є гравцями, де змінна рішення ІС – це ймовірність k , з якою страховик здійснює інспекцію, а змінна рішення ІВ – це ймовірність ρ , з якою страхувальник не здійснює запобіжні заходи [59]. Наприклад, ІС може перевіряти, чи утримуються вогнегасники так, як застережено контрактом; у випадку страхування здоров'я лікар, уповноважений від ІС, може перевіряти, чи належним чином застосовується лікування. Коли ІС здійснює інспекцію, то зазнає витрат b на моніторинг контракту. Якщо ІВ здійснює запобіжні заходи, то зазнає витрат V й отримує середню допомогу EL (рівну очікуваним витратам (*expected loss*) для ІС у такій ситуації,

припускаючи повне страхове покриття); якщо ІВ не здійснює запобіжні заходи, то дістає середній виграш EL_0 (рівний очікуваним витратам для ІС у такій ситуації, припускаючи повне страхове покриття), але тоді у випадку інспекції ІС знижує страхову допомогу на Q принаймні для одного періоду часу (очевидно, $EL_0 > EL$). У всіх випадках ІВ платить страхову премію (premium) P для ІС. Загальні виграші ІС та ІВ для можливих комбінацій їхніх змішаних стратегій можна виписати таблично:

		ІС	
		Відсутність інспекції	Інспекція з ймовірністю k
ІВ	Запобіжні заходи з ймовірністю $(1 - \rho)$	ІВ: $EL - P - V$ ІС: $P - EL$	ІВ: $EL - P - V$ ІС: $P - EL - b$
	Відсутність запобіжних заходів	ІВ: $EL_0 - P$ ІС: $P - EL_0$	ІВ: $EL_0 - P - Q$ ІС: $P - EL_0 - b + Q$

Обидва гравці вважаються нейтральними до ризику зміни свого виграшу, що не завжди має місце для покупців страховки. Це припущення дозволяє виражати виграші через гроші, не звертаючись до функції корисності. Оскільки така взаємодія між ІС та ІВ може повторюватися, то ймовірності k та ρ інтерпретуються як відносні частоти.

Отже, сподіваний (expected) загальний виграш для ІВ становить

$$\begin{aligned}
 EW^{IB} &= (1-k)(1-\rho)(EL - P - V) + \\
 &+ k(1-\rho)(EL - P - V) + \\
 &+ (1-k)\rho(EL_0 - P) + \\
 &+ k\rho(EL_0 - P - Q) = \\
 &= (1-\rho)(EL - P - V) + \rho(EL_0 - P) - k\rho Q = \\
 &= EL + \rho(EL_0 - EL) - P - (1-\rho)V - k\rho Q, \quad (4.11)
 \end{aligned}$$

а сподіваний загальний виграш для ІС дорівнює

$$\begin{aligned}
 EW^{IC} &= (1-k)(1-\rho)(P - EL) + \\
 &+ k(1-\rho)(P - EL - b) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (1-k)\rho(P-EL_0) + \\
& + k\rho(P-EL_0-b+Q) = \\
& = (1-\rho)(P-EL) - k(1-\rho)b + \rho(P-EL_0) + k\rho(Q-b) = \\
& = P - \rho(EL_0 - EL) - EL + k(\rho Q - b). \quad (4.12)
\end{aligned}$$

Нехай взаємодія між ІС та ІВ є некооперативною, тобто ІС та ІВ не можуть обмінюватися інформацією, намагаючись добитися кращого результату для кожного. Це означає, що ІС при виборі частоти k має брати до уваги оптимізаційну поведінку ІВ, яка задається умовою оптимальності

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial EW^{IB}}{\partial \rho} = -(1-k)(EL - P - V) - \\
& - k(EL - P - V) + \\
& + (1-k)(EL_0 - P) + \\
& + k(EL_0 - P - Q) = \\
& = P + V - EL + EL_0 - P - kQ = V - kQ + EL_0 - EL, \\
& k = \frac{V + EL_0 - EL}{Q}. \quad (4.13)
\end{aligned}$$

