

Міністерство освіти та науки України  
Національний університет “Києво-Могилянська академія”  
Факультет природничих наук  
Кафедра фізико-математичних наук

**Кваліфікаційна робота**  
освітній ступінь - бакалавр

**на тему: «БІФУРКАЦІЇ ПЕРІОДИЧНИХ РЕЖИМІВ ДИНАМІЧНОЇ  
СИСТЕМИ В АКТИВНОМУ СЕРЕДОВИЩІ»**

Виконала студентка 4 року навчання  
спеціальності  
104 Фізика та астрономія  
Шуляк Анастасія Валентинівна

Керівник Жохін А.С.,  
кандидат фізико-математичних наук,  
старший викладач

Рецензент \_\_\_\_\_  
(прізвище та ініціали)

Кваліфікаційна робота захищена  
з оцінкою \_\_\_\_\_

Секретар ЕК \_\_\_\_\_

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20 \_\_\_\_ р.

## 3MICT

I. ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ II.....	6
2.1 Процес біогідролізу целюлози з синтезом ферментів – як приклад активного середовища.....	15
2.2 Опис моделі процесу біогідролізу з регуляцією синтезу ферменту.....	18
РОЗДІЛ III.....	21
3.1 Коливальний режим реакцій гідролізу у відкритих умовах.....	25
3.2 Поява режиму дивного атрактора – детермінованого хаотичного режиму.....	26
3.3 Каскад біфуркацій подвоєння періоду граничного циклу.....	28
IV. РОЗРАХУНКИ.....	34
V. ВИСНОВКИ.....	40
VI. СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	41
VII. ДОДАТКИ.....	44

## I. ВСТУП

Мета роботи – побудувати модель активного середовища в нерівноважному стані. У роботі будемо моделювати процес гідролізу целюлози мікроорганізмами.

Цей процес є перетворенням целюлози в глюкозу і ріст на ній клітин мікроорганізмів. Трансформація целюлози відбувається з участю ферментативного каталізу.

Синтез ферментів відбувається за допомогою мікроорганізмів та регулюється в залежності від концентрації целюлози і глюкози.

Використовуємо закони ферментативного каталізу та закон масового балансу.

Моделюємо активне середовище за допомогою 6 нелінійних диференціальних рівнянь. Така математична модель – система нелінійних рівнянь описує динамічну систему, що знаходиться у відкритих умовах і описує біореактор.

В систему надходить субстрат – целюлоза, вимиваються і розпадаються продукти реакцій, ферменти і клітини мікроорганізмів.

Нелінійність процесів та умови відкритості дають системі знаходитися в різних кінетичних режимах, які встановлюються на довгих часах еволюції системи. Система може виходити в динамічну рівновагу з оточуючим середовищем.

В термінах динамічних систем такі стани визначаються граничними циклами та стаціонарними (фіксованими) точками.

Граничні цикли – це локально стійкі періодичні розв'язки, які представлені у фазовому просторі замкнутими кривими.

Рівноважні стани динамічної системи можуть бути представлені стаціонарними стійкими точками і граничними стійкими циклами.

Стаціонарні фіксовані точки та стійкі граничні цикли (періодичні розв'язки) це два типи рівноваги динамічних систем, які часто вивчаються.

В рівноважному стані система, яка локально виводиться з рівноваги повертається з часом в рівновагу.

Взаємодія нелінійного активного середовища з оточенням може привести до автоколивань. В нашому випадку це будуть коливання концентрації складових системи – субстратів, клітин, ферментів і продуктів реакції.

Ми вивчаємо систему в режимі автоколивань.

Автоколивання виникають при відповідному наборі параметрів моделі системи.

Наша мета – знайти перехід від рівноважних періодичних коливальних режимів граничного циклу, до хаотичних нерівноважних коливальних режимів дивного атрактора.

Такий режим формується у фазовому просторі в результаті біфуркації подвоєння періодів граничного циклу.

Важливу роль у вивченні нелінійних динамічних систем є знаходження атракторів у його фазовому просторі. Атрактор це частина фазового простору до якого з часом притягуються траєкторії динамічної системи.

Атракторами можуть бути стійкі точки та граничні цикли (періодичні траєкторії) – це є рівноважні атрактори, і в цьому випадку динамічна система буде перебувати у рівноважному динамічному стані.

Є тип дивного атрактора – множини у фазовому просторі фрактальної розмірності.

В режимі дивного атрактора система перебуває в нерівноважному стані.

Один із сценаріїв формування дивного атрактора є сценарій Фейгенбаума.

Це формування дивного атрактора з граничного циклу через безмежну послідовність біфуркацій подвоєння періоду граничного циклу.

Мета дослідження у даній роботі – знайти таку послідовність точок біфуркацій подвоєння періоду граничного циклу:

- 1) знайти режим рівноважних періодичних автоколивань;
- 2) знайти режим нерівноважних автоколивань дивного атрактора;
- 3) знайти перші точки в послідовності біфуркацій подвоєння періоду, в результаті яких рівноважний періодичний граничний цикл переходить в нерівноважний дивний атрактор.

Ми вивчаємо формування кінетичних режимів через зміну параметрів системи.

Спочатку виводимо систему на оптимальний режим функціонування і фіксуємо всі параметри системи крім одного. При зміні цього параметру система змінює свою кінетичну поведінку. Також при цьому виникають біфуркації траєкторій, коли народжується новий розв'язок у вигляді граничного циклу подвоєного періоду.

Значення параметра, при яких відбувається біфуркація, називається точкою біфуркації.

В якості параметра, який ми міняємо, вибираємо параметр  $\alpha$  (Альфа), який відповідає за вимивання і деструкцію ферменту із системи.

Змінюючи цей параметр від 20 до 23.6, ми отримуємо перехід від граничного циклу до дивного атрактора, від динамічного рівноважного стану система переходить до динамічного нерівноважного стану детермінованого хаосу, який активно вивчається в багатьох галузях нелінійної фізики і природознавства.

## РОЗДІЛ II

### Динамічні системи

Опис динамічної системи може бути приведений за допомогою диференціальних рівнянь, дискретних відображень, інтегральних рівнянь, теорії графів, теорії ланцюгів маркова. Заданою вважається динамічна система, якщо введені координати системи, які дозволяють визначити її стан, та вказаний еволюційний оператор, що дозволить вирішити задачу зміни стану системи у часі.

Розглянемо випадок, коли задані початкові умови повністю можуть визначити поведінку системи в наступні моменти часу. Саме такі системи називаються динамічними. Зазвичай динамічна система задається системою звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.1)$$

$\frac{n}{2}$  ступенів вільності притаманні даній системі. Щоб виділити конкретну фазову траєкторію, для початку потрібно задати початкові умови:

$$t = t_0: \quad x_1 = x_{10}, \quad x_2 = x_{20}, \dots, x_n = x_{n0}. \quad (2.2)$$

Завдяки заданій умові можемо виділити фазову траєкторію, що проходить через точку фазового простору  $P_0$  з координатами  $x_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ .

Якщо розглядати більш формальний варіант, то динамічну систему визначають наступним чином. Нехай ми маємо еволюційний оператор  $T^t$ .

Деякий початковий стан системи  $P_0$  в момент часу  $t_0$  еволюційних оператор  $T^t$  перетворює в стан системи  $P$  в момент часу  $t$ ,  $T^t: P_0 \Rightarrow P$ . Тоді систему, еволюційний оператор якої задовольняє співвідношення  $T^t T^\tau = T^{t+\tau}$  називають динамічною системою. Водночас еволюційні оператори, що відповідають різним інтервалам часу комутують:  $T^t T^\tau = T^\tau T^t$ .

Еволюційний оператор є мультиплікативним, а час є адитивним.

Постановка деякої задачі Коші може слугувати заданням динамічної системи.

