

Міністерство освіти та науки України
Національний університет “Києво-Могилянська академія”
Факультет природничих наук
Кафедра фізико-математичних наук

Кваліфікаційна робота
освітній ступінь - бакалавр

**на тему: «ПОКАЗНИКИ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ, ЩО
ПОРОДЖЕНА РІВНЯННЯМ НАВ'Є-СТОКСА»**

Виконав студент 4 року навчання
спеціальності

104 Фізика та астрономія

Пайда Аліна Юріївна

Керівник Жохін А.С.,

кандидат фізико-математичних наук

Рецензент _____

(прізвище та ініціали)

Кваліфікаційна робота захищена

з оцінкою _____

Секретар ЕК _____

« ____ » _____ 20 ____ р.

Київ – 2020

ЗМІСТ

1.ВСТУП.....	3
2. ПОКАЗНИК ЛЯПУНОВА.....	5
2.1. ВЛАСТИВОСТІ ПОКАЗНИКІВ ЛЯПУНОВА...	9
3. РІВНЯННЯ НАВ'Є-СТОКСА.....	10
4. ХАРАКТЕРИСТИЧНИЙ ПОКАЗНИК ЛЯПУНОВА.....	12
5. ХАРАКТЕРИСТИЧНІ ПОКАЗНИКИ ЛЯПУНОВА ТА ПОШУК СИСТЕМ З ДИВНИМ АТРАКТОМ.....	17
6. КОНСТРУЮВАННЯ МОДЕЛЕЙ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ З ДИВНИМ АТРАКТОМ.....	18
7. ЧАСТКОВИЙ ПІДСУМОК ХАРАКТЕРИСТИЧНИХ ПОКАЗНИКІВ ЛЯПУНОВА ДЛЯ НЕРЕГУЛЯРНИХ РУХІВ.....	23
8. РЕЗУЛЬТАТИ.....	27
9.ВИСНОВКИ.....	29
9.1 ДОДАТКИ.....	30
10. ЛІТЕРАТУРА.....	53

1. ВСТУП

Розглядаємо розділ синергетики [8], який вивчає процеси самоорганізації в нерівноважних нелінійних системах. В цих системах можуть виникати різноманітні структури, існування яких зумовлене нерівноважністю. З допомогою ентропії ми можемо описати відхилення системи від стану рівноваги. Ентропія є максимальною в стані термодинамічної рівноваги. Максимальному значенню ентропії відповідає найбільша неупорядкованість системи. У нерівноважній замкненій системі процеси відбуваються таким чином, щоб ентропія зростала. Неоднорідний стан має менше значення ентропії, ніж однорідний стан.

У нерівноважних системах ентропія більш низька, і, отже, система є більш впорядкована, ніж рівноважна. В незамкнених або відкритих системах [9], якими, зокрема, є біологічні об'єкти, процеси можуть відбуватися зі зменшенням ентропії, тобто зі зменшенням порядку. При зміні стану деякого тіла приріст ентропії можна представити у вигляді двох доданків:

$$dS = dS_e + dS_i \quad (1.1)$$

де dS_e – зміна ентропії за рахунок її притоку зовні;

де dS_i – зміна ентропії внаслідок процесів, що відбуваються всередині системи.

Для процесів всередині системи приріст ентропії завжди додатний

$$dS_i \geq 0$$

Проте притік ентропії з оточуючого середовища dS_e , залежно від характеру зв'язку системи із зовнішнім середовищем, може мати різний знак – як позитивний, так і негативний. Якщо величина dS_e від'ємна, і за абсолютним значенням перевищує dS_i , то повний приріст ентропії буде також від'ємним, що означає зменшення ентропії і збільшення порядку системи. Таким чином, еволюція від низькоорганізованих систем до високоорганізованих відбувається в нерівноважних незамкнених системах. У разі малих відхилень від рівноважного стану спостерігається неперервна зміна параметрів системи. Виникнення структур, або самоорганізація, відбувається стрибкоподібно при досягненні певного значення відхилень параметрів системи від їх рівноважних значень. Стрибкоподібний характер переходу в новий стан нагадує фазовий перехід у випадку термодинамічної рівноваги. Тому стрибкоподібну зміну стану в нерівноважній системі при зміні параметрів називають нерівноважними фазовими переходами. Кінетичні фазові переходи більш різноманітні, ніж термодинамічні фазові переходи.

Ефект Бенара є прикладом явища самоорганізації. Також прикладом виникнення впорядкованості в нерівноважній системі є випромінювання лазера. Структури, що утворюються в умовах, далеких від термодинамічної рівноваги, можуть бути просторовими, як, наприклад, комірки Бенара, можуть бути часовими і являти собою коливання в часі деяких параметрів системи, та можуть бути просторово-часовими і являти собою хвилі, що рухаються в просторі, або бути більш складним.

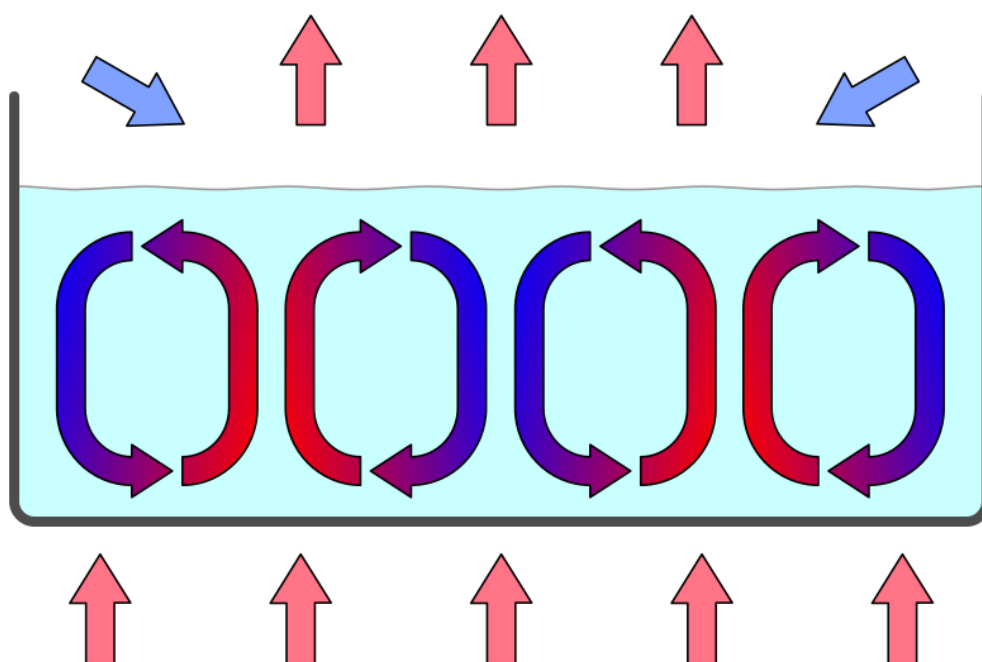


Рис.1

(Комірки Бенара)

2. ПОКАЗНИК ЛЯПУНОВА

Показник Ляпунова – величина, яка характеризує швидкість видалення один від одного траєкторій. Позитивність показника Ляпунова зазвичай свідчить про хаотичну поведінку системи.

Показники Ляпунова описують загальну поведінку об'ємів фазового простору, що розширюються та стискаються, дещо відрізняються від початкових станів. Відображення потоку

$$\Phi^t : R^n \rightarrow R^n$$

$$x \rightarrow \Phi^t(x) \tag{2.1}$$

що описує динамічну систему, діє на n -мірний простір стану

$M = R^n$ і породжується векторним полем v

$$\dot{x} = v(x), x \in R^n, t \in R \quad (2.2)$$

Щоб зібрати інформацію про час еволюції нескінченно малих збурених початкових станів, слід врахувати лінеаризоване відображення потоку

$$D_x \Phi^t : T_x M \rightarrow T_{\Phi^t(x)} M$$

$$u \rightarrow D_x \Phi^t u \quad (2.3)$$

Лінеаризоване відображення потоку $D_x \Phi^t$ задається оборотною матрицею $n \times n$, що описує часову еволюцію вектора u в дотичному просторі. Для ергодичних систем показники Ляпунова визначаються як логарифми власних значень

$\mu_i (1 \leq i \leq m)$ позитивної та симетричної граничної матриці

$$\Lambda_x = \lim_{t \rightarrow \infty} [D_x \Phi^{t*} D_x \Phi^t]^{\frac{1}{2t}} \quad (2.4)$$

як задано теоремою Оселедця [\[10\]](#) (* - позначає транспозицію).

Показник Ляпунова – це темпи зростання

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|D_x \Phi^t e_i\|, (1 \leq i \leq m) \quad (2.5)$$

де $\{e_i : 1 \leq i \leq m\}$ є базовими векторами, що охоплюють власний простір Λ_x . При запуску чисельних обчислень з довільним набором базових векторів слід застосувати перенормалізацію через деякий час еволюції Δt [2,12], оскільки майже всі вектори

мають тенденцію потрапляти в найбільш зростаючий напрямок для $t \rightarrow \infty$. Рівняння (2.5) можна записати як добуток локальних лінійних відображень потоків $D_{x^j} \Phi^{\Delta t}$, $0 \leq j \leq N-1$,

$$\Delta t = \frac{t}{N-1} \text{ по точках орбіти } x^j = \Phi^{j\Delta t}(x).$$

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left\| \prod_{j=0}^{N-1} D_{x^j} \Phi^{\Delta t} e_i \right\| \quad (2.6)$$

$$\lambda_i = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k\Delta t} \sum_{j=0}^{N-1} \ln r_{ii}^j \quad (2.7)$$

r_{jj}^i – локальні темпи розширення. Вони є діагональними

елементами верхніх трикутних матриць R^j , що виникають при повторному розкладі по орбіті [8,13]. У випадку експериментів зазвичай відомий вимірюваний часовий ряд єдиного спостереження замість керуючих рівнянь руху. Для побудови траєкторій у фазовому просторі в цьому випадку використовується метод вбудовування зсувів, зміщених часом [21, 24, 25]. Нехай

$$p: R^m \rightarrow R$$

$$\psi^t(z_0) \rightarrow p(\psi^t(z_0)) \quad (2.8)$$

є спостережуваною системою, описаною деяким невідомим квідображенням потоку ψ^t , що діє на m – мірний простір стану R^m . Для компактних багатобразностей розмірності m було показано, що

$$\left\{p(\psi^t(z_0)), \dots, p(\psi^{t+2mT}(z_0)) \mid T \in R^+, t \rightarrow \infty\right\} \quad (2.9)$$

відрізняється позитивною межею, встановленою в генетичних умовах [24,25]. T називається постійним зсувом у часі, а $n = 2m + 1$ – розміром вбудовування. Оскільки показники Ляпунова є динамічним інваріантом, ми можемо використовувати потік

$$\Phi^t : R^n \rightarrow R^n$$

$$x_0 \rightarrow \Phi^t(x_0) = (p(\psi^t(z_0)), p(\psi^{t+T}(z_0)), \dots, p(\psi^{t+2mT}(z_0))) \quad (2.10)$$

у вкладений простір R^n для подальших обчислень. Якщо розмірність m з ψ^t невідома, n потрібно збільшувати, поки не буде досягнуто вбудовування.