У свою чергу, оптимізаційна поведінка ІС задається умовою оптимальності

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial EW^{IC}}{\partial k} = -(1-\rho)(P - EL) + \\
& + (1-\rho)(P - EL - b) - \\
& - \rho(P - EL_0) + \\
& + \rho(P - EL_0 - b + Q) = \\
& = -b(1-\rho) + \rho(Q - b) = -b + \rho b + \rho Q - \rho b = \rho Q - b, \\
& \rho = \frac{b}{Q}. \quad (4.14)
\end{aligned}$$

Пара значень (k, ρ) , що визначаються рівняннями (4.13) та (4.14), задає рівновагу Неша у змішаних стратегіях. В обох рівняннях є спільна змінна

$$Q = \frac{b}{\rho} = \frac{V + EL_0 - EL}{k}.$$

Оскільки k, ρ – це ймовірності, то з рівнянь (4.13) та (4.14) випливає нерівність

$$Q \geq \max\{b; V + EL_0 - EL\}.$$

Якщо допускати невід’ємність загального сподіваного виграшу ІС, тобто

$$0 \leq EW^{IC} = P - \rho(EL_0 - EL) - EL + k(\rho Q - b), \quad (4.15)$$

користуючись рівністю (4.12), то в силу рівняння (4.14) маємо

$$P \geq \rho(EL_0 - EL) + EL = \frac{b}{Q}(EL_0 - EL) + EL.$$

Звернімо увагу, що в силу рівностей (4.11) і (4.12) сумарний загальний сподіваний виграш ІС та ІВ у моделі [60] є від’ємним:

$$EW^{IC} + EW^{IB} = -kb - (1 - \rho)V < 0.$$

За нерівності (4.15) останнє означає $EW^{IB} < 0$, або порушення обмеження стимулу до участі у страхуванні з боку попиту [61].

Таким чином, є можливості страхування шляхом явної імітації балансів попиту і пропозиції страхування. Робастний баланс істотно залежить від вибору покриттів і премій, створюючи спроможність страховиків виживати під час страхових випадків і готовність індивідуумів платити премії. Щоб знайти робастні рішення, використовуються такі функції ризику, як переплати індивідуумів і недобори страховиків. Такі рішення є розв’язками двоетапної задачі стохастичної оптимізації, яка при певних припущеннях зводиться до стандартної задачі лінійного програмування. Також є теоретичні можливості укладення взаємовигідних двосторонніх страхових контрактів, які на практиці конкурують з іншими активами [62].

ВИСНОВКИ

Світ стоїть на порозі глобальної трансформації свого порядку. За своїм масштабом, об'ємом та складністю це перетворення, як вважають більшість експертів, буде не схоже на все, що людство зазнавало раніше [1]. Воно буде здійснюватися в принципово нових умовах, пов'язаних з глобалізацією та зростаючою невизначеністю. Зміна фундаментальних характеристик просторово-временного континуума, генерує поля нових ризиків, веде до більш непередбачуваного світу, збільшує ступінь глобальних мегазагроз (екологічних, атомних, хімічних, генетичних, ментальних) та і можливого збитку від них. Більш того революція у комунікаційному просторі, необхідність швидкого реагування на зміни та зростаюча роль психологічних факторів у процесі прийняття рішень в умовах зростаючої невизначеності так же деформують простір безпеки.

Нові загрози потребують створення нових методів для їх оцінки. Головною метою даної роботи був подальший розвиток методів моделювання для посилення можливостей дослідження у такої сфері як вплив глобальних змін на взаємозв'язок ПЕВР, в умовах коли стандартні методи та інструменти дослідження стають неадекватними.

У статті створені математичні моделі для прогнозування динаміки взаємозв'язку ПЕВР та аналізу ризику в рослинництві. Моделі дозволяють дослідження механізмів виникнення нестабільності у взаємозв'язку ПЕВР та оцінювання рівнів можливих втрат врожаю, спричинених різними причинами, і їх імовірнісних характеристик. Розроблено методологія прийняття рішень в умовах ризику та часткової невизначеності, яка дозволяє дослідження задачі лінійної оптимізації та оптимізації портфелю при невизначеності, оптимізацію портфелю за співвідношенням винагорода-ризик, оптимізацію в умовах неточних посценарних оцінок. Розроблено також двоетапна модель еколого-економічних рішень, яка може використовуватися для розробки й обґрунтування програм страхування з урахуванням катастрофічних ризиків шляхом явної імітації балансів попиту і пропозиції страхування.

ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Schwab K. The fourth Industrial Revolution – World Economic Forum, 2016/ Четвертая промышленная революция/ Клаус Шваб – М.: Изд. «Э», 2016. – 208 с.
2. The Global Risks Report 2016 11th Edition – World Economic Forum, 2016
3. Atoyev K.L., Bilous V.M., Deineka V.S. et all. *Mathematical modelling of food, energy and water resources management under increased uncertainties and risks* // Integrated modeling of food, energy and water security

- management for sustainable social, economic and environmental developments / edited by Zagorodny A.G., Yermoliev Yu.M., – Kiev, 2013, pp. 195-228
4. Атоев К.Л., Кнопов П.С., Пепеляев В.А. Управление рисками при адаптации к глобальным изменениям // Математичне моделювання в економіці. – 2013.–N2. – С. 74–83.
 5. Zulpukarov M.-G. M., Malinetskii G. G., Podlazov A. V. The channels and jokers method application to the Rosenzweig–Macarthur system analysis // МКО. – 2006.–, Т.2.–P.28–38. (in Russian).
 6. Atoyev K., Tomin A., Aksionova T. Global changes, new risks, and novel methods and tools of their assessment. Modelling and management of environmental security in Ukraine // Managing Critical Infrastructure Risks (Ed. by I. Linkov et al.) – 2007. – Springer-Netherlands. – P. 339-351.
 7. Sergienko I.V., Yanenko V.M., Atoyev K.L. The general concept used to control the risk of the ecological, techogenic and sociogenic accidents // Кибнетика і системний аналіз. –1997.–N2. – С. 65–86.
 8. Simulation and optimization methods in risk and reability theory/Eds. P.S.Knopov, P.M.Pardalos.- New York: Nova Sciencie Publishers Inc, 2009.- 285p.
 9. Ermoliev Y., von Vinterfeldt D. Systemic risk and security management // Managing Safety of Heterogeneous Systems, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems.- Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2012.- P.19-49.
 10. Forrester J. *World Dynamics*. Moscow, "Nauka", 1978, 167 p. (in Russian).
 11. Gelovani V. A., Egorov V. A., Mitrofanov V. B., Piontkovskiy A.A. *Solution of One Control Problem for Forrester Global Dynamical Model*. Moscow, preprint, N56, 1974 (in Russian).
 12. Makhov S.A. *Mathematical simulation of world dynamics and sustainable development by the example of Forrester's model* //Self-organizing systems. – Moscow: Nauka, – 2007. – P. 79–101 (in Russian).
 13. Курдюмов С.П. Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации // Современные проблемы математической физики и вычислительной математики. – М., 1982. – С. 217-243.
 14. Режимы с обострением. Эволюция идеи. Законы коэволюции сложных структур / Под ред. Г.Г. Малинецкого. М.: Наука, 1998. – 256 с.
 15. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. От диссипативных структур к упорядоченности через флуктуации. – М.: Мир, 1979. – 327 с.
 16. Акаев А.А., Коротаев А. В., Фомин А.А. О причинах и возможных последствиях второй волны глобального кризиса. //Моделирование и прогнозирование глобальной, региональной и национальной динамики/Отв. ред. А. А. Акаев, А. В. Коротаев, Г. Г. Малинецкий, С. Ю. Малков. – М.: ЛИБРОКОМ/URSS, 2012. – С.424-459
 17. Магницкий Н.А., Сидоров С.В. Новые методы хаотической динамики. – Едиториал УРСС, 2004. - 320 с.