Задача Коші, а точніше її рішення допомагає у виділенні деякої траєкторії, яка проходить через задану точку фазового простору  $P_0$ . Рух фазової точки по цій траєкторії здійснюється «вперед» за часом  $t > t_0$ , починаючи з заданої початкової точки. Так само, є можливість знайти ті траєкторії, які починаються в моменти часу  $t < t_0$  та в момент  $t = t_0$ . Такі рішення еквівалентні рішенням задачі Коші для руху «назад» за часом. Отримати такий зворотній рух ми можемо, якщо вирішимо задачу Коші для системи  $\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , в якій знак часу змінений на протилежний:  $t \rightarrow -t$ . Саме рішення прямої та зворотної задач Коші допомагають у побудові повних фазових траєкторій динамічної системи в межах від їх природного початку до їх природного кінця, але природній початок та природній кінець не завжди існують.

Якщо розглядати випадок динамічної системи, то фазові траєкторії не перетинаються.

## Особливі точки

Як фазова траєкторія є важливою характеристикою динамічної системи, так і особливі точки. Це такі точки, що представляють у фазовому просторі положення рівноваги системи. У випадку автономної динамічної системи, яка задається рівняннями:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.3)$$

Відповідно особливі точки визначаються наступною системою рівнянь:

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.4)$$

## Ітерації відображень

Ітероване відображення зручне у використанні під час роботи зі складними динамічними системами. Якщо розглядати одновимірне точкове відображення, що задається у вигляді:

$$y_{n+1} = f(y_n) \quad (2.5)$$

Ітероване відображення – є похідним від (1). Не будемо розглядати всю послідовність  $\{y_n\}$ . Достатньо буде дослідити її певну підпослідовність. Частіше за все, достатньо щоб члени підпослідовності стояли один від одного на деякому фіксованому числі номерів  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Коли  $k = 1$ , будемо мати вихідне відображення (2.5), далі при  $k = 2$  будемо робити два кроки, тому вихідне відображення застосуємо двічі, тобто:

$$y_{n+2} = f(y_{n+1}) = f(f(y_n)) \quad (2.6)$$

Двократно ітерованим відображенням називається функція, що стоїть у правій частині (2.6), позначається  $f^2(y)$ . Так само можемо побудувати ітероване відображення для більшої кратності:

$$f^n(y) \equiv f(f(\dots f(y) \dots))$$

Ітероване відображення допомагає нам дослідити важливі закономірності у поведінці динамічних систем, закономірності, які ми можемо не побачити під час дослідження вихідного відображення.

## Унімодальні відображення

Досліджуючи конкретні динамічні системи виникає відображення виду

$$y_{n+1} = f(y_n). \quad (2.7)$$

Ці відображення включають в себе додаткові параметри:

$$y_{n+1} = f(y_n, \lambda). \quad (2.8)$$

Якщо змінювати параметр  $\lambda$  так само можуть й змінюватись число та характер стійкості нерухомих точок. Розмірність й стійкість циклів також будуть змінюватись. Аналіз безлічі різноманітних конкретних відображень (2.8) показав, що якщо функція  $f(y)$  на деякому відрізку  $[a, b]$  неперервна



разом зі своєю першою похідною, та якщо ця функція має на цьому відрізку один максимум і здійснює відображення відрізка в себе, тоді змінивши параметр  $\lambda$  характер поведінки ітерацій, зміна числа та зміна типу циклів при достатньо великих номерах ітерацій є універсальним, що не залежить від конкретного виду функції  $f(y)$ .

Розглянемо відображення П.Стайна як приклад:

$$y_{n+1} = \lambda \sin(\pi y_n), \quad \lambda \leq 1, \quad (2.9)$$

Це відображення здійснює відображення відрізка  $[0,1]$  в себе. Логістичне відображення або відображення Фейгенбаума є більш простим відображенням, що так само відображає відрізок  $[0,1]$  в себе. Логістичне відображення має вид:

$$y_{n+1} = \lambda y_n(1 - y_n), \quad \lambda \leq 4. \quad (2.10)$$

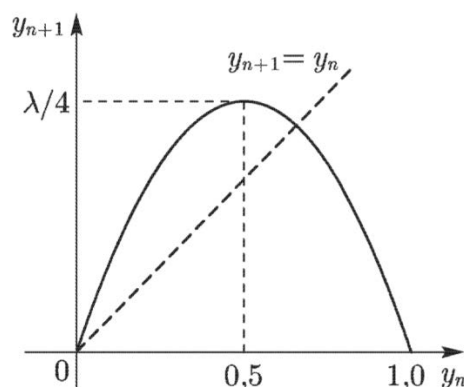
Відображення  $y_{n+1} = f(y_n)$ , що має єдиний максимум називається унімодальним відображенням. У випадку зміни параметру  $\lambda$  поведінка всіх унімодальних відображень з гладким максимумом, еквівалентна поведінці найпростішого з них – відображення Фейгенбаума.

## Відображення Фейгенбаума

Розглянемо відображення та його властивості

$$y_{n+1} = \lambda y_n(1 - y_n), \quad \lambda \leq 4. \quad (2.10)$$

Наступний графік демонструє вид цього відображення



Співвідношення (2.10) задає відображення відрізка  $[0,1]$  в себе при  $0 \leq \lambda \leq 4$ . При  $y = 1/2$  права частина відображення (2.10) досягає

максимального значення, що рівне  $\lambda/4$ . Тому далі обмежимося дослідженням властивостей відображення при  $0 \leq \lambda \leq 4$ . Інакше виникає режим неконтрольованого росту елементів послідовності, щоб це побачити достатньо побудувати сходи Ламерея.

Наше задане відображення (2.10) завжди має дві нерухомі точки:

$$y_1 = 0; \quad y_2 = 1 - \frac{1}{\lambda}. \quad (2.11)$$

Друга нерухома точка потрапляє в область від'ємних значень  $y$  при  $\lambda < 1$ .

Тоді на відрізку  $[0,1]$  залишається єдина нерухома точка  $y_1 = 0$ .

Застосуємо критерій:

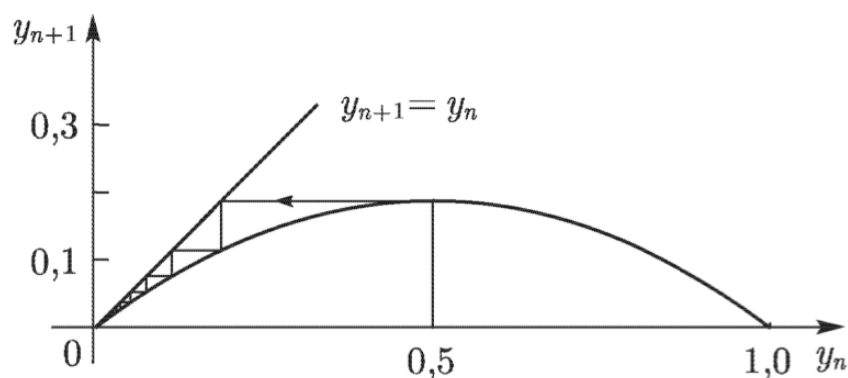
$$\left| \frac{df}{dy} \right|_{y=y_c} < 1, \quad (2.12)$$

Та разом з тим перевіримо, що ця нерухома точка  $y_1 = 0$  стійка при  $\lambda < 1$ :

$$\left| \frac{df(y)}{dy} \right|_{y=y_1} = \lambda |1 - 2y_1| = \lambda < 1. \quad (2.13)$$

При будь-яких початкових умовах ( $0 \leq y \leq 1$ ) послідовність, що задається відображенням (2.10) сходиться до  $y = y_1 = 0$ .

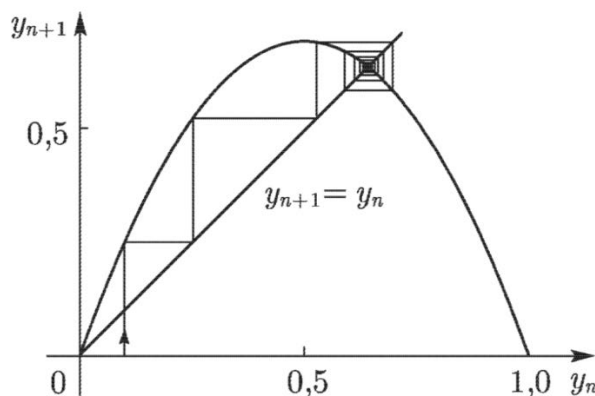
На наступному графіку показана побудова сходів Ламерея, що сходяться до  $y = 0$  при  $\lambda < 1$ .