2.1 ВЛАСТИВОСТІ ПОКАЗНИКІВ ЛЯПУНОВА

Число показників Ляпунова дорівнює розмірності n фазового простору системи. Впорядковуючи їх за величиною:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \quad (2.11)$$

Один з показників Ляпунова, що відповідає зсуву вздовж фазової траєкторії, яка не закінчується в особливій точці, завжди дорівнює нулеві.

Сума всіх показників Ляпунова дорівнює середньому, вздовж фазової траєкторії значенню величини $\text{div} v = \text{div} v(d\xi/dt)$:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \vec{\xi}(t) dt = \sum_{j=1}^N \sigma_j \quad (2.12)$$

Зокрема, для гамільтонових систем

$$\sum_{j=1}^n \sigma_j = 0 \quad (2.13)$$

Оскільки для таких систем фазовий об'єм зберігається.

Для гамільтонових систем має місце симетрія:

$$\sigma_i = -\sigma_{2k-i+1} \quad i = \overline{1, k}$$

де k – число ступенів вільності ($N=2k$). Отже, для гамільтонових систем принаймні два показника Ляпунова дорівнюють нулеві.

3. РІВНЯННЯ НАВ'Є-СТОКСА

Рівняння Нав'є-Стокса – диференціальні рівняння руху суцільного середовища (рідини або газу), що враховують її в'язкість. Виведено Л.Нав'є в 1822 році на основі спрощення моделі молекулярних взаємодій. У 1845 році Дж.Стокс в результаті вивчення стаціонарного рівняння нестисливої рідини отримав ці рівняння в сучасній формі з використанням законів збереження маси і імпульсу суцільного середовища.

У найпростішому випадку рух нестисливого та нетеплопровідного середовища рівняння Нав'є-Стокса у векторній формі має вигляд:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla \rho + \eta \Delta \mathbf{v} \quad (3.1)$$

Де \mathbf{v} – швидкість частинки рідини,

t – час,

\mathbf{F} – зовнішня питома сила,

p – тиск,

$\eta = \mu / \rho$ – кінематичний коефіцієнт в'язкості,

Δ – оператор Лапласа,

∇ – оператор Гамільтона.

Коефіцієнти в'язкості залежать від температури, і для рідини, як правило, визначаються експериментально, а для газу визначаються з кінетичної теорії газів.

Маємо систему 3 рівнянь:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \Delta v_x$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \eta \Delta v_y \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \eta \Delta v_z\end{aligned}\quad (3.2)$$

Для стискующего теплопроводного середовища до приведених вище рівнянь додаються рівняння нерозривності і рівняння стану. Для ідеального газу рівнянням стану є рівняння Клапейрона. У випадку неізотермічних течій для визначення температури до вказаної системи рівнянь необхідно додати також рівняння балансу енергії. Тобто для в'язкого теплопроводного стискующего стану отримується повна система рівнянь відносно шести рівнянь: тиску p , щільності ρ , температури T і трьох проекцій швидкості v .

4. ХАРАКТЕРИСТИЧНИЙ ПОКАЗНИК ЛЯПУНОВА

Нехай M є компактним кінцево-розмірним багатовимірним значенням з метричним тензором g або відповідним лінійним не виродженим оператором L_g :

$L_g : TM \rightarrow T^*M$ такий, як $\langle L_g f / f \rangle = |f|^2 \geq 0$. Зручніше писати вектор $|f\rangle$ як векторний стовпчик, а $\langle f|$ - векторний рядок.

Припустимо, що F – неперервно диференційоване поле, що визначає (напів-) потік $\{T_t\}_{t \geq 0}$ з кінцевим набором фіксованих точок $F = \{x : F(x) = 0\}$, при чому всі нерухомі точки є гіперболічними, маємо:

$$V_x \in \text{Fix} F \forall \lambda \in \sigma\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x)\right), \text{Re}(\lambda) = 0 \quad (4.1)$$

Тут і далі $\frac{\partial F}{\partial x}(x)$ – похідна поля, $\frac{\partial x_t}{\partial x}$ - дотичне зіставлення від $T_x M$ до $T_{x_t} M$. Ми робимо деякі зауваження щодо поведінки траєкторій поблизу нерухомої точки x^* , де поведінка динамічних систем, визначених рівняннями $\dot{x}_t = F(x_t)$ та $\dot{x}_t = \frac{\partial F}{\partial x}(x^*)[x_t - x^*]$, є подібною, $p(x_t, x^*)$ зменшується експоненційно, якщо $x_t \in W^s(x^*), t \rightarrow +\infty$.

Тоді характерний реальний підпростір, інваріантний $\frac{\partial F}{\partial x}(x^*)$ з відповідним $\lambda \in \sigma\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x^*)\right), \text{Re} \lambda < 0$, буде «асимптотичною дотичною» до траєкторії, отже, до підмножини $W^s(x^*)$.

$$v(x) \in T_x M$$

$$x_t(v(x)) = \overline{\lim_{t \rightarrow \infty}} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{\partial x_t}{\partial x} v(x) \right| \quad (4.2)$$

Очевидно, що

$$|x_t(v)| \leq \left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\|_{\infty} = \sup_{x \in M, \lambda \in \sigma(\frac{\partial F}{\partial x}(X))} |\lambda| \quad (4.3)$$

$$x_t(v) > x_t(u) \rightarrow x_t(u + v) = x_t(v) \quad (4.4)$$

$$x_t(u + v) \leq \max(x_t(u), x_t(v)) \quad (4.5)$$

Для довільних u та v одного шару. Звідси випливає, що характеристичні показники Ляпунова можуть приймати скінченну кількість різних значень, яка не перевищує $m = \dim M = \dim TM$. В силу рівнянь (4.2-4.5) вектори з різними характерними показниками є лінійно незалежними, тобто можна знайти основу TM . Всі характерні показники можна визначити на його векторах, виходячи з визначення (4.2), для якого:

А) Розмірні підпростори, породжені базовими векторами, що відповідають найменшому характеристичному показнику Ляпунова, χ – максимальний.

Б) Серед підстав із властивості А) розмірні підпростори, сформовані на наступних n_2 базових векторах з характерним показником χ_2 , що слідує за χ_1 відносно значення, є максимальними і т.д. до максимального значення характеристичного показника Ляпунова. Визначена таким чином основа називається нормальною. Іншими словами, основа є нормальною, якщо

$$\sum_{i=1,m} x_t(e_i) \quad (4.6)$$

приймає найменше значення. Достатні умови для стабільності та нестабільності відображення описані в термінах характеристичного показника Ляпунова.

I. Якщо всі характеристичні показники Ляпунова (за винятком одного, що дорівнює 0 та відповідає напрямку поля) негативні, то T_t – стабільний.

II. Якщо існує хоча б один позитивний характеристичний показник Ляпунова, то T_t – нестабільна. Питання щодо нестабільності T_t все ще залишається відкритим, якщо не менше двох характеристичних показників дорівнює 0, а решта негативні. Підхід, аналогічний розгляду f-ентропії, здається справедливим. Цікаво було б з'ясувати, чи існує зв'язок між f-ентропією та її аналогом φ -експонентою, аналогічним співвідношенню між звичайною ентропією та характеристичним показником Ляпунова у випадку A-системи.

Визначити усі характеристичні показники Ляпунова неможливо, використовуючи лише визначення (4.2), інакше нам доведеться «здогадуватися» про нормальну основу. Однак у конкретному випадку для напівструмів у тривимірній кулі з постійним коефіцієнтом скорочення $s_\rho(\frac{\partial F}{\partial x})$ це може бути реалізовано (навіть із застосуванням комп'ютерного моделювання). Якщо $x_t \rightarrow x^*, t \rightarrow +\infty$ характеристичного показника Ляпунова представляють реальні частини власних значень $\frac{\partial F}{\partial x}(x^*)$. В іншому випадку показник числа, що відповідає

F , дорівнює O . У всіх випадках сума характеристичних показників Ляпунова дорівнює вираженню об'ємного скорочення $S_p(\frac{\partial F}{\partial x})$. В силу рівнянь (4.4)-(4.5) довільний вектор матиме точно характеристичний показник Ляпунова. Третій невідомий показник визначається простим відніманням.

В решті випадків мультиплікативна ергодична теорема повинна бути використана більш повно. Спочатку зазначимо, що в (4.2) рівнянні верхня межа може бути замінена звичайною. По-друге, елементи доказів дозволяють комп'ютеру. А саме, ентіальна система (M, T_t) поширюється на $\{(M, SO(m, R)), \tilde{T}_t\}$: $\tilde{T}_t(x, C) = (x_t, C_t)$, де $C_t^{-1} \frac{\partial x_t}{\partial x} C = N_t$ – матриця з низькою трикутністю (C_t отримується унікально за допомогою процедури ортогоналізації Шмідта векторних стовпців $\frac{\partial x_t}{\partial x} C$). Для N_t – низькотрикутні репрезентації $\frac{\partial x_t}{\partial x}$ множать діагональні елементи:

$$n_t^i(x_s) n_s^i(x) = n_{t+s}^i(x) \quad (4.7)$$

Згідно теореми Біркгоффа-Гінчіна скрізь відносно міри μ , інваріантної \tilde{T} , існують ці межі:

$$X_t^i = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln(n_t^i(x)) \quad (4.8)$$

Для \tilde{T}_t ергодичне X_t^i є постійним.

Множина $\{X_t^i\}_i = i, m$ отримана таким чином – це набір характеристичних показників Ляпунова нормальної основи. Доведено мультиплікативну ергодичну теорему для диморфізмів та певного сімейства коциклових. Використовуючи комп'ютер (за схемою з фіксованою різницею, наприклад,

$x_h = x_0 + \frac{h}{2}[F(x_0)_h + F(x_0 + F(x_0))]$ та фіксованим кроком

інтеграції h), ми можемо вивчити диморфізм, а не потік. Якщо вирішити рівняння

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial x_t}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x}(x_t) \frac{\partial x_t}{\partial x} \quad (4.9)$$

за тією ж схемою, то отримаємо загалом показник Ляпунова, залежно від h та від способу інтегрування. Тому розрахунки проводяться з урахуванням невідповідності характеристичного показника Ляпунова від кроку інтеграції в $h \rightarrow 0$.

Треба зауважити, що випадок диморфізмів не потребує рішення (4.9) і це зменшує кількість розрахунків. У одновимірному випадку, визначеному аналітично автоматизмом, вся процедура обчислення зводиться до знаходження траєкторії (або граничного розподілу).