18. Атоев К.Л. Возникновение режимов детерминированного хаоса в задачах управления социально-экономическим развитием // Математичне моделювання в економіці. – 2013.–N3. – С. 90-97/
19. Lorenz E. Deterministic nonperiodic flow// Journal of Atoms.Sci. – 1963.– V.20.– P.130 – 141.
20. Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б. Современные проблемы нелинейной динамики. – М.: УРСС, 2002. – 360с.
21. The Kuramoto model: a simple paradigm for synchronization phenomena/Acebrón J. A.; Bonilla, L. L.; Vicente P. et al. //Reviews of Modern Physics. –2005. – 77: P.137–185.
22. Harry Markowitz. Portfolio Selection // The Journ. of Finance. – 1952. – 7, N. 1. – P. 77-91.– (http://www.math.ust.hk/~maykwok/courses/ma362/07F/markowitz_JF.pdf).
23. Uryasev S. Conditional Value-at-Risk: Optimization Algorithms and Applications // Financial Engineer. News. . – 2000. . –N 14. P. 1-5
24. Rockafellar R.T., Uryasev S. Optimization of Conditional Value-at-Risk // Journal of Risk. – 2000. – 2. – № 3. – P. 21–41.
25. Rockafellar R.T., Uryasev S. Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions // Journ. Of Banking and Finance. –2002. –26. –P.1443-1471.
26. American Optimal Decisions Portfolio Safeguard (PSG) in Windows Shell Environment: Basic Principles. – AORDA, 2011. – P. 260.
27. American Optimal Decisions Optimization and Risk Management Case Studies with Portfolio Safeguard (PSG) in Windows Shell Environment. – AORDA, 2010. – P. 528.
28. Рослинництво України. Стат. Збірник. – 2013. – 180 с.
29. Knight F.H. Risk, Uncertainty and Profit. – Houghton Mifflin: Boston, 1921. – 381 p.
30. Artzner P., Delbaen F., Eber J.M., Heath D. Coherent measures of risk // Mathematical Finance. – 1999. – 9. – № 3. – P. 203–228.
31. Кирилюк В.С. О классе полиэдральных когерентных мер риска // Кибернетика и системный анализ. – 2004. – № 4. – С. 155–167.
32. Кирилюк В.С. Полиэдральные когерентные меры риска и оптимизация инвестиционного портфеля // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 2. – С. 120–133.
33. Кирилюк В.С. Полиэдральные когерентные меры риска и оптимальные портфели по соотношению вознаграждение-риск // Кибернетика и системный анализ. – 2014. – №5. – С. 85–103.
34. Кирилюк В.С. Теория ожидаемой полезности, оптимальные портфели и полиэдральные когерентные меры риска // Кибернетика и системный анализ. – 2014. – №6. – С. 63–72.
35. Acerbi C. Spectral measures of risk: a coherent representation of subjective risk aversion // J. Banking & Finance. – 2002. – 26(7) . – P. 1505-1518.
36. Kusuoka S. On law invariant coherent risk measures, Kusuoka S, Maruyama T. (eds.) Advances in Mathematical Economics, Vol.3. – Tokyo: Springer, 2001. – P. 83–95.