Якщо розглядати умову  $\lambda = 1$ , то ці точки сходяться в одну, двократну  $y = 0$ . Далі розглянемо умову  $\lambda > 1$ . Тоді утворюються дві нерухомі точки на відрізку  $[0,1]$ . Точка  $y = y_1 = 0$  є нестійкою при  $\lambda > 1$ . Розглянемо критерій стійкості для другої нерухомої точки  $y_2$  та отримаємо:

$$\left| \frac{df(y)}{dy} \right|_{y=y_2} = \lambda|1 - 2y_2| = |2 - \lambda|. \quad (2.14)$$

Можемо зробити висновок, що нерухома точка  $y_2 = 1 - 1/\lambda$  є стійкою при  $1 < \lambda < 3$ . Отже, в цьому інтервалі значень параметру  $\lambda$  будь-яка послідовність буде зводитись до  $y = y_2$ . Графік демонструє побудову послідовності  $\{y_n\}$  для  $1 < \lambda < 3$ :



Нерухома точка  $y_2$  втрачає стійкість при переході значення параметру  $\lambda$  через  $\lambda_1 = 3$ . Тобто більше немає стійких нерухомих точок на відрізку  $[0,1]$ . Також всі точки відображення залишаються на тому ж відрізку  $[0,1]$ . Отже, система здійснює фінітний рух, але при тому не має стійкого положення рівноваги.

Дослідимо характер біфуркації, що відбувається під час переходу параметра через значення  $\lambda_1 = 3$ . Для цього нам допоможе ітероване відображення:

$$y_{n+2} = f^2(y_n) = \lambda y_{n+1}(1 - y_{n+1}) = \lambda^2 y_n(1 - y_n)(1 - \lambda y_n + \lambda y_n^2). \quad (2.15)$$

Будемо шукати нерухомі точки. Ці точки повинні задовольняти наступне рівняння 4-го степеню:

$$y = \lambda^2 y(1 - y)(1 - \lambda y + \lambda y^2) \quad (2.16)$$

Перевіримо, що точки  $y_1$  та  $y_2$  є коренями. Оскільки нерухомі точки вихідного відображення завжди є нерухомими точками будь-якого наступного ітерованого відображення, то маємо корені  $y_1$  та  $y_2$ . Знаючи

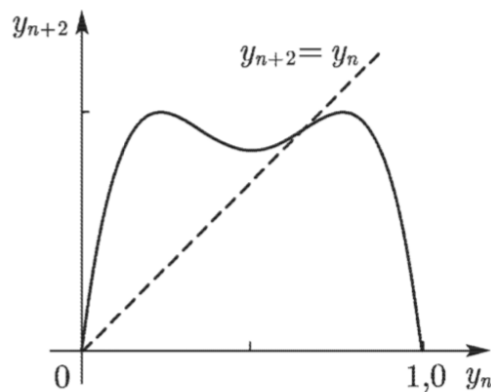
корені рівняння (2.16) в явній формі, то можемо це рівняння задати у вигляді:

$$y(\lambda y - \lambda + 1)[\lambda^2 y^2 - \lambda(\lambda + 1)y + \lambda + 1] = 0. \quad (2.17)$$

За умови обернення в нуль перших двох доданків (2.17) маємо корені  $y_1$  та  $y_2$ . Третій множник набуває дійсних коренів при  $\lambda \geq 3$ , отримаємо:

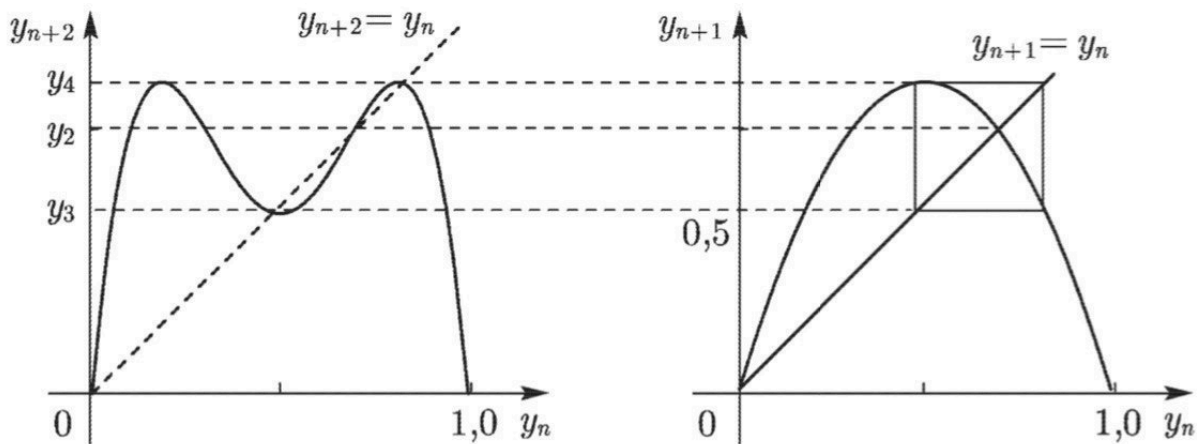
$$y_{3,4} = \frac{1}{2\lambda^2} \left[ \lambda(\lambda + 1) \pm \sqrt{\lambda^2(\lambda + 1)(\lambda - 3)} \right]. \quad (2.18)$$

Маємо трикратний корінь  $y_2 = y_3 = y_4 = 2/3$  при  $\lambda = \lambda_1 = 3$ . При збільшенні  $\lambda$  виникає три різні корені. Іншими словами, відбувається біфуркація числа дійсних коренів разом з появою нових нерухомих точок ітерованого відображення. Разом з тим, не змінюється число нерухомих точок вихідного відображення (2.10). Точки  $y_3$  та  $y_4$  утворюють 2-цикл у вихідному відображенні. Біфуркація утворення циклу відбувається при переході параметра  $\lambda$  через значення  $\lambda_1$ . Далі представимо графік, на якому показано ітероване відображення  $y_{n+2} = f^2(y_n)$  при значенні  $\lambda$ , що трішки менше за  $\lambda_1$ :



Як ми бачимо на графіку відображення має вид двогорбої кривої. У випадку значення  $\lambda < \lambda_1$  діагональ  $y_{n+2} = y_n$  перетинає криву тільки у двох точках  $y_1 = 0$  та  $y_2 = 1 - 1/\lambda$ . Провал двогорбої кривої залежить від росту  $\lambda$ , тобто чим зріст більший, тим глибше буде прогин кривої. У випадку  $\lambda = \lambda_1 = 3$  діагональ буде торкатися кривої в точці  $y = y_2$ . У випадку ж  $\lambda > \lambda_1$  точка дотику буде розкладатися на три різні точки

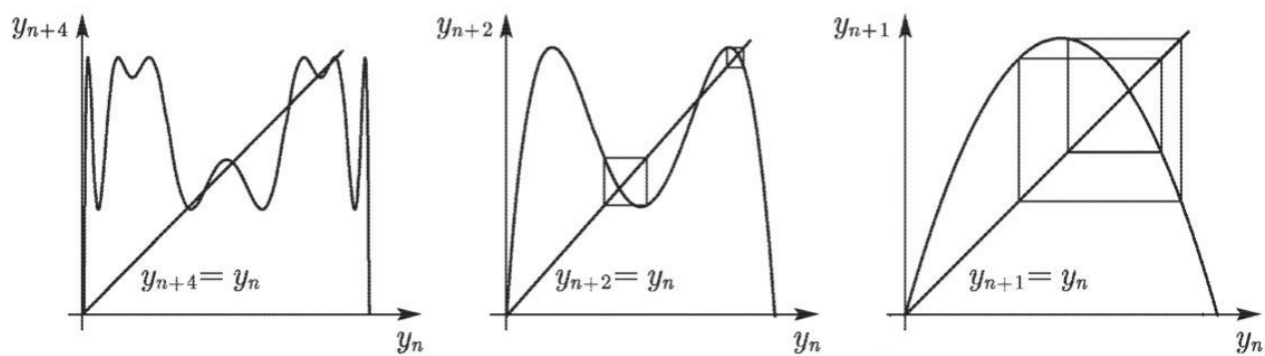
$y_2, y_3, y_4$ . Наступний графік праворуч зображає вихідне відображення, а ліворуч буде вид ітерованого відображення при значенні  $\lambda$ , що трішки перебільшує  $\lambda_1$ :



Нерухомі точки ітерованого відображення, що спроектовані на вихідне відображення утворюють на ньому пару циклічних точок, тобто стійкий 2-цикл. Чим далі ми будемо рухатися від точки біфуркації, тим більша буде амплітуда коливань у цьому циклі. Також можемо сказати, що народження циклу відбувається у м'якому режимі.