5. ХАРАКТЕРНІ ПОКАЗНИКИ ЛЯПУНОВА ТА ПОШУК СИСТЕМ ІЗ ДИВНИМ АТРАКТОРОМ

Тривале комп'ютерне моделювання має сенс, коли вивчається динамічна система з фазовими портретними характеристиками (атрактор, експонента Ляпунова), залежними від кроку h інтеграції. Дослідження в динамічних системах із дивним атрактором у випадку розмірності $S < m$ викликає особливий інтерес. Алгоритм досить простий: траєкторія обчислюється до її «падіння» на атрактор. Тоді характеристичні показники Ляпунова обчислюються за одним із відомих алгоритмів (або обома з них для порівняння результатів).

У конкретному випадку не просто вказати достатньо великий інтервал інтеграції та достатньо високий крок інтеграції. Інтервал часу між обчисленнями діагональних елементів низьких трикутних зображень повинен бути невеликим (щоб не було наполовину – «поділ на нуль» за рахунок розтягування векторних стовпців з майже паралельним напрямком), але не таким малим для зберігання обчислення.

Також цікаво вивчити біфуркацію хаотичного руху: зменшення чи збільшення кількості позитивних характеристичних показників Ляпунова (наприклад, перехід від стабільної інваріантної підмножини $K \subset M$, $\lim K < m$ з її сильним атрактором до системи з сильним атрактором розмірності, що перевищує $\lim K$). Зі збільшенням виміру збільшується складність та різноманітність усіх можливих переходів. Зрозуміло, що в цьому випадку можна вивчити лише стійкі ергодичні компоненти.

6. КОНСТРУЮВАННЯ МОДЕЛЕЙ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ З ДИВНИМ АТРАКТОРОМ

Для першої системи встановлюється існування стійкого періодичного руху, для другої доводиться існування дивного атрактора.

Модель з дивним атрактором володіє важливою перевагою в порівнянні з моделлю Лоренца [11]. В ній конструктивно доводиться існування підкови Смейла [12] в досліджуваному зображенні Пуанкаре. Це пов'язано з меншим коефіцієнтом стиснення уздовж траєкторій. Якщо у системі Лоренца він наближено рівнявся 10^{-16} , то в нашій моделі він порядку 10^{-1} .

- 1) Одним з можливих підходів до розв'язку рівняння гідродинаміки є застосування теореми про центральне різноманіття [13], яка виправдовує кінцево-модові апроксимації рівнянь Нав'є-Стокса. Розглянемо клас моделей динамічних систем, визначених наступною системою рівнянь:

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= -\alpha z_1 - z_2 + z_2 z_3 \\ \dot{z}_2 &= z_1 - \beta z_2 + z_1 z_3 \\ \dot{z}_3 &= \sigma - \gamma z_3 + z_1 z_2\end{aligned}\tag{6.1}$$

В залежності від значень чотирьох параметрів α , β , γ , σ система може знаходитись в різних режимах.

Також маємо лему, яка стверджує, що всі особливі точки системи є гіперболічними особливими точками, якщо

$$(\gamma + \sigma) > \alpha\beta\gamma\tag{6.2}$$

і виконується хоча б одна з наступних нерівностей:

$$T = \alpha\beta + \beta\gamma + 2z_{10}^2 + 2z_{20}^2 - \gamma z_{30}^2 + 1 < 0 \quad (6.3)$$

$$K = \alpha\beta\gamma + 4z_{10}z_{20}z_{30} + 2\beta z_{20}^2 + 2\alpha z_{10}^2 - \gamma z_{30}^2 + \gamma < 0$$

$$K > (\alpha + \beta + \gamma)T$$

де

$$z_{10} = \pm (2\alpha)^{\frac{-1}{2}} ((\gamma + \sigma)(-1 + \sqrt{1 + \alpha\beta} - \alpha\beta\gamma)^{\frac{1}{2}} \quad (6.4)$$

$$z_{20} = (1 + \frac{\sigma}{\gamma}) z_{10} (2\gamma^{-1} z_{10}^2 + \beta)^{-1}$$

$$z_{30} = \gamma^{-1} (\alpha - 2z_{10}z_{20})$$

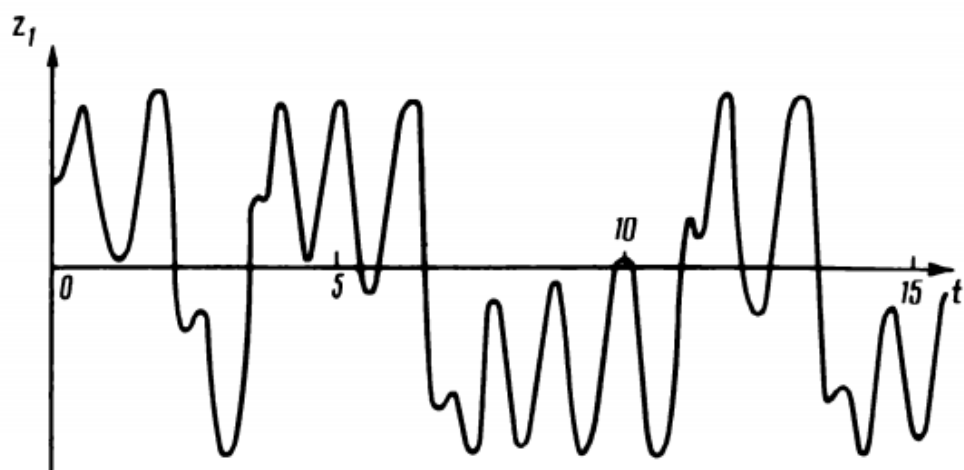


Рис.2

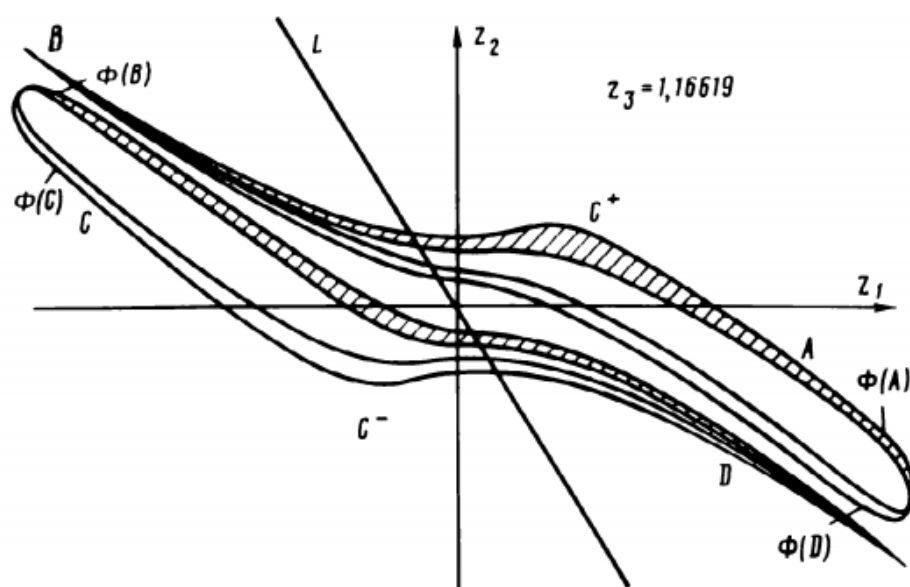


Рис.3

Ця лема визначає клас π -систем; вона доводиться з допомогою критерію Вишнеградського [14]. Вона дозволяє досліджувати поверхню катастроф Π в просторі параметрів. Відмітимо, що системи, маючи своїм атрактором замкнуту траєкторію, можуть входити в цю область Π . Тут ми обмежуємось розгляданням двох точок з цієї області векторів $(\alpha, \beta, \gamma, \sigma)$:

$$P_1 = (0,2; 0,6; 0,2; 5) P_2 = (0,2; 1,8; 0,1; 12).$$

У випадку P_1 система володіє атрактом, який є замкнутою траєкторією. У випадку P_2 система має три особливі точки: перша точка O з координатами $(0, 0, \sigma\gamma^{-1})$ буде мати двомірне стійке різноманіття і одновимірне нестійке, дві інших точки C^+ та C^- з координатами будуть мати одновимірне стійке різноманіття та двомірне нестійке. Численним інтегруванням прорахована траєкторія з початковими даними $(1, 0, 0)$, z_1 - координата якої зображена на *Рис.1*. Хаотичність цієї траєкторії підказує нам, що динамічна система в точці P_2 може мати дивний атрактор. Це можна визначити з допомогою відображення Пуанкаре Φ , яке визначається наступним чином. Розглянемо площину $z_3 = 1,16619$, в якій лежать точки C^+ та C^- .

Визначення: Поставимо в точці Φ з цієї площини в відповідність точку Φ , яка є першою точкою перетину траєкторії, яка проходить через Φ , з площиною $z_3 = 1,16619$, в околі якої вздовж цієї траєкторії z_3 буде зростати.

Так визначення Φ буде розривним, і розрив буде проходити по лінії перетину стійкого різноманіття точки O і площини $z_3 = 1,16619$. Позначаємо цю лінію L . Вона знаходиться численно. Відображення Φ реалізовано на ЕОМ. На *Рис.2* зображено дві послідовних дії відображення Φ .

$$\begin{aligned}
 A \xrightarrow{\Phi} A \cup B, B \xrightarrow{\Phi} C \cup D \\
 C \xrightarrow{\Phi} C \cup D, D \xrightarrow{\Phi} A \cup B
 \end{aligned}
 \tag{6.5}$$

Тут, наприклад, запис $A \xrightarrow{\Phi} A \cup B$ означає, що $\Phi(A) \cap A \neq \emptyset$ та $\Phi(A) \cap B \neq \emptyset$. Стискаюче відображення є «розривною підковою Смейла».

7. ЧАСТКОВИЙ ПІДСУМОК ХАРАКТЕРИСТИЧНИХ ПОКАЗНИКІВ ЛЯПУНОВА ДЛЯ НЕРЕГУЛЯРНИХ РУХІВ

Вважається, що динамічні системи, які демонструють хаотичні рухи без будь-яких контактів із зовнішнім збудженням, можуть мати деякі нестабільні властивості орбіт. З цієї точки зору, варто зазначити, що існує фундаментальний метод дослідження залежної від часу поведінки невеликих відхилень від орбіти. Такий метод називається методом Ляпунова, який використовує перший варіант рівняння орбіт.

Тепер можемо розглянути систему еволюції часу, яку описує множина диференціальних рівнянь у N -мірному евклідовому просторі:

$$\dot{x} = F(x) \quad (7.1)$$

Розв'язок рівняння (7.1) при початковій умові $x(0) = x_0$ записано як:

$$x(t) = T^t x_0 \quad (7.2)$$

де T^t – карта, в якій описується еволюція часу t всіх фазових точок.