37. Кирилюк В.С. Меры риска в задачах стохастической и робастной оптимизации // Кибернетика и системный анализ. – 2015. – №6. – С. 46–59.
38. Ермольев Ю.М. Методы стохастического программирования. – М: Наука, 1976. – 240 с.
39. Shapiro A., Dentcheva D., Ruszczyński A. Lectures on stochastic programming: modeling and theory. – Philadelphia: SIAM, 2009. – 436 p.
40. Кнопов P.S., Атоев K.L., Горбачук V.M. The mathematical modeling of uncertainty and risk impact on complex systems instability // Systems Analysis 2015. – Laxenburg, Austria: International Institute for Applied Systems Analysis, 2015. – P. 62
41. Атоев К.Л., Горбачук В.М., Ермольев Ю.М., Кнопов П.С. Перспективні питання системного аналізу / Питання оптимізації обчислень (ПОО-ХЛП, 21–25 вересня 2015 р., Чинадієво). – К.: Ін-т кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, 2015.
42. Ermolieva T., Filatova T., Ermoliev Y., Obersteiner M., de Bruijn K., Jeuken A. Flood catastrophe model for designing optimal flood insurance program: estimating location-specific premiums in the Netherlands // Risk analysis. – 2016, March. – Режим доступу: <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/risa.12589/full>
43. Горбачук В.М., Морозов О.О. Оптимальні контракти за повної інформації / Стратегії інноваційного розвитку економіки України: проблеми, перспективи, ефективність. – Одеса: Центр економічних досліджень та розвитку, 2011. – С. 33–35.
44. Горбачук В.М., Кошулько А.І., Сирку А.А. До природних обмежень економічної діяльності / Розвиток сучасних міжнародних економічних відносин: фінансово-економічні та соціальні чинники. – Одеса: ОНУ імені І.І.Мечникова, 2016. – С. 125–128.
45. Горбачук В.М., Морозов О.О. Від експлуатації до розвитку аграрних ринків / Розвиток національних економік в умовах глобальної нестабільності. – Одеса: Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, 2013.
46. Горбачук В.М., Морозов О.О. Регулювання енерговитрат галузей землекористування України та суміжних країн / Екологічне оподаткування: збірник наукових праць за результатами науково-практичних заходів. – Ірпінь: НУДПСУ, 2013. – С. 20–23.
47. Ermoliev Y.M., Ermolieva T.Y., MacDonald G., Norkin V. Insurability of catastrophic risks: the stochastic optimization model // Optimization. – 2000. – 47 (3–4). – P. 251–265.
48. Горбачук В.М., Сулейманов С.-Б. Цілі й задачі сталого розвитку до 2030 року // Глобальні соціально-економічні трансформації в ХХІ столітті (13 жовтня 2016 р., Київ). – К.: КНУ імені Т.Шевченка, 2016.
49. Integrated catastrophe risk modeling: supporting policy processes. A.Amendola, T.Ermolieva, J.Linnerooth-Bayer, R.Mechler (eds.) – Dordrecht, Netherlands: Springer, 2013. – 287 p.

50. Ermolieva T., Ermoliev Y. Modeling catastrophe risk for designing insurance systems / Integrated catastrophe risk modeling: supporting policy processes. A.Amendola, T.Ermolieva, J.Linnerooth-Bayer, R.Mechler (eds.) – Dordrecht, New York, London: Springer Verlag, 2013. – P. 29–53.
51. Ermolieva T., Ermoliev Y., Norkin V. Spatial stochastic model for optimization capacity of insurance networks under dependent catastrophic risks: numerical experiments. – Laxenburg, Austria: IIASA, 1997. – Interim Report IR-97-028. – 30 p.
52. Ermoliev Y.M., Ermolieva T.Y., MacDonald G., Norkin V. Stochastic optimization of insurance portfolios for managing exposure to catastrophic risks // Annals of operations research. – 2000. – 99 (1–4). – P. 207–225.
53. Ermoliev Y. Two-stage stochastic programming: quasigradient method / Encyclopedia of optimization. 2-nd edition. C.A.Migdalas P.M.Pardalos (eds.) – Springer, 2009. – P. 3955–3959.
54. Ermoliev Y.M., Norkin V.I. On nonsmooth and discontinuous problems of stochastic systems optimization // European journal of operations research. – 1997. – 101 (4.2). – P. 230–244.
55. Ермольев Ю.М., Ястремский А.И. Стохастические модели и методы в экономическом планировании. – М.: Наука, 1979. – 256 с.
56. Горбачук В.М., Сулейманов С.-Б., Богданов О.В. Двосекторна модель торгівлі мобільним фактором // Інформаційні технології та взаємодії (8–10 листопада 2016 р., Київ). – К.: КНУ імені Т.Шевченка, 2016.
57. Holmstrom B. Moral hazard and observability // Bell journal of economics. – 1979. – 10 (4.1). – P. 74–91.
58. Winter R.A. Moral hazard and insurance contracts / Contributions to insurance economics. G. Dionne (ed.) – Dordrecht: Kluwer, 1992.
59. Borch K.H. The price of moral hazard // Scandinavian actuarial journal. – 1980. – P. 173–176.
60. Zweifel P., Eisen R. Insurance economics. – Springer, 2012. – 451 p.
61. Горбачук В.М., Морозов О.О. Стимули та страхування / Економіка та ефективна організація фінансових та виробничих процесів. – К.: Нова економіка, 2011. – С. 39–42.
62. Горбачук В. М. Врахування сільськогосподарських ризиків // Науковий вісник Херсонського державного університету. Серія: економічні науки. – 2014. – Вип. 8. Ч. 5. – С. 203–209.