Якщо ми далі будемо збільшувати параметр  $\lambda$ , це призведе нас до того, що  $y_3$  та  $y_4$  втратять свою стійкість.

Візьмемо відображення  $F_2(y) \equiv f^2(y)$  та розглянемо дворазово ітероване відображення  $F_2^2(y) \equiv f^4(y)$ , це допоможе нам зробити аналіз всіх модифікацій, що відбуваються. Нерухомі точки відображення  $F_2(y)$  втрачають стійкість при переході через біфуркаційні значення  $\lambda = \lambda_2 > \lambda_1$ . Тим часом, кожна з нерухомих точок перетворюється в 2-цикл для цього відображення.  $F_4(y) \equiv F_2^2(y)$  означає, що кожна нерухома точка  $y_3$  та  $y_4$  розщеплюється на три точки, серед яких дві будуть стійкими. У той же час, стійкі точки відображення  $F_4(y)$  утворять 4-цикл вихідного відображення  $f(y)$ . Наступний графік показує нам вже фінальні результати біфуркації, що відбулася – всі нерухомі точки та цикли відображень  $f(y), f^2(y), f^4(y)$ .



Ліворуч зображено 4-разово ітероване відображення, наступний графік показує 2-разово ітероване відображення, і на останньому зображено вихідне відображення.

## 2.1 Процес біогідролізу целюлози з синтезом ферментів – як приклад активного середовища

Целюлоза це полімер, полісахарид, який піддається гідролізу, кінцевим продуктом якого є глюкоза. Будемо вивчати гідроліз целюлози мікроорганізмами за допомогою ферментативного каталізу. Ферменти виробляють клітини мікроорганізмів, в залежності від концентрації целюлози — субстрату процесу, та глюкози -продукту.

На глюкозі ростуть і розмножуються клітини мікроорганізмів.

Враховуємо закон діючих мас для запису рівнянь кінетики зміни концентрацій учасників ферментативного процесу гідролізу.

Припускаємо що у нас наступні учасники процесу гідролізу: клітини мікроорганізмів - (X), целюлоза (C), два ферменти целюлозного комплексу (E,F), проміжний продукт целобіоза (дисахарид) (S), продукт глюкоза (G). Процес моделюється системою 6 — ти диференціальних рівнянь на концентрації реагентів і клітин.

Перші три рівняння описують перетворення целюлози в целобіозу, целобіози в глюкозу. Четверте описує ріст біомаси. П'яте і шосте описують біосинтез ферментів і враховують його регуляцію. Враховано надходження целюлози і вимивання і розпад ферментів та клітин. Система має ряд внутрішніх і зовнішніх параметрів, при виборі яких, система буде при великих часах виходити на відповідний кінетичний режим динамічної рівноваги або нерівноваги.

Система цих диференціальних рівнянь є нелінійною і дисипативною динамічною системою в відкритих умовах “накачки-дисипації”. Такі

системи можуть мати складну часову поведінку, яку вивчають за допомогою метода фазового портрету.

Система, якою описується процес гідролізу целюлози складається з 6 – ти диференціальних рівнянь

Кінетика описується набором нелінійних диференціальних рівнянь:

$$\frac{dC}{dt} = \frac{a}{1+c} - l \frac{E}{1+E} \frac{C}{1+C+C_1} - \alpha_3 C \quad (2.1.1)$$

$$\frac{dC_1}{dt} = k \frac{E}{1+E} \frac{C}{1+C+C_1} - l_1 \frac{E_1}{1+E_1} \frac{C_1}{1+C_1+G} \quad (2.1.2)$$

$$\frac{dG}{dt} = k_1 \frac{E_1}{1+E_1} \frac{C_1}{1+C_1+G} - \mu \frac{XG}{1+G+X} \quad (2.1.3)$$

$$\frac{dX}{dt} = \mu_1 \frac{XG}{1+G+X} - \mu_0 X \quad (2.1.4)$$

$$\frac{dE}{dt} = E_0 X \frac{C^2}{\beta + C^2} \frac{1}{1+G} - \alpha_1 E \quad (2.1.5)$$

$$\frac{dE_1}{dt} = E_{10} X \frac{C_1^2}{\beta_1 + C_1^2} \frac{1}{1+G} - \alpha E_1 \quad (2.1.6)$$

Через  $a$  позначаємо перекачування  $C$  в систему, а  $\alpha_3 C$  позначає вихід із системи відповідно до умов потоку. Параметрами  $\alpha$  та  $\alpha_1$  позначаються втрата ферментів в залежності від інактивації та в умовах потоку. Рівняння забезпечують системі адаптивність. Рівняння (2.1.5), (2.1.6) відповідають за біосинтез целюлозного комплексу, що регулюється умовами середовища. Така регуляція розуміє під собою індукцію та пригнічення біосинтезу  $E$  та  $E_1$ , а також їх активацію. Стан клітин є основним внеском у біосинтез. Далі можна застосувати такі параметри:

$$\begin{aligned} l &= 100; \quad l_1 = 200; \quad k = 200; \quad k_1 = 400; \\ \mu &= 400; \quad \mu_1 = 250; \quad \mu_0 = 47; \\ E_{10} &= 490; \quad E_0 = 300 \end{aligned} \quad (2.1.7)$$



Ця група параметрів має параметри, що пов'язані з характеристиками вихідного субстрату та властивостями використовуваної культури клітин.

$$a = 1,2; \quad \mu_0 = 47; \quad \alpha = 20; \quad \alpha_1 = 10; \quad \alpha_3 = 0. \quad (2.1.8)$$

В групі параметрів (8) позначає регулювання ферментатора за зовнішніми параметрами.

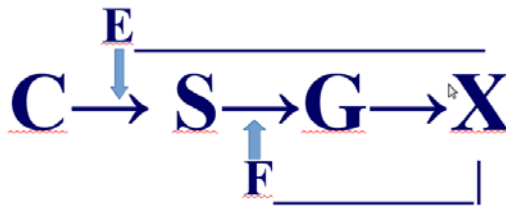
Наступні параметри описують початковий стан системи:

$$C^0, C_1^0, G^0, X^0, E^0, E_1^0. \quad (2.1.9)$$

Система у початковий момент має знаходитися в стані:

$$C^0 = 0.01; \quad C_1^0 = 0.01; \quad G^0 = 0.01; \quad X^0 = 0.3; \quad E^0 = 0.01; \quad E_1^0 = 0.01.$$

## 2.2 Опис моделі процесу біогідролізу з регуляцією синтезу ферменту



**Схема процесу біогідролізу целюлози  
(С- целюлоза, S - целобіаза глюкоза, X мікроорганізми, E і F - ферменти)**

В одномірному (труба) біореакторі з дифузією рівняння реакції-дифузії

має вид

$$\partial c / \partial t = \kappa \partial^2 c / \partial x^2 + R(c)$$

$$dc / dt = R(c)$$

Для нашого випадку

рівняння при однорідності по простору (або сильного перемішування)

рівняння

$$\partial c / \partial t = \kappa \partial^2 c / \partial x^2 + R(c)$$

стають автономними диференціальними рівняннями виду

$$dc / dt = R(c)$$

де змінна вектор **c**: C,S,G,X,E,F (C,C<sub>1</sub>,G,X,E,E<sub>1</sub>)