З іншого боку, рівняння еволюції часу, для першої зміни рівняння орбіти, підкоряється такому набору неавтономних лінійних диференціальних рівнянь:

$$\partial \dot{x} = \frac{\partial F}{\partial x}(T^t x_0) \partial x \quad (7.3)$$

$$\partial x(t) = U_{x_0}^t \partial x_0 \quad (7.4)$$

де U є основною матрицею рівняння (7.3) і ∂x_0 є початковим відхиленням при $t=0$. Фундаментальна матриця рівняння (7.4) відповідає наступному ланцюговому правилу:

$$U_{x_0}^{t+S} = U_{T^S x_0}^t U_{x_0}^S \quad (7.5)$$

Очевидно, що асимптотична поведінка фундаментальної матриці невеликого відхилення описується для $t \rightarrow \infty$. Тепер асимптотика поведінки цієї матриці для $t \rightarrow \infty$ може бути охарактеризована наступними експонентами:

$$\lambda(e^k, x_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|U_{x_0}^t e_1 \wedge U_{x_0}^t e_2 \wedge \dots \wedge U_{x_0}^t e_k\|}{\|e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_k\|} \quad (7.6)$$

для $k=1, 2, \dots, N$. Символи у рівнянні (7.6) мають такі значення: e^k є k -розмірним підпростором в дотичному просторі E_x при x_0 , $\{e_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, k$) є нормою щодо Ріманової геометрії. Експонента, визначена в рівнянні (7.6), являє собою швидкість розширення об'єму k -мірного паралелепіпеда в дотичному просторі вздовж орбіти, і називається k -мірним показником Ляпунова. З цього визначення видно, що показник не залежить від вибору набору баз і норм, а залежить лише від k -мірного підпростору e^k .

Може бути корисним узагальнити властивості показників Ляпунова, які будуть використані в подальшому обговоренні.

- 1) 1-мірний показник $\lambda(e^1, x)$ може приймати максимум N різних значень, і ми будемо використовувати позначення $\{\lambda_i\}_{1 \leq i \leq N}$ і припустимо, що $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$.
- 2) k -мірний показник $\lambda(e^k, x)$ може приймати не більше $n C_k$ різних значень, і кожне значення пов'язане з сумою k різних одномірних

показників. Наприклад, у випадку $N=3$, k -розмірні показники

$$\lambda(e^k, x)$$

($k=1, 2, 3$) можуть приймати наступні значення відповідно:

$$\lambda(e^1, x) = \text{одному з значень в } \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\},$$

$$\lambda(e^2, x) = \text{одному з значень в}$$

$$\{(\lambda_1 + \lambda_2), (\lambda_1 + \lambda_3), (\lambda_2 + \lambda_3)\}$$

$$\lambda(e^3, x) = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$$

3) Якщо множинні бази $\{e_i\}$ ($i=1, 2, \dots, N$) вибрані випадковим

чином у дотичному просторі, то k -розмірні експоненти $\lambda(e^k, x)$ для $k=1, 2, \dots, N$ збігаються відповідно з ймовірністю 1 до максимальних значень серед наборів значень, яким дозволяється мати nC_k відмінних значень.

Мультиплікативна ергодична теорема Оселедця: якщо T -інваріантна міра μ та $\left\| \frac{\partial F}{\partial x} \right\| \in L^1(\mu)$, то k -вимірні експоненти

Ляпунова $\lambda(e^k, x_0)$ ($k = 1, 2, \dots, N$) існують для μ – майже всіх x_0 .

Згодом, можна виявити деякі відносини між показниками Ляпунова та вимірювально-теоретичною ентропією динамічних систем. Відомо, що існування показників Ляпунова безпосередньо пов'язане з K -ентропією. З отриманих до цього часу відносин, найслабшим може бути наступне співвідношення:

$$H(\mu) - \int \sum_{\lambda_i > 0} \lambda_i(x) d\mu \leq 0 \quad (7.7)$$

де H – це K -ентропія динамічної системи з інваріантною мірою μ .

Якщо рівність (7.7) буде гарантована, то середнє значення фази суми позитивних показників Ляпунова стає саме K -

ентропією. Крім того, очікується, що категорія динамічних систем, що задовольняє рівності (7.7), буде набагато ширшою, ніж згадані динамічні системи.

8. РЕЗУЛЬТАТИ

Розрахунки виконані через браузер в Jupyter програмою, написаною на мові програмування Fortran та Octave. Програма розміщується на сайті <http://cloud-3.bitp.kiev.ua:8889>

Розраховували показник Ляпунова при розв'язуванні диференціальних рівнянь і пошуках границі при t , яке прямує до нескінченності. При розрахунках найбільшого показника Ляпунова отримано два графіки для двох значень параметру β .

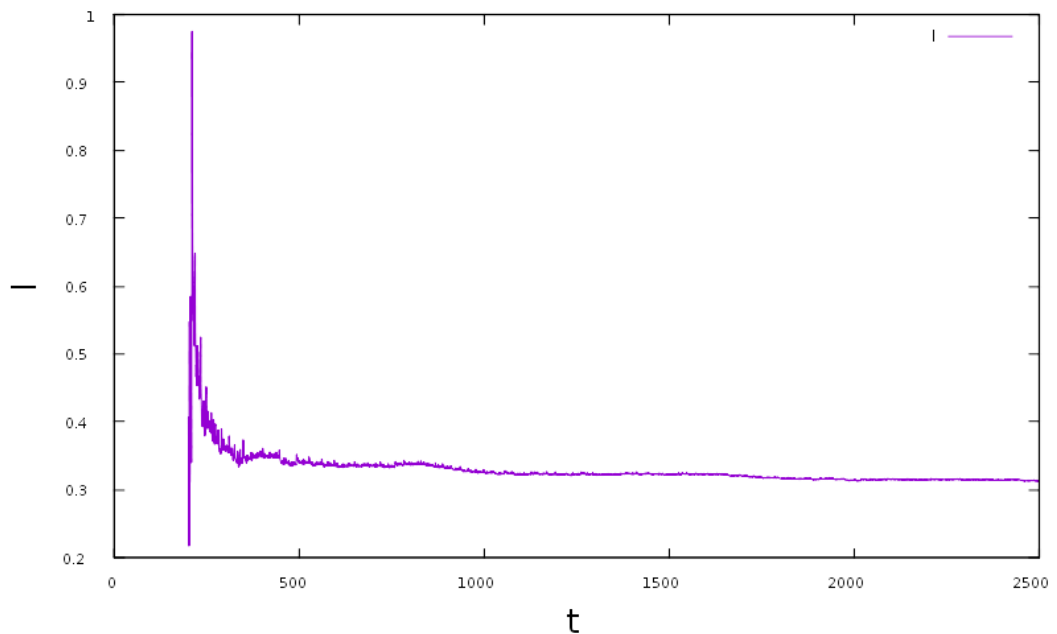


Рис.4.

($\beta=1.3$ Розрахунки головного показника Ляпунова

$$\lambda = \{ 0.222510 \quad -0.000180 \quad -1.822330 \} \quad \Sigma \lambda = -1.6.)$$

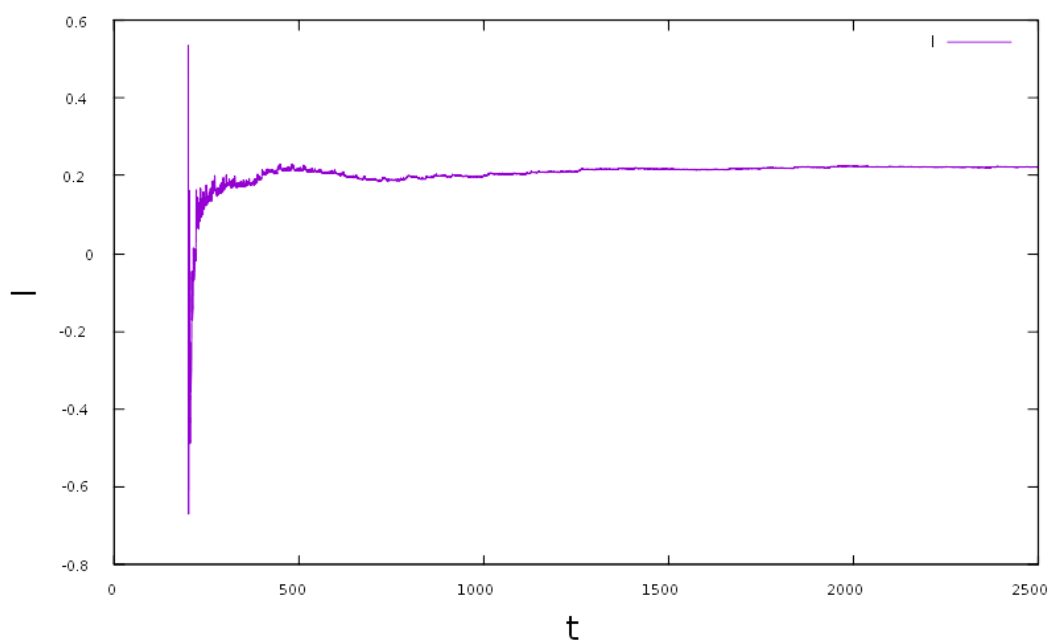


Рис.5.

($\beta=1.6$ Розрахунки головного показника Ляпунова

$$\lambda = \{ 0.313202 \quad -0.000643 \quad -2.212559 \} \Sigma\lambda = -1.9.)$$

9. ВИСНОВКИ

1. Маємо модифіковану комп'ютерну програму для знаходження показників Ляпунова.
2. Для 3-мірної динамічної динамічної системи, яка є 3-модовим обрізанням рядів Фур'є рівнянь Нав'є-Стокса порашовані та знайдені в режимі дивного атрактора показники Ляпунова.
3. Розрахунки дають додатні значення найбільшого показника Ляпунова. Це підтверджує перебування системи в режимі дивного атрактора — локально нестійкого на початкових даних траєкторії коливального режиму.
4. Модифікована програма може використовуватися при дослідженні динамічних систем, моделей фізичних, хімічних та біологічних процесів.