а реакції описуються наступними функціями

**R( c ):**

$$V(X) = X / (X + 1);$$

$$W(X,A) = X / (1 + X + A);$$

$$A_1 = 100 W(E,C) W(C,S);$$

$$A_2 = 200 V(F) W(S,G);$$

$$A_3 = GX / (1 + G + X);$$

- (1)  $\frac{dC}{dt} = 1.2/(1+C) - A_1$
- (2)  $\frac{dS}{dt} = 2A_1 - A_2$
- (3)  $\frac{dG}{dt} = 2A_2 - 400A_3$
- (4)  $\frac{dX}{dt} = 250A_3 - 47X;$
- (5)  $\frac{dE}{dt} = 300XV(C^2)/(1+S+G) - 10E;$
- (6)  $\frac{dF}{dt} = 490XV(S^2)/(1+G) - \alpha F;$

### Опис складових системи рівнянь, які моделюють процес біогідролізу целюлози

При складанні рівнянь процесу гідролізу ми використовуємо хімічний закон діючих мас, який враховує стехіометрію. Наступні рівняння є рівняннями на швидкість зміни концентрацій реагентів, ферментів, біомаси — інгредієнтів процесу трансформації целюлози. Враховуючи об'єм реактора і молекулярні маси, лінійним масштабуванням можна перейти від концентрацій до маси. Система рівнянь залишиться такого ж виду.

В рівнянні (1) перший доданок виражає надходження целюлози в реактор (біосистему) і враховує насичення.

Другий доданок з від'ємним знаком описує ферментативне перетворення целюлози  $C$  в целобіозу  $S$  (димер глюкози  $G$ ). Цей доданок виражається в модифікованому виді формули Міхаеліза-Ментен та враховує ефекти абсорбції ферменту  $E_1$  на целюлозі та інгібування процесу продуктом. В другому рівнянні (2) на швидкість зміни концентрації целобіози  $S$  цей доданок з коефіцієнтом 2 виражає продукцію целобіози з розпаду целюлози.

Другий доданок в (2) і перший в (3) описують появу глюкози  $G$  з розпаду целобіози  $S$ .

В рівняннях (3) і (4) члени з  $A_3$  відповідальні за ріст біомаси клітин на глюкозі.

Рівняння (5) і (6) описують біосинтез ферментів  $E$  і  $E_1$ , який залежить від концентрацій субстратів і продуктів відповідних ланцюгів реакції трансформації целюлози. Субстрат активує а продукт інгібує біосинтез ферменту.

Лінійні від'ємні члени описують дисипативні процеси лізису, вимивання, розпаду ферментів і клітин.

З загального виду системи рівнянь, видно, що ми маємо нелінійну динамічну систему в відкритих умовах “накачки- дисипації” з рядом параметрів внутрішньої і зовнішньої взаємодії.

Відомо, що такі системи можуть мати різні кінетичні режими рівноважного і нерівноважного стану. Нас буде цікавити існування коливних періодичних і неперіодичних режимів.

## РОЗДІЛ III

### Біфуркації

Набір функцій, які підкоряються рівнянням руху визначають поведінку динамічної системи. Якщо розглядати зміну цих функцій в часі, то вона залежить не тільки від виду рівняння, а й так само від конкретних значень параметрів, які характеризують дану систему. Можна взяти за приклад частинку, яка знаходиться в потенційній ямі з вертикальними стінками. Для цієї частинки стан системи описується координатою частинки, ширина ями є параметром.

Автономну динамічну систему можна задати за допомогою системи диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx_1}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; \alpha)$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Символом  $\alpha$  позначимо набір з  $m$  параметрів

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m).$$

Якщо змінювати значення параметру  $\alpha$ , то це може призвести до кількісних змін і до якісних змін у поведінці системи.

Розглянемо за допомогою прикладу:

$$\dot{x} = \sqrt{x^2 + \alpha}.$$

Фазовий простір цієї системи буде одномірний. При  $\alpha > 0$  траєкторія системи буде проходити через кожну точку фазового простору. Якщо навпаки  $\alpha < 0$ , то існуватиме «заборонена» область  $|x| < \sqrt{-\alpha}$ , і в неї не зможе потрапити ні одна траєкторія. До цього ж, якщо у випадку  $\alpha > 0$  система не має положення рівноваги (завжди  $\dot{x} > 0$ ), то у випадку  $\alpha < 0$  з'явиться два положення рівноваги:  $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\alpha}$ .

Можна зробити висновок, що навіть повільна зміна параметрів може призвести до різкої, якісної зміни поведінки системи. Біфуркацією називають таку зміну поведінки та властивостей системи. Біфуркаційними значеннями називаються параметри, при яких змінюються властивості та поведінка системи. На нашому прикладі побачимо, що  $\alpha$  є біфуркаційним значенням параметру ( $\alpha = 0$ ).

Також біфуркація означає якісну зміну структури фазового портрету системи. Фазовим портретом є зображення траєкторій динамічної системи у фазовому просторі. Це зображення визначається числом та типом особливих точок та особливих траєкторій. Стає зрозуміло, що біфуркація полягає в зміні цих характеристик.

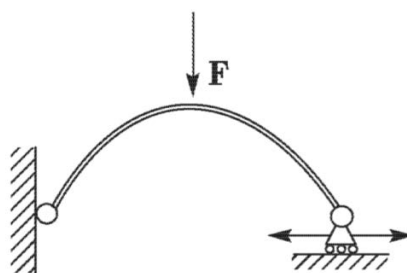
Спочатку розглянемо число особливих точок. Проведемо класифікацію дійсних коренів рівняння

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; \alpha) = 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

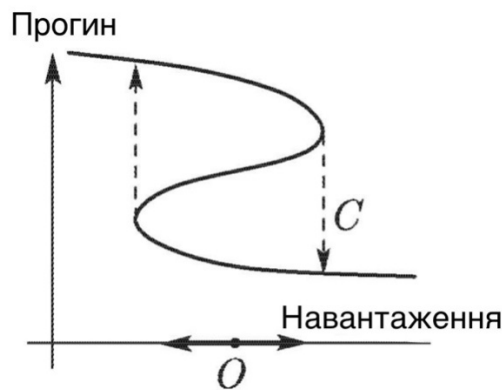
Така задача у математиці розглядається в межах теорії катастроф.

Розглянемо приклад пружного стержня, який жорстко закріплений на кінцях. Положення одного кінця стержня фіксоване, положення іншого кінця дозволяє змінюється так, що може зжати стержень. Також на стержень діє сила  $F$ .

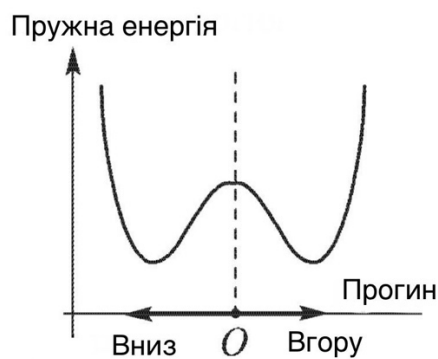


У випадку коли  $F = 0$ , стержень може прийняти положення або прогином вниз, або прогином вгору. Якщо стержень не зігнутий, то положення

рівноваги нестійке. Це й призводить до утворення прогину. Нехай прикладена сила  $F$ , коли стержень приймає положення прогину вгору. Коли ця сила достатньо мала, її наявність не змінює та не впливає на напрямок прогину. А вже коли прикладена сила досягає деякого критичного значення  $F_{кр}$ , тоді стріла прогину стрибком змінює свій знак, тобто свій напрямок. Характеристики стержня впливають на величину  $F_{кр}$  та визначаються його початковою деформацією. На графіку приведена залежність стріли прогину від величини навантаження  $F$ , скачок позначений стрілою  $C$ :



Залежність пружної енергії стержня від величини прогину



Мінімуми цієї кривої відповідають стійким положенням рівноваги: прогини вниз або вгору. Локальний максимум відповідає нестійкій рівновазі, тобто відсутність прогину. На графіку крива симетрична при відсутності сили  $F$ . Прогин вниз є більш вигідним, якщо є поперечне навантаження. При зростанні навантаження глибина лівого мінімуму зростає, а правого навпаки — спадає. Коли навантаження досягає

критичного навантаження, то правий мінімум зникає, як показано на графіку



і прогин вгору стає неможливим, тоді стержень стрибком переходить в положення прогину вниз. Можемо назвати даний процес як катастрофічну, стрибкоподібну зміну стану системи.



### 3.1 Коливальний режим реакцій гідролізу у відкритих умовах

Можливість існування коливань в нашій системі (2.1.1) - (2.1.6).

Нехай на початку маємо високу концентрацію целюлози і невисоку концентрацію інших реагентів. При малій концентрації клітин розпочинається синтез ферменту  $E$ , поява якого запускає утворення целобіози, ріст її концентрації. Далі аналогічно біосинтезується фермент  $E_1$ , від продукує глюкозу  $G$  з целобіози  $S$ . Зростає концентрація біомаси, яка росте на глюкозі. Концентрація целюлози падає, а біомаси  $X$  зростає. Ріст концентрацій продуктів реакцій, целобіози і глюкози, а також низька концентрація целюлози гальмує (інгібує) біосинтез ферментів. Продукція целобіози і глюкози падає і зменшується ріст біомаси. Далі за рахунок дисипаційних процесів, які вже не компенсуються ростом клітин на глюкозі, зменшуються концентрації ферментів і клітин. За рахунок постійного введення целюлози в біосистему при малій концентрації ферментів і клітин, росте концентрація целюлози і система повертається в попередній режим. І процес трансформації целюлози може повторитися. З опису видно, що ми можемо мати в розглянутій системі коливні режими.

### 3.2 Поява режиму дивного атрактора – детермінованого хаотичного режиму

Важливу роль у вивченні нелінійних динамічних систем є знаходження атрактора у його фазовому просторі. Атрактор це частина фазового простору до якого з часом притягуються траєкторії динамічної системи. Атракторами можуть бути стійкі точки та граничні цикли (періодичні траєкторії) – це є рівноважні атрактори, і в цьому випадку динамічна система буде перебувати у рівноважному динамічному стані.

Є тип дивного атрактора – множини у фазовому просторі фрактальної розмірності. Демонструє хаотичну поведінку.

Система перебуває в нерівноважному стані, коли знаходиться режимі дивного атрактора.

Один із сценаріїв формування дивного атрактора є сценарій Фейгенбаума. Це формування дивного атрактора з граничного циклу через безмежну послідовність біфуркацій подвоєння періоду граничного циклу.

Досліджувати будемо методом фазового портрету, коли траєкторії виходять з великим часом на атрактор. При біфуркації подвоюється період.

Ми вивчаємо формування кінетичних режимів через зміну параметрів системи.

Спочатку виводимо систему на оптимальний режим функціонування і фіксуємо всі параметри системи крім одного. При зміні цього параметру система змінює свою кінетичну поведінку. Також при цьому виникають біфуркації траєкторій, коли народжується новий розв'язок у вигляді граничного циклу подвоєного періоду.

Граничні цикли – це ще рівноважні стани.

Дивний атрактор – нерівноважний.

Значення параметра, при яких відбувається біфуркація, називається точкою біфуркації. В якості параметра, який ми міняємо, вибираємо

параметр  $\alpha$  (Альфа), який відповідає за вимивання і деструкцію ферменту із системи.

Змінюючи цей параметр від 20 до 23.6, ми отримуємо перехід від граничного циклу до дивного атрактора, від динамічного рівноважного стану система переходить до динамічного нерівноважного стану детермінованого хаосу.

Детермінований хаос – розв’язки є не випадкові, але передбачувані, на відміну від періодичних, і є локально нестійкими, а глобально – стійкими.

У дослідженні біфуркацій нашої системи можна використовувати відображення, якщо фіксувати час, коли система по одній із компонент виходить на якесь одне своє значення.

Для прикладу візьмемо значення концентрації целюлози 0.5.

В такому випадку, замість неперервного часу маємо дискретний і вивчаємо відображення  $6 - 1 = 5$  компонент в дискретному часі, вивчаємо без целюлози, тому що вона буде рівна 0.5.

Наступний крок буде застосування методів дослідження біфуркацій для відображення, наприклад метод Фейгенбаума.

### 3.3 Каскад біфуркацій подвоєння періоду граничного циклу

Біфуркація подвоєння періоду є важливим механізмом утворення турбулентності. Нелінійним одномірним відображенням таким, як:

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (3.3.1)$$

притаманна така складна поведінка. Функція  $f(x)$  повинна задовольняти певні умови. Візьмемо логістичне відображення

$$x_{n+1} = 4\lambda x_n(1 - x_n), \quad 0 < x < 1, \quad (3.3.2)$$

де  $\lambda$  – підгінний параметр. При малих  $\lambda$  всі ітерації будуть сходиться до єдиної граничної точки, але враховуючи умову, що  $x_0 \neq 0$ . До значення  $\lambda = 0,75$  така поведінка зберігається. Далі, для більших значень  $\lambda$  єдина нерухома точка, в результаті біфуркації, перетвориться у пару нерухомих точок. Отже, буде граничний цикл з періодом 2. При умові, що  $\lambda$  буде зростати, при наступній біфуркації граничний цикл з періодом 2 перетвориться на граничний цикл з періодом 4. Далі цикл перетвориться на цикл з періодом 8 і т.д.. Значення  $\lambda$ , при яких відбуваються біфуркації  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots)$ , стають ближче один до одного, та сходяться геометрично до критичного значення  $\lambda_\infty$ . Саме в цій точці траєкторія стає аперіодичною. У випадку великих значень  $\lambda$  з'являються хаотичні траєкторії та граничні цикли з непарними періодами. Коли  $\lambda = 1$  рух на одиничному інтервалі  $[0,1]$  формально ергодичний. Якщо  $\lambda$  далі буде зростати, то всі траєкторії підуть на нескінченність.

#### Механізм подвоєння періоду

Для відображення

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

послідовність ітерацій, що починаються в  $x_0$ , можемо записати:

$$\begin{aligned} x_1 &= f(x_0), \\ x_2 &= f(x_1) = f(f(x_0)), \\ &\dots \end{aligned}$$

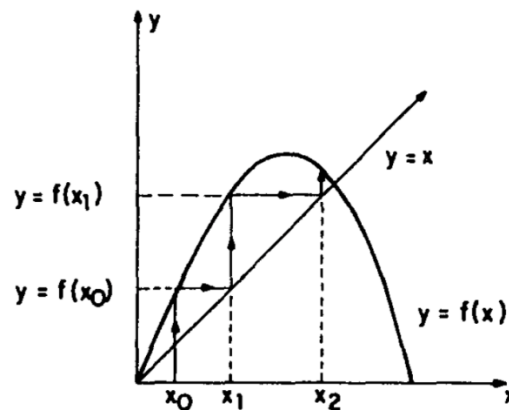
$$x_{n+1} = f(x_n) = f(f(\dots f(x_0))) = f^n(x_0),$$

де  $f^n(x_0)$  позначає  $n$ -ту ітерацію функції  $f(x)$ . Якщо функція  $f(x)$  лінійна по  $x$ , то ці ітерації є тривіальними, але якщо функція  $f(x)$  нелінійна, то послідовні ітерації приводять до поліномів зростаючого степеню.

Наприклад, візьмемо нелінійну функцію:

$$f(x) = 4\lambda x(1 - x),$$

$f^n(x)$  представляє собою поліном степеню  $2^n$ . Послідовність ітерацій можна прослідкувати сумістивши на одному графіку функцію  $y = f(x)$  з прямою  $y = x$ , та переміщуючись послідовно у горизонтальному та вертикальному напрямках між цими лініями. Далі покажемо це на графіку:



Такі дії зможуть дати нам послідовність ітерацій  $x_0, x_1, x_2, \dots$

Точка перетину кривої та прямої повинна співпадати з нерухомою точкою послідовності ітерацій. Знайдемо цю нерухому точку вирішивши рівняння:

$$x^* = 4\lambda x^*(1 - x^*),$$

маємо два корені:  $x^* = 0$  та  $x^* = 1 - \frac{1}{4}\lambda$ .