9.1 ДОДАТКИ

```
NDim=3;
NPoints=8000;
TBE=10.;
TEN=50.;

XORI=[0.8,0.9,0.8];

TEMP=0

function f = d3eqo(t,r)
    x=r(1);y=r(2);z=r(3);
    dx_dt=-0.2*x+(z-1)*y;
    dy_dt=-1.08*y+(z+1)*x;
    dz_dt=-0.1*z-2*x*y+5;
    f(1)=dx_dt;
    f(2)=dy_dt;
    f(3)=dz_dt;
endfunction
```

```

function f = dtu(t,r)
    x=r(1);y=r(2);z=r(3);
    dx_dt=-0.2*x+(z-1)*y;
    dy_dt=-1.08*y+(z+1)*x;
    dz_dt=-0.1*z-2*x*y+5;
    f(1)=dx_dt;
    f(2)=dy_dt;
    f(3)=dz_dt;
endfunction

```

```

function result(n,m,t1,t2,u)
fl = fopen ("D3EQ.DAT", "w");
    for i=1:m
        fprintf (fl,"%15.5f %15.5f %15.5f
%15.5f\n",t1+(t2-t1)*i/(m-
1),u(1,i),u(2,i),u(3,i));
    end
fclose(fl)
endfunction

```

```

function u = soleg(n,m,x,u,b,v)
    t1=b; t=0.0; ok=true;
    i=j=l=0; a=0.00001; hn=0.01;
    w=0.00001; l=1;      j=0;
    t= 0.0; TEMP=t;
    x=merson(t,t1,x,n,a,hn,w,j,ok);
    TEMP=t=t1;

```

```

for i=1:n #1
    u(i,1)=x(i);
end #1
s=(v-b)/(m-1.); t=b;

for l=2:m #2
    t1=t+s; TEMP=t;
    x= merson(t, t1, x, n, a, hn, w, j, ok);
    TEMP=t=t1;
    for i=1:n #3
        u(i,l)=x(i);
    end #3
end#2

endfunction # soleg

function y=merson(t,q,y,n,a,h,o, j,l)
    d0=zeros (1,n, "double"); d1=zeros (1,n,
"double"); d2=zeros (1,n, "double");
    d3=zeros (1,n, "double"); d4=zeros (1,n,
"double");
    r= 1e-13; s=0.01; l= 1; z=0.;

    for k=1:n
        d4(k)=y(k);
    end
    z= t;  s= h;  p=s;  is= 0; ok=true;

```



```

while ok==true
    p=s;c= q-z;
    if abs(s)>abs(c)
        s=c;
        if abs(c/p)<r
            break
        end
        is=1;
    end

    for k=1:n
        d0(k)=d4(k);
    end
    f=s/3.;
#    print(d0)
    z=z+f;

    for k=1:n
        d1(k)=f*d3(k);
        d4(k)=d1(k)+d0(k);
    end
    d3=dtu(z,d4,d3);

    for k=1:n
        d1(k)=d1(k)*0.5;
        d4(k)=f*0.5*d3(k)+d1(k)+d0(k);
    end
    d3=dtu(z,d4,d3);

```

```

z=z+f*0.5;
for k=1:n
    d2(k)=f*4.5*d3(k);
    d4(k)=d2(k)*0.25 +0.75*d1(k)+d0(k);
end
d3=dtu(z,d4,d3);

z=z+s*0.5;
for k=1:n
    d1(k)=f*2*d3(k)+d1(k);
    d4(k)=d1(k)*3-d2(k)+d0(k);
end
d3=dtu(z,d4,d3);

for k=1:n
    d2(k)=-0.5*f*d3(k)-d2(k)+d1(k)*2.;
    d4(k) = d4(k)-d2(k);
    d1(k)=abs(a*0.5*d4(k));
    d2(k)=abs(d2(k));
    if abs(d4(k))<=r
        continue
    end

    if d2(k)>d1(k)
        c=s*0.5;
        if (abs(c) >= o)
            for k=1:n
                d4(k)=d0(k);
            end
            z=z-s;

```

```
s=c;  
is=0;  
end  
  
if j==0  
    l=0;  
    break  
end  
s=0;  
if p<0.  
    s=-s;  
end  
if is==1  
    break  
end  
    continue  
end  
end  
  
if is==1  
    break  
end  
i=0;  
  
for k=1:n  
    if (d2(k)>d1(k)/32.)  
        i=1;  
    end  
end  
end
```

```

        if i==0
            s=s*2;
        end
        continue
    end

    h = p;   t=z;
    for k=1:n
        y(k)=d4(k);
    end
    TEMP=z;
endfunction

```

```

n=NDim;
m=NPoints;
t1=TBE;
t=TEN;
x=XORI;
u=zeros(n,m)*0.1;
u=soleq(n,m,x,u,t1,t);
result(n,m,t1,t,u);

```

Параметри в системі:

$$F(1)=-.2*X(1)+(X(3)-1)*X(2)$$

$$F(2)=-1.6*X(2)+(X(3)+1)*X(1)$$

$$F(3)=-.1*X(3)-2*X(1)*X(2)+5$$

$$\alpha = 0,2;$$

$$\beta = 1,6 ; 1,3;$$

$$\gamma = 0,1;$$

$$\sigma = 5;$$

Програма для розрахунку показників Ляпунова на мові Fortran

```

BLOCK DATA
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
COMMON/MERSOL/A(4),K,L
DATA K/1/,A/.0000001,.0000001,1.D-12,2500000./
END

PROGRAM LPN3
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
REAL*8 X(12),W(3),R(3)
EXTERNAL D3EQ,D3ED
DATA X/1.,1.,1.,9*0./
OPEN(6,FILE='D3P.RES',STATUS='UNKNOWN')
OPEN(7,FILE='!LAP.RES',STATUS='UNKNOWN')
OPEN(1,FILE='D3P.DAT',FORM='UNFORMATTED')

    T1=200
    T2=10000
    TS=.001
CALL LPNEXP(3,12,X,W,T1,T2,TS,D3EQ,D3ED,R)
STOP
END

SUBROUTINE SCHMID(A,B,M)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
REAL*8 A(M,M),B(M)
DO7 K=1,M
    IF(K.EQ.1) GOTO4
    K1=K-1
    DO3 I=1,K1

```

```

      R=0
      DO1 L=1,M

1      R=R+A(K,L)*A(I,L)
        DO2 L=1,M
2      A(K,L)=A(K,L)-R*A(I,L)
3      CONTINUE
4      B(K)=0
        DO5 I=1,M
5      B(K)=B(K)+A(K,I)**2
      R=DSQRT(B(K))
        DO6 I=1,M
6      A(K,I)=A(K,I)/R
7      CONTINUE
      RETURN
      END

SUBROUTINE LPNEXP(N,M,X,E,U,P,S,DTU,DTV,R)
  IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
  REAL*8 X(M),R(N),E(N)
  EXTERNAL DTU,DTV
  LOGICAL O,OK
  COMMON/MERSOL/A,H,B,TR,IN,L
  O=.TRUE.
  OK=O
  WRITE(6,1)N,IN,L,U,P,A,H,B,S
1 FORMAT('*** FIN LPN EXP N=',I4,' IN=',I4,' L=',I4,
./'*** T1=',E12.5,' T2=',E10.5,
./' ACC,H,HMIN,S=',4E10.5)
  T=0
  N1=N+1
  N2=N+N
  L=1
  IF(IN.EQ.0.OR.IN.EQ.1) GOTO3
  READ(1)L,T,E,X
  REWIND1

```

```

WRITE(6,2)L,T,E
2 FORMAT(' IN L=',I9,' T=',E10.4,' LEXP=',E12.5)
WRITE(6,*)' Exponents ='
WRITE(6,*)E
IF(T.GT.P) RETURN
IF(T.GT.U) GOTO6
3 CALL MERSON(T,T+S,X,N,A,H,B,0,OK,DTU)
IF(IN.NE.0) CALL CCTIME(TCM,TWK)
IF(TR.LE.TWK.AND.IN.NE.0) GOTO9
IF(T.LT.U) GOTO3
DO5 J=1,N
DO4 J1=1,N
4 X(N*J+J1)=0.
5 X(J+J*N)=1.
6 CALL MERSON(T,T+S,X,M,A,H,B,0,OK,DTV)
IF(IN.NE.0) CALL CCTIME(TCM,TWK)
IF(TR.LE.TWK.AND.IN.NE.0) GOTO9
CALL SCHMID(X(N1),R,N)
EXPA=0
DO7 J=1,N
*   C=ALOG(DSQRT(R(J)))
    C=DLOG(DSQRT(R(J)))
    E(J)=E(J)*FLOAT(L-1)/FLOAT(L)+C/(S*FLOAT(L))
7 EXPA=EXPA+E(J)
L=L+1

IF(MOD(L,1000).NE.0) GOTO6

WRITE(*,*) ' L=',L,' T=',T,' Sum Exp=',EXPA
WRITE(*,*) ' Ei='
WRITE(*,8) E
8 FORMAT(5F15.6)
IF(T.LT.P) GOTO6
9 IF(IN.EQ.0) RETURN
WRITE(1)L,T,X
ENDFILE1

```

```

WRITE(6,11)L,T,E,X
11 FORMAT(' OUT L=',I19,' T=',E10.4,' LEXP=',E12.6/
.('**** X=',5E12.6))
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE CCTIME(A,B)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
DATA K/0/
K=K+1
A=K
B=A
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE D3DU(X,Y)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
REAL*8 X(3),Y(3,3),F(3),G(3)
H=.00001
DO1 J=1,3
A=X(J)
X(J)=A+H
CALL D3EQ(T,X,G)
X(J)=A-H
CALL D3EQ(T,X,F)
DO2 I=1,3
2 Y(I,J)=(G(I)-F(I))/H/2
1 X(J)=A
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE D3ED(T,X,F)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
REAL*8 X(3*(3+1)),F(3*(3+1)),Y(3,3)
CALL D3EQ(T,X,F)
CALL D3DU(X,Y)
DO1 I=1,3

```



```

DO2 K=1,3
L=3*I+K
F(L)=0
DO3 J=1,3
3 F(L)=F(L)+Y(I,J)*X(3*J+K)
2 CONTINUE
1 CONTINUE
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE D3EQ(T,X,F)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
REAL*8 X(3),F(3)
F(1)=-.2*X(1)+(X(3)-1)*X(2)
*   F(2)=-1.08*X(2)+(X(3)+1)*X(1)
F(2)=-1.6*X(2)+(X(3)+1)*X(1)
*   F(3)=-.1*X(3)-2*X(1)*X(2)+12
F(3)=-.1*X(3)-2*X(1)*X(2)+5
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE MERSON(T,Q,Y,N,A,H,O,J,L,DTU)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
COMMON/MERSNL/D(500)
LOGICAL L
REAL*8 Y(N)
DATA R/1.E-13/
L=.TRUE.
DO1 K=1,N
1 D(K+4*N)=Y(K)
Z=T
S=H
IS=0
2 P=S
C=Q-Z
IF(ABS(S).LT.ABS(C)) GOTO3