повинні виконуватись умови  $0 < \lambda < 1$  та  $0 < x < 1$ , аби ітерації  $f(x)$  не виходили за межі інтервалу  $[0,1]$ . Тому при  $\lambda < 1/4$  в цьому інтервалі буде знаходитись єдина нерухома точка  $x^* = 0$ , а за умови  $1/4 < \lambda < 1$  маємо дві нерухомі точки. Ці точки будуть стійкими або нестійкими в залежності від нахилу  $f(x)$ . Далі розглянемо нерухому точку  $x^*$  ( $x^* =$

$f(x^*)$ ) та набір значень  $x_* = x^* + \varepsilon_n$ . Розкладемо в ряд з точністю до першого порядку:

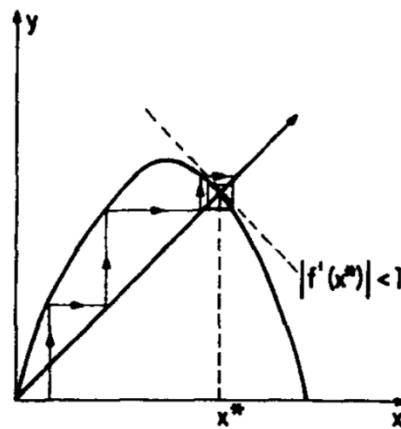
$$x_{n+1} = f(x^* + \varepsilon_n) \cong f(x^*) + \varepsilon_n f'(x^*) \equiv x^* + \varepsilon_n f'(x^*).$$

при  $x_{n+1} = x^* + \varepsilon_{n+1}$ , отримаємо

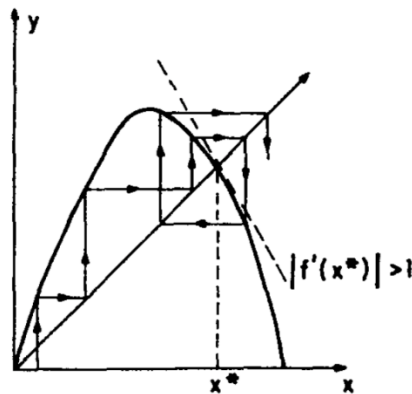
$$\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} = f'(x^*).$$

Тобто відповідні ітерації  $\varepsilon_n$  будуть сходиться при умові  $|f'(x^*)| < 1$ .

Тому точка  $x^*$  буде стійкою, якщо  $|f'(x^*)| < 1$ , точка  $x^*$  буде гранично стійкою, якщо  $|f'(x^*)| = 1$ , то точка  $x^*$  буде нестійкою, якщо  $|f'(x^*)| > 1$ .



Ітерації закручуються по спіралі до стійкої нерухомої точки  $x^*$ .



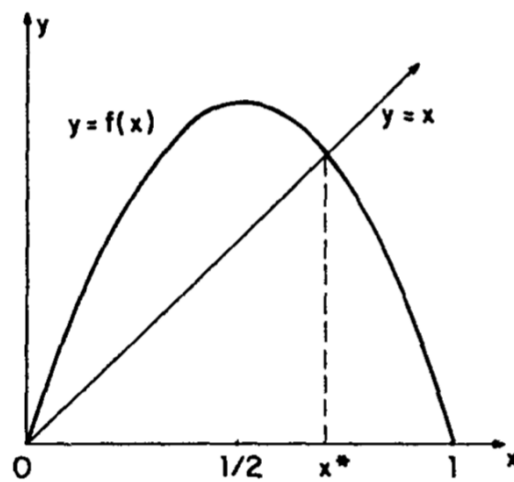
Ітерації розкручуються по спіралі від нестійкої нерухомої точки  $x^*$ .

У випадку відображення  $x_{n+1} = 4\lambda x_n(1 - x_n)$ ,  $0 < x < 1$ , можемо визначити стійкість двох нерухомих точок  $x^* = 0$  та  $x^* = 1 - \lambda/4$ . нехай  $x^* = 0$  стійка за умови  $0 < \lambda < 1/4$ , та нестійка за умови  $\lambda > 1/4$ . Також визначимо для другої точки, нехай  $x^* = 1 - \lambda/4$  нестійка за умови

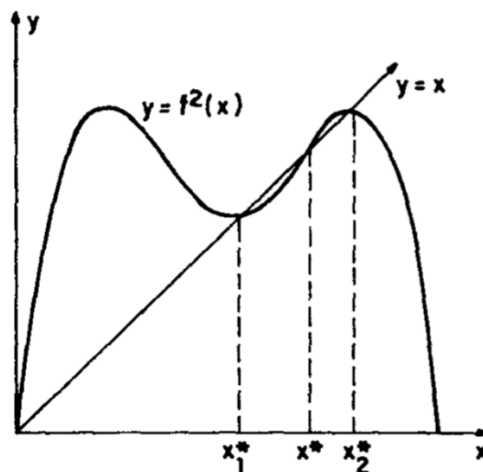
$0 < \lambda < 1/4$  та стійка за умови  $1/4 < \lambda < 3/4$ . Для  $\lambda < 1/4$  всі ітерації в інтервалі  $[0,1]$  сходяться до  $x = 0$ , а для  $1/4 < \lambda < 3/4$  всі ітерації сходяться до  $x = 1 - \lambda/4$ .

Втрачаючи нерухомість при  $\lambda = 3/4$ , стійка нерухома точка при  $x = 1 - \lambda/4$ , в результаті біфуркації, перетворюється в стійкий 2-цикл. Дві нерухомі точки, що утворюють 2-цикл є також стійкими нерухомими точками композиції функцій  $f^2 = f(f(x))$ .

Далі представимо графік залежностей  $f$  та  $f^2$ :



При  $\lambda < 3/4$ ,  $x^*$  є нестійкою нерухомою точкою  $f(x)$ .



Складна функція  $f^2(x) = f(f(x))$ .  $x_1^*$  та  $x_2^*$  є стійкими нерухомими точками  $f^2(x)$ . Нахил функції  $f^2(x)$  однаковий у двох точках.

Обидві функції симетричні відносно  $x = 1/2$ . Функція  $f$  має один максимум, а функція  $f^2$  має два максимуми. Якщо  $x^*$  є нерухомою точкою  $f$ , тоді вона і нерухомою точкою  $f^2$ . Для прикладу при  $\lambda < 3/4$ ,  $x^*$  буде єдиною стійкою нерухомою точкою функцій  $f$  та  $f^2$ . Перевіримо її стійкість:

Нехай  $x_2 = f^2(x_0) = f(x_1)$ , де  $x_1 = f(x_0)$ . Скористаємося правилом диференціювання складної функції для обчислення

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dx} f^2(x) \right|_{x=x_0} &= \left. \frac{d}{dx} f(x_1) \right|_{x=x_0} = \frac{d}{dx_1} f(x_1) \left. \frac{dx_1}{dx} \right|_{x=x_0} \\ &= \frac{d}{dx_1} f(x_1) \left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x=x_0}. \end{aligned}$$

Узагальнимо у вигляді:

$$\left. \frac{d}{dx} f^n(x_0) \right|_{x=x_0} = f'(x_0) f'(x_1) f'(x_2) \dots f'(x_{n-1}).$$

Для нерухомої точки  $x^* = x_0$  справедлива рівність  $x_2 = x_1 = x^*$ , отже:

$$f^{2'}(x^*) = f'(x^*) f'(x^*) = (f'(x^*))^2.$$

Якщо  $x^*$  є стійкою граничною точкою  $f$ , тоді вона також буде стійкою граничною точкою  $f^2$  (іншими словами  $|f'(x^*)| < 1$ , то і  $|f^{2'}(x^*)| < 1$ ), так само, якщо  $x^*$  є нестійкою граничною точкою  $f$ , то вона є і нестійкою граничною точкою  $f^2$  (іншими словами  $|f'(x^*)| > 1$ , то і  $|f^{2'}(x^*)| > 1$ ).