```

```

S=C
IF(ABS(C/P).LT.R) GOTO11
IS=1
3 DO4 K=1,N
4 D(K)=D(K+4*N)
F=S/3
CALL DTU(Z,D(1+4*N),D(1+3*N))
Z=Z+F
DO5 K=1,N
D(K+N)=F*D(K+3*N)
5 D(K+4*N)=D(K+N)+D(K)
CALL DTU(Z,D(1+4*N),D(1+3*N))
DO6 K=1,N
D(K+N)=.5*D(K+N)
6 D(K+4*N)=.5*F*D(K+3*N)+D(K+N)+D(K)
CALL DTU(Z,D(1+4*N),D(1+3*N))
Z=Z+.5*F
DO7 K=1,N
D(K+2*N)=4.5*F*D(K+3*N)
7 D(K+4*N)=.25*D(K+2*N)+.75*D(K+N)+D(K)
CALL DTU(Z,D(1+4*N),D(1+3*N))
Z=Z+.5*S
DO8 K=1,N
D(K+N)=2*F*D(K+3*N)+D(K+N)
8 D(K+4*N)=3*D(K+N)-D(K+2*N)+D(K)
CALL DTU(Z,D(1+4*N),D(1+3*N))
DO9 K=1,N
D(K+2*N)=-.5*F*D(K+3*N)-D(K+2*N)+2*D(K+N)
D(K+4*N)=D(K+4*N)-D(K+2*N)
D(K+N)=ABS(.5*A*D(K+4*N))
D(K+2*N)=ABS(D(K+2*N))
IF(ABS(D(K+4*N)).LE.R) GOTO9
IF(D(K+2*N).GT.D(K+N)) GOTO13
9 CONTINUE
IF(IS.EQ.1) GOTO11
DO10 K=1,N

```

```
      IF(D(K+2*N).GT.D(K+N)/32) GOTO2
10 CONTINUE
      S=S*2
      GOTO2
11 H=P
      T=Z
      DO12 K=1,N
12 Y(K)=D(K+4*N)
      RETURN
13 C=.5*S
      IF(ABS(C).GE.O) GOTO14
      IF(J.EQ.0) GOTO16
      S=O
      IF(P.LT.O.) S=-S
      IF(IS.EQ.1) GOTO11
      GOTO2
14 DO15 K=1,N
15 D(K+4*N)=D(K)
      Z=Z-S
      S=C
      IS=0
      GOTO2
16 L=.FALSE.
      GOTO11
      END
```

Програма для розрахунку траєкторій системи на мові Fortran

```
* THE GENERAL SOLUTION
PROGRAM INT4G
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
PARAMETER(KD=8000,LD=3)
REAL*8 U(KD,LD),X(LD),X0(LD),Y(LD,LD),V(LD),W(LD)
CHARACTER UK*7
EXTERNAL D3EQ
X0(1)=.8
X0(2)=.9
X0(3)=.8
CALL OPN6
T1=130.
T=160.
DO1 I=1,LD
1 X(I)=X0(I)
CALL SOLEQ(LD,KD,X,U,T1,T,D3EQ)
CALL RESULTATES(LD,KD,T1,T,U)
STOP
END

SUBROUTINE OPN6
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
OPEN(6,FILE='D3EQ.RES',STATUS='UNKNOWN')
RETURN
END

SUBROUTINE RESULTATES(N,M,T1,T,U)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
REAL*8 U(M,N)
OPEN(3,FILE='D3EQ.DAT',STATUS='UNKNOWN')
DO1 I=1,M
TI=(I-1)*(T-T1)/(M-1)+T1
1 WRITE(3,2)TI,U(I,1),U(I,2),U(I,3)
```

```
2 FORMAT(5E15.5)
```

```
RETURN
```

```
END
```

```
SUBROUTINE D3EQ(T,X,F)
```

```
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
```

```
REAL*8 F(3),X(3)
```

```
COMMON/PRM3/P
```

```
F(1)=-.2*X(1)+(X(3)-1)*X(2)
```

```
* F(2)=-1.08*X(2)+(X(3)+1)*X(1)
```

```
F(2)=-1.6*X(2)+(X(3)+1)*X(1)
```

```
* F(3)=-.1*X(3)-2*X(1)*X(2)+12
```

```
F(3)=-.1*X(3)-2*X(1)*X(2)+5
```

```
RETURN
```

```
END
```

```
SUBROUTINE SOLEQ(N,M,X,U,Z,V,DTU)
```

```
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
```

```
DIMENSION X(N),U(M,N)
```

```
LOGICAL OK
```

```
EXTERNAL DTU
```

```
K=0
```

```
A=.00001
```

```
H=.01
```

```
W=.00001
```

```
B=5000.
```

```
K=0
```

```
L=1
```

```
J=0
```

```
T=0.
```

```
CALL MERSON(T,Z,X,N,A,H,W,J,OK,DTU)
```

```
DO2 I=1,N
```

```
2 U(1,I)=X(I)
```

```
S=(V-Z)/(M-1)
```

```
T=Z
```

```

DO4 L=2,M
T1=T+S
CALL MERSON(T,T1,X,N,A,H,W,J,OK,DTU)
T=T1
DO3 I=1,N
3 U(L,I)=X(I)
4 CONTINUE
RETURN
END

SUBROUTINE MERSON(T,Q,Y,N,A,H,O,J,L,DTU)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
REAL*8 D(500)
LOGICAL L
REAL*8 Y(N)
DATA R/1.E-13/
L=.TRUE.
N4=4*N
N3=3*N
N2=2*N
N41=N4+1
N31=N3+1
DO1 K=1,N
1 D(K+N4)=Y(K)
Z=T
S=H
IS=0
2 P=S
C=Q-Z
IF(ABS(S).LT.ABS(C)) GOTO3
S=C
IF(ABS(C/P).LT.R) GOTO11
IS=1
3 DO4 K=1,N
4 D(K)=D(K+N4)
F=S/3

```

CALL DTU(Z,D(N41),D(N31))

Z=Z+F

DO5 K=1,N

KN=K+N

KN3=K+N3

KN4=K+N4

D(KN)=F*D(KN3)

5 D(KN4)=D(KN)+D(K)

CALL DTU(Z,D(N41),D(N31))

DO6 K=1,N

KN=K+N

KN3=K+N3

KN4=K+N4

D(KN)=.5*D(KN)

6 D(KN4)=.5*F*D(KN3)+D(KN)+D(K)

CALL DTU(Z,D(N41),D(N31))

Z=Z+.5*F

DO7 K=1,N

KN=K+N

KN2=K+N2

KN3=K+N3

KN4=K+N4

D(KN2)=4.5*F*D(KN3)

7 D(KN4)=.25*D(KN2)+.75*D(KN)+D(K)

CALL DTU(Z,D(N41),D(N31))

Z=Z+.5*S

DO8 K=1,N

KN=K+N

KN2=K+N2

KN3=K+N3

KN4=K+N4

D(KN)=2*F*D(KN3)+D(KN)

8 D(KN4)=3*D(KN)-D(KN2)+D(K)

CALL DTU(Z,D(N41),D(N31))

```

DO9 K=1,N
KN=K+N
KN2=K+N2
KN3=K+N3
KN4=K+N4
D(KN2)=-.5*F*D(KN3)-D(KN2)+2*D(KN)
D(KN4)=D(K+N4)-D(KN2)
D(KN)=ABS(.5*A*D(KN4))
D(KN2)=ABS(D(KN2))
IF(ABS(D(KN4)).LE.R) GOTO9
IF(D(KN2).GT.D(KN)) GOTO13
9 CONTINUE
IF(IS.EQ.1) GOTO11
DO10 K=1,N
KN=K+N
KN2=K+N2
IF(D(KN2).GT.D(KN)/32) GOTO2
10 CONTINUE
S=S*2
GOTO2
11 H=P
T=Z
DO12 K=1,N
KN4=K+N4
12 Y(K)=D(KN4)
RETURN
13 C=.5*S
IF(ABS(C).GE.O) GOTO14
IF(J.EQ.0) GOTO16
S=O
IF(P.LT.O.) S=-S
IF(IS.EQ.1) GOTO11
GOTO2
14 DO15 K=1,N
KN4=K+N4
15 D(KN4)=D(K)

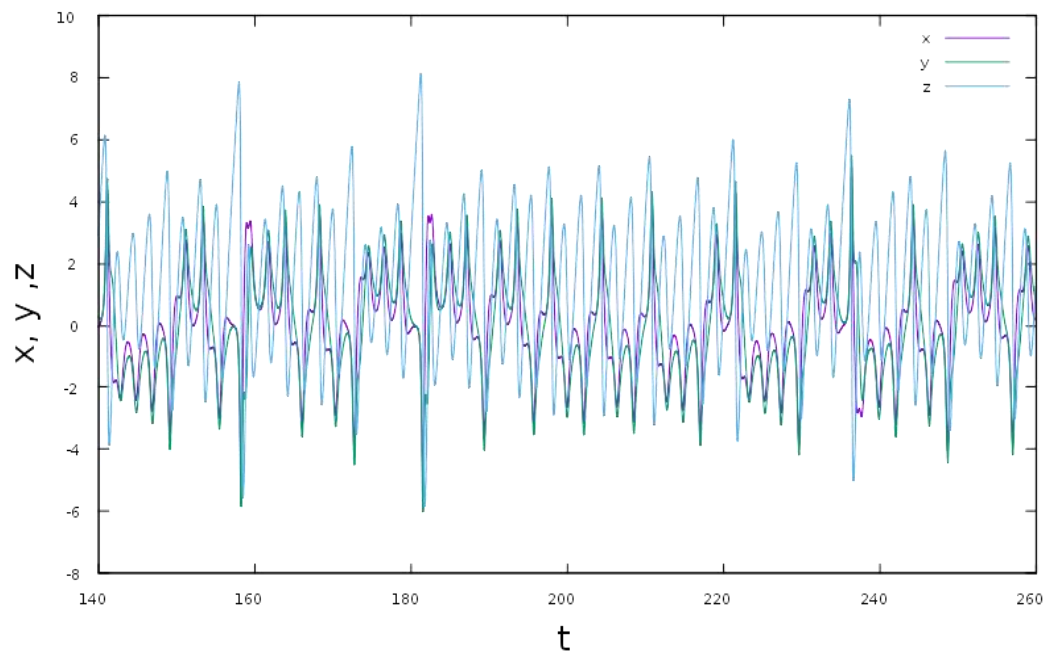
```



```

Z=Z-S
S=C
IS=0
GOTO2
16 L=.FALSE.
GOTO11
END

```



Puc.6. ($\sigma=1.6$)