При  $\lambda > 3/4$  точки  $x_1^*$  та  $x_2^*$  є стійкими нерухомими точками  $f^2$ . Вони відображаються одна в одну під дією  $f$ , тому що вони при цьому не є нерухомими точками  $f$ :

$$x_1^* = f(x_2^*) \text{ та } x_2^* = f(x_1^*).$$

Отже, пара точок  $x_1^*$  та  $x_2^*$  утворюють 2-цикл, та ітерація довільної вихідної точки поступово приводить до послідовності

$x_1^*, x_2^*, x_1^*, x_2^* \dots$ . Нахил  $f^2$  в точках  $x_1^*$  та  $x_2^*$  буде однаковим, тому що  $x_1^*$  та  $x_2^*$  відображаються одна в одну:

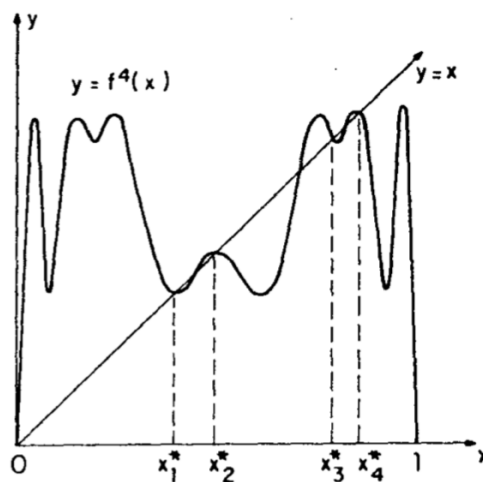


$$f^{2'}(x_2^*) = f'(x_1^*)f'(x_2^*) \text{ та } f^{2'}(x_1^*) = f'(x_2^*)f'(x_1^*).$$

Одночасно стійкими при  $\lambda > 3/4$  є дві нерухомі точки  $x_1^*$  та  $x_2^*$ , та при більшому значенні  $\lambda$  одночасно стають нестійкими, коли  $f^{2'}(x^*) = -1$ . В результаті біфуркації кожна з цих двох точок перетворюється у дві нові нерухомі точки. Отже, утворюється 4-цикл, що відповідає нерухомим точкам функції:

$$f^4 = f^2(f^2(x)).$$

Далі представлений графік цієї операції:



Така послідовність подвоєнь може продовжуватись далі, та при цьому відповідні значення  $\lambda$  геометрично сходяться. Таку послідовність також називають каскадом подвоєння періоду, вона універсальна для відображень  $x_{n+1} = f(x_n)$ , при умові, що  $f(x)$  має єдиний локально квадратичний максимум.

#### IV. РОЗРАХУНКИ

Розрахунки проводилися за допомогою метода Рунге – Кутта з точністю 4-го ступеня кроку по часу. Програма приведена в додатку.

Ми маємо 6-розмірний фазовий простір, розмірність така, тому що маємо 6 змінних в часі функцій.

На площині можемо зобразити 2-і змінні, цього буде достатньо для замкнутих граничних циклів.

Беремо  $E_1$  та  $G$  – це фермент та глюкоза відповідно. Рахуємо довго систему рівнянь. Далі видаємо графік після великого часу. Графік від часу є всі 6 змінних.

Хочемо бачити чи розв'язок є періодичним. З наступного графіку ми це можемо побачити – проекції в змінних  $E_1$  та  $G$ .

З графіку видно, що траєкторії з часом вийшли на граничний (рівноважний) цикл і стали періодичними.

Із закрученності видна їх складність.

Зміна закрученності (топології атрактора – до якого притягується траєкторія) відбувається через біфуркацію подвоєння періоду, коли ми змінюємо параметр  $\alpha$ .

До якось моменту цикл одинарний, а після певного значення  $\alpha$  він розщеплюється на подвійний, тобто біфуркує.

Те саме і з подвійним циклом, потім з 4-ним, потім з 8-ним і далі 16 – 32 – 64 – 128 – 256 – ..... –  $2^\infty$  ..... – 3 .

Ми вибираємо параметр  $\alpha$ , довго рахуємо та потім видаємо графіки і бачимо який граничний цикл ми маємо. Або маємо дивний атрактор.

Потім ми змінюємо  $\alpha$  і повторюємо розрахунки, дивимось на графіки і фазовий портрет знову.

Параметр  $\alpha$  ми змінювали від 20 до 23,5.

Точки біфуркації подвоєння періоду граничного цикла

При значенні параметра  $\alpha$

$1 \rightarrow 2$ :  $\alpha = 21.01$

$2 \rightarrow 4$ :  $\alpha = 21.96$

$4 \rightarrow 8$ :  $\alpha = 22.17$

Результати розрахунків при великих часах для режимів дивного атрактора та граничних циклів приведені нижче.

Графічні варіанти режимів при значенні часу  $t = [1000; 1050]$ .

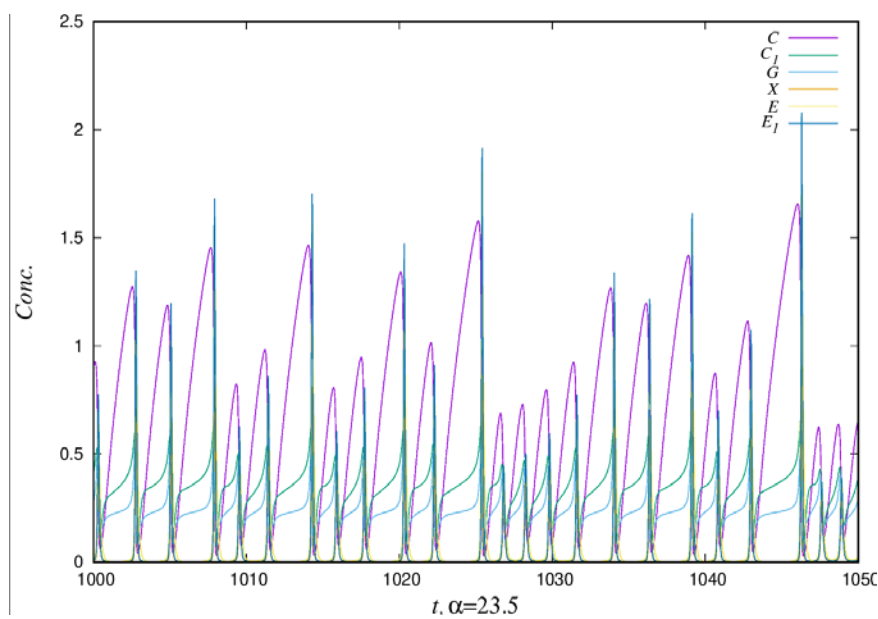


Рис 1. Графік дивного атрактору.

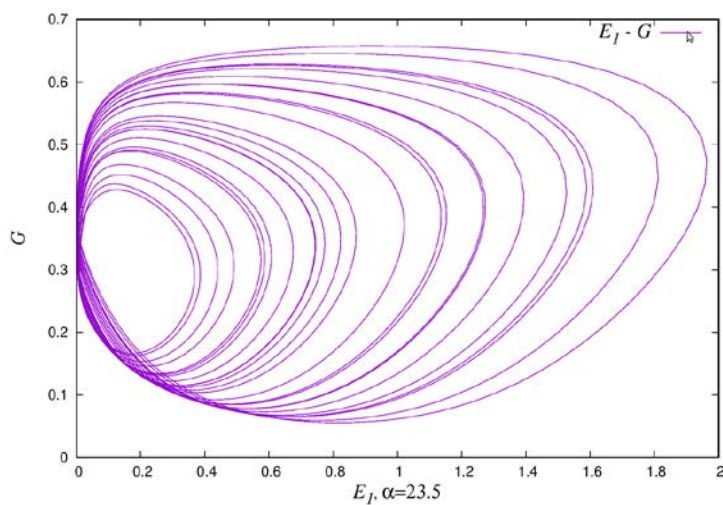


Рис 2. Фазовий портрет дивного атрактора. Проекція  $(E_1 - G)$ .