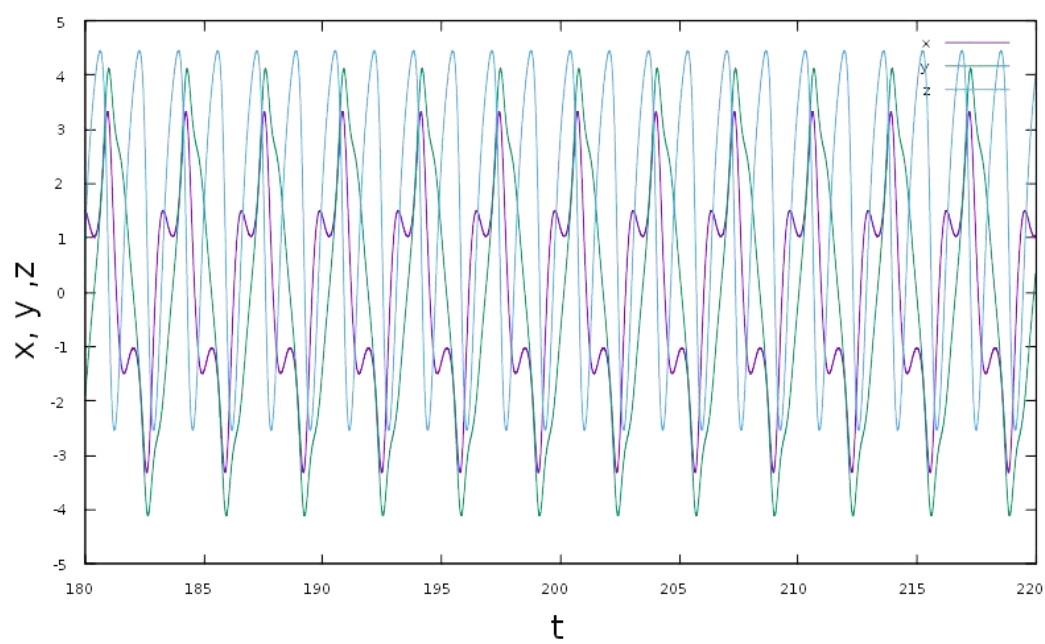


Рис. 7

($\sigma=0.9$)

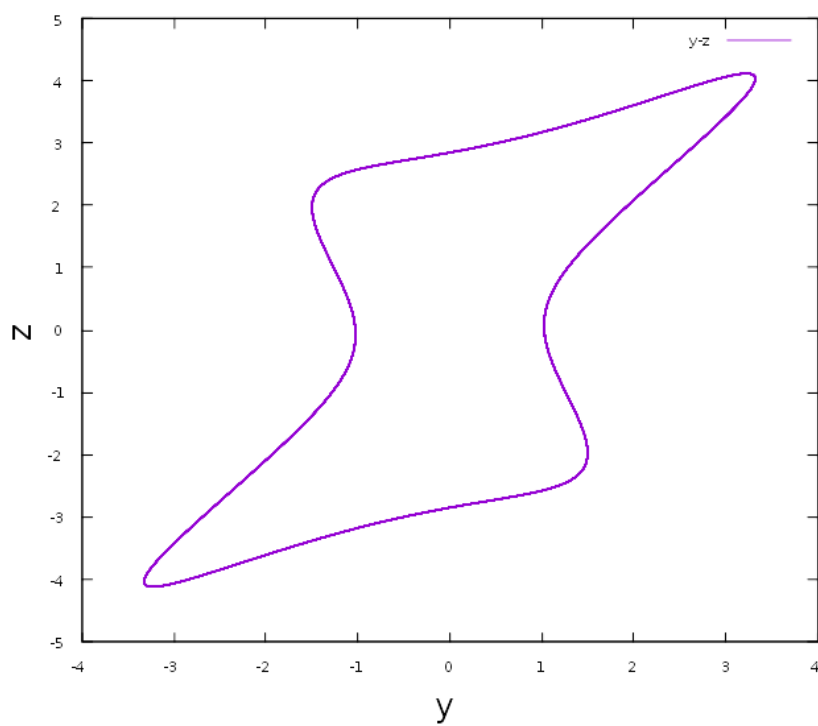


Рис. 8

(Одинарний граничний цикл)

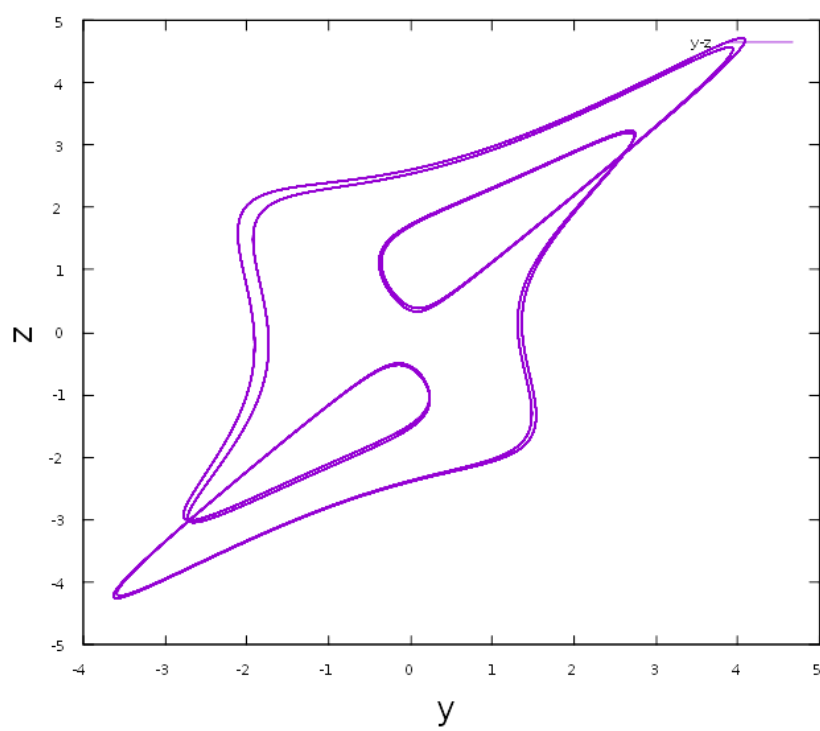


Рис.9

($\sigma=1.6\sigma=1.245$ Подвійний граничний цикл)

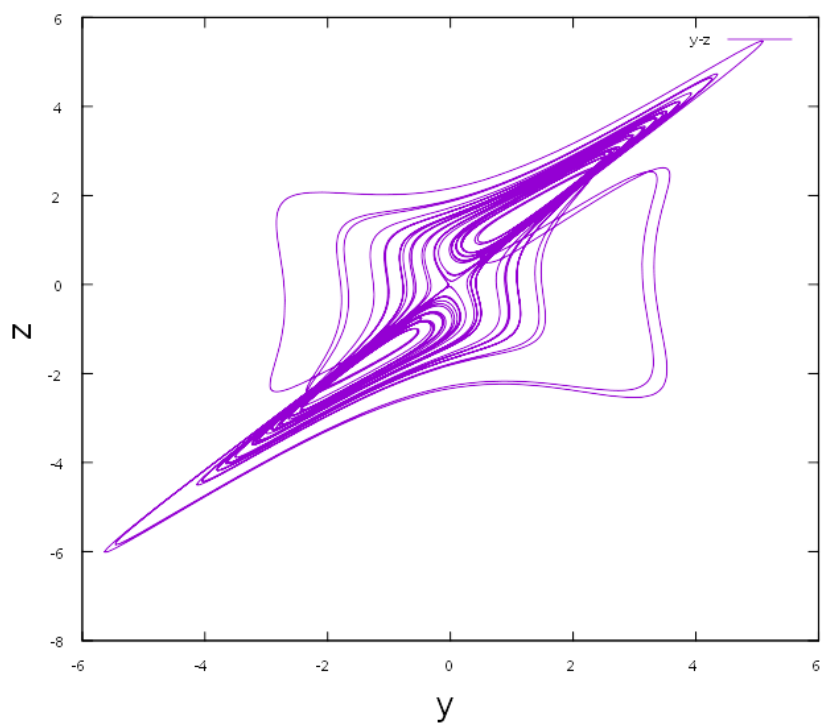


Рис.10

($\sigma=1.6$. Дивный аттрактор.)

10. ЛІТЕРАТУРА

- [1]: Анісімов І.О. «Синергетика»;
- [2]: Сугаков В.Й. «Основы синергетики»;
- [3]: Стаття «Lyapunov exponents from time series» Joachim Holzfuss та Ulrich Parlitz;
- [4]: Стаття «Конструирование моделей динамических систем со странным аттрактором», Гачок П.В. ;
- [5]: Стаття «The Lyapunov characteristic exponents of dissipative systems with a strange attractor», Рудик А.Б.;
- [6]: Стаття «A Numerical Approach to Ergodic Problem of Dissipative Dynamical Systems», Ippei Shimada та Tomomasa Nagashima;
- [7]: <https://studfile.net/preview/5064502/page:7/> , «Диференціальне рівняння Нав'є – Стокса»;
- [8]: <https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A1%D0%B8%D0%BD%D0%B5%D1%80%D0%B3%D0%B5%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0>
- [9]: [https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D1%96%D0%B4%D0%BA%D1%80%D0%B8%D1%82%D0%B0_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0_\(%D1%82%D0%B5%D0%BE%D1%80%D1%96%D1%8F_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC\)](https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D1%96%D0%B4%D0%BA%D1%80%D0%B8%D1%82%D0%B0_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0_(%D1%82%D0%B5%D0%BE%D1%80%D1%96%D1%8F_%D1%81%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B5%D0%BC))
- [10]: https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D0%9E%D1%81%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%B4%D1%86%D0%B0
- [11]: https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%94%D0%B8%D0%B2%D0%BD%D0%B8%D0%B9_%D0%B0%D1%82%D1%80%D0%B0%D0%BA%D1%82%D0%BE%D1%80_%D0%9B%D0%BE%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D0%B0
- [12]: https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%96%D0%B4%D0%BA%D0%BE%D0%B2%D0%B0_%D0%A1%D0%BC%D0%B5%D0%B9%D0%BB%D0%B0
- [13]: https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A6%D0%B5%D0%BD%D1%82%D1%80%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D0%B5_%D0%BC%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D0%BE%D0%B1%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%B8%D0%B5
- [14]: <https://studfile.net/preview/5199407/page:16/>
- [15]: Kuznetsov, Nikolay; Reitmann, Volker (2020). Attractor Dimension Estimates for Dynamical Systems: Theory and Computation . Cham: Springer.

- [16]: Cvitanović P., Artuso R., Mainieri R., Tanner G. and Vattay G. Chaos: Classical and Quantum Niels Bohr Institute, Copenhagen 2005 – textbook about chaos available under Free Documentation License
- [17]: Freddy Christiansen & Hans Henrik Rugh (1997). "Computing Lyapunov spectra with continuous Gram–Schmidt orthonormalization" . Nonlinearity. 10 (5): 1063–1072.
arXiv : chao-dyn/9611014 . Bibcode : 1997Nonli..10.1063C . doi : 10.1088/0951-7715/10/5/004 . Archived from the original on 2006-04-25.
- [18]: Salman Habib & Robert D. Ryne (1995). "Symplectic Calculation of Lyapunov Exponents", Physical Review Letters. 74 (1): 70–73. arXiv : chao-dyn/9406010 . Bibcode : 1995PhRvL..74...70H . doi : 10.1103/PhysRevLett.74.70 . PMID 10057701
- [19]: Govindan Rangarajan; Salman Habib & Robert D. Ryne (1998). "Lyapunov Exponents without Rescaling and Reorthogonalization", Physical Review Letters. 80 (17): 3747–3750. arXiv : chao-dyn/9803017 . Bibcode : 1998PhRvL..80.3747R . doi : 10.1103/PhysRevLett.80.3747 .
- [20]: X. Zeng; R. Eykholt & R. A. Pielke (1991). "Estimating the Lyapunov-exponent spectrum from short time series of low precision", Physical Review Letters. 66 (25): 3229–3232. Bibcode : 1991PhRvL..66.3229Z . doi : 10.1103/PhysRevLett.66.3229 PMID 10043734 .
- [21]: E Aurell; G Boffetta; A Crisanti; G Paladin; A Vulpiani (1997). "Predictability in the large: an extension of the concept of Lyapunov exponent", J. Phys. A: Math. Gen. 30 (1): 1–26. arXiv : chao-dyn/9606014 . Bibcode : 1997JPhA...30....1A . doi : 10.1088/0305-4470/30/1/003 .
- [22]: F Ginelli; P Poggi; A Turchi; H Chaté; R Livi; A Politi (2007). "Characterizing Dynamics with Covariant Lyapunov Vectors" (PDF). Physical Review Letters. 99 (13): 130601.
arXiv : 0706.0510 . Bibcode : 2007PhRvL..99m0601G . doi : 10.1103/PhysRevLett.99.130601 . hdl : 2158/253565 . PMID 17930570 . Archived from the original (PDF) on 2008-10-31.
- [23]: Cencini, M.; et al. (2010). World Scientific (ed.). Chaos From Simple models to complex systems. ISBN .

- [24]: Temam, R. (1988). *Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*. Cambridge: Springer-Verlag.
- [25]: N.V. Kuznetsov; G.A. Leonov (2005). On stability by the first approximation for discrete systems (PDF). 2005 International Conference on Physics and Control, PhysCon 2005. Proceedings Volume 2005. pp. 596–599. doi : 10.1109/PHYCON.2005.1514053 . ISBN .
- [26]: G.A. Leonov; N.V. Kuznetsov (2007). "Time-Varying Linearization and the Perron effects" (PDF). *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 17 (4): 1079–1107. Bibcode : 2007IJBC...17.1079L . CiteSeerX 10.1.1.660.43 . doi : 10.1142/S0218127407017732
- [27]: Kaplan, J. & Yorke, J. (1979). "Chaotic behavior of multidimensional difference equations". In Peitgen, H. O. & Walther, H. O. (eds.). *Functional Differential Equations and Approximation of Fixed Points*. New York: Springer. ISBN .
- [28]: Pesin, Y. B. (1977). "Characteristic Lyapunov Exponents and Smooth Ergodic Theory". *Russian Math. Surveys*. 32 (4): 55–114. Bibcode : 1977RuMaS..32...55P . doi : 0.1070/RM1977v032n04ABEH001639 .
- [29]: Kuznetsov, N.V. (2016). "The Lyapunov dimension and its estimation via the Leonov method". *Physics Letters A*. 380 (25–26): 2142–2149. arXiv : 1602.05410 . Bibcode : 2016PhLA..380.2142K . doi : 10.1016/j.physleta.2016.04.036 .
- [30]: Kuznetsov, N.V.; Alexeeva, T.A.; Leonov, G.A. (2016). "Invariance of Lyapunov exponents and Lyapunov dimension for regular and irregular linearizations". *Nonlinear Dynamics*. 85 (1): 195–201. arXiv : 1410.2016 . doi : 10.1007/s11071-016-2678-4
- [31]: Miller, R. H. (1964). "Irreversibility in Small Stellar Dynamical Systems". *The Astrophysical Journal*. 140: 250. Bibcode : 1964ApJ...140..250M . doi : 10.1086/147911 .
- [32]: Benettin, G.; Galgani, L.; Giorgilli, A.; Strelcyn, J. M. (1980). "Lyapunov Characteristic Exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1: Theory". *Meccanica*. 15: 9–20. doi : 10.1007/BF02128236
- [33]: Benettin, G.; Galgani, L.; Giorgilli, A.; Strelcyn, J. M. (1980). "Lyapunov Characteristic Exponents for smooth dynamical systems and for

hamiltonian systems; A method for computing all of them. Part 2: Numerical application",. *Meccanica*. 15: 21–30.

doi : 10.1007/BF02128237

[34]: Shimada, I.; Nagashima, T. (1979). "A Numerical Approach to Ergodic Problem of Dissipative Dynamical Systems",. *Progress of Theoretical Physics*. 61 (6): 1605–1616. Bibcode : 1979PTPh..61.1605S . doi : 10.1143/PTP.61.1605 .

[35]: Eckmann, J. -P.; Ruelle, D. (1985). "Ergodic theory of chaos and strange attractors" . *Reviews of Modern Physics*. 57 (3): 617–656. Bibcode : 1985RvMP...57..617E . doi : 10.1103/RevModPhys.57.617 .

[36]: Bryant, P.; Brown, R.; Abarbanel, H. (1990). "Lyapunov exponents from observed time series",. *Physical Review Letters*. 65 (13): 1523–1526. Bibcode : 1990PhRvL..65.1523B . doi : 10.1103/PhysRevLett.65.1523 . PMID 10042292 .

[37]: Brown, R.; Bryant, P.; Abarbanel, H. (1991). "Computing the Lyapunov spectrum of a dynamical system from an observed time series",. *Physical Review A*. 43 (6): 2787–2806. Bibcode : 1991PhRvA..43.2787B . doi : 10.1103/PhysRevA.43.2787 . PMID 9905344 .

[38]: Bryant, P. H. (1993). "Extensional singularity dimensions for strange attractors",. *Physics Letters A*. 179 (3): 186–190. Bibcode : 1993PhLA..179..186B . doi : 10.1016/0375-9601(93)91136-S

[39]: Abarbanel, H.D.I.; Brown, R.; Kennel, M.B. (1992). "Local Lyapunov exponents computed from observed data",. *Journal of Nonlinear Science*. 2 (3): 343–365. Bibcode : 1992JNS.....2..343A . doi : 10.1007/BF01208929 .

[40]: See, e.g., Pecora, L. M.; Carroll, T. L.; Johnson, G. A.; Mar, D. J.; Heagy, J. F. (1997). "Fundamentals of synchronization in chaotic systems, concepts, and applications",. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 7 (4): 520–543. Bibcode : 1997Chaos...7..520P . doi : 10.1063/1.166278 . PMID 12779679 .

[41]: А.В. Дмитриев. Регулярная и хаотическая динамика социально-экономических систем. М.-Ижевск.: Институт компьютерных исследований, 2016.

[42]: Г.Г. Малинецкий. Математические основы синергетики: хаос, структуры, вычислительный эксперимент. М.: Изд-во ЛКИ, 2007.

- [43]: Г.Г. Малинецкий, А.Б. Потапов, А.В. Подлазов. Нелинейная динамика: подходы, результаты, надежды. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2016.
- [44]: И.В. Вовк, В.Т. Гринченко, В.Т. Мацыпура, А.А. Снарский. Дюжина лекций о фракталах: от объекта восхождения к инструменту познания, М.: ЛЕНАНД, 2018.
- [45]: А.И. Олемской. Синергетика сложных систем: феноменология и статистическая теория, М.: КРАСАНД, 2009.
- [46]: І.О. Анісімов. Коливання та хвилі. - К.: Академпрес, 2003.
- [47]: І.О. Анісімов. Синергетика. К.: ВПЦ «Київський університет», 2014.
- [48]: Э.Скотт. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. М., Сов. радио, 1977.
- [49]: .А.Лихтенберг, М.Либерман. Регулярная и стохастическая динамика. М., Мир, 1984.
- [50]: В.А.Васильев, Ю.М.Романовский, В.Г.Яхно. Автоволновые процессы. М., Наука, 1987.
- [51]: Г.М.Заславский, Р.З.Сагдеев. Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988.
- [52]: Г.З.Гершуни, Е.М.Жуховицкий, А.А.Непомнящий. Устойчивость конвективных течений. М., Наука, 1989.
- [53]: В.Мишин, Ю.Я.Ружин, В.А.Телегин. Взаимодействие электронных потоков с ионо-сферной плазмой. Л., Гидрометеиздат, 1989.
- [54]: А.Ю.Лоскутов, А.С.Михайлов. Введение в синергетику. М., Наука, 1990.
- [55]: Г.Николис, И.Пригожин. Понимание сложного. М., Мир, 1990.
- [56]: Ю.Л.Климонтович. Турбулентное движение и структура хаоса. М., Наука, 1990.
- [57]: W.Horton, Y.-H.Ishikawa. Chaos and Structures in Nonlinear Plasmas. Singapore -New Jersey -London -Hong Kong, World Scientific Publishing, 1996.
- [58]: Пределы предсказуемости. П/ред. Ю.А.Кравцова. М., ЦентрКом, 1997.
- [59]: М.И.Рабинович, Д.И.Трубецков. Введение в теорию колебаний и волн. R&C Dynamics, 2000.
- [60]: Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Гидродинамика. М., Физматлит, 2001.
- [61]: М.Табор. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. М., УРСС, 2001.
- [62]: В.Й.Сугаков. Основы синергетики. К., Обереги, 2001.

- [63]: Ю.С.Сигов. Вычислительный эксперимент: мост между прошлым и будущим физики плазмы. М., Физматлит, 2001.
- [64]: И.Пригожин. От существующего к возникающему: время и сложность в физических науках. М., УРСС, 2002.
- [65]: П.Гленсдорф, И.Пригожин. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. М., УРСС, 2003.
- [66]: Н.В.Карлов, Н.А.Кириченко. Колебания, волны, структуры. М., Физматлит, 2003.
- [67]: Д.И.Трубецков. Введение в синергетику. Хаос и структуры. М., УРСС, 2004.
- [68]: Д.И.Трубецков, Е.С.Мchedлова, Л.В.Красичков. Введение в теорию самоорганизации открытых систем. М., Физматлит, 2005.
- [69]: Г.Хакен. Информация и самоорганизация. М., УРСС, 2005. С.П.Кузнецов. Динамический хаос. М., Физматлит, 2006.
- [70]: А.Ю.Лоскутов, А.С.Михайлов. Основы теории сложных систем. М. – Ижевск. НИЦ «РСД», Ин-т компьютерных исследований, 2007.
- [71]: І.О.Анісімов. Коливання та хвилі. К., ВПЦ "Київський університет", 2009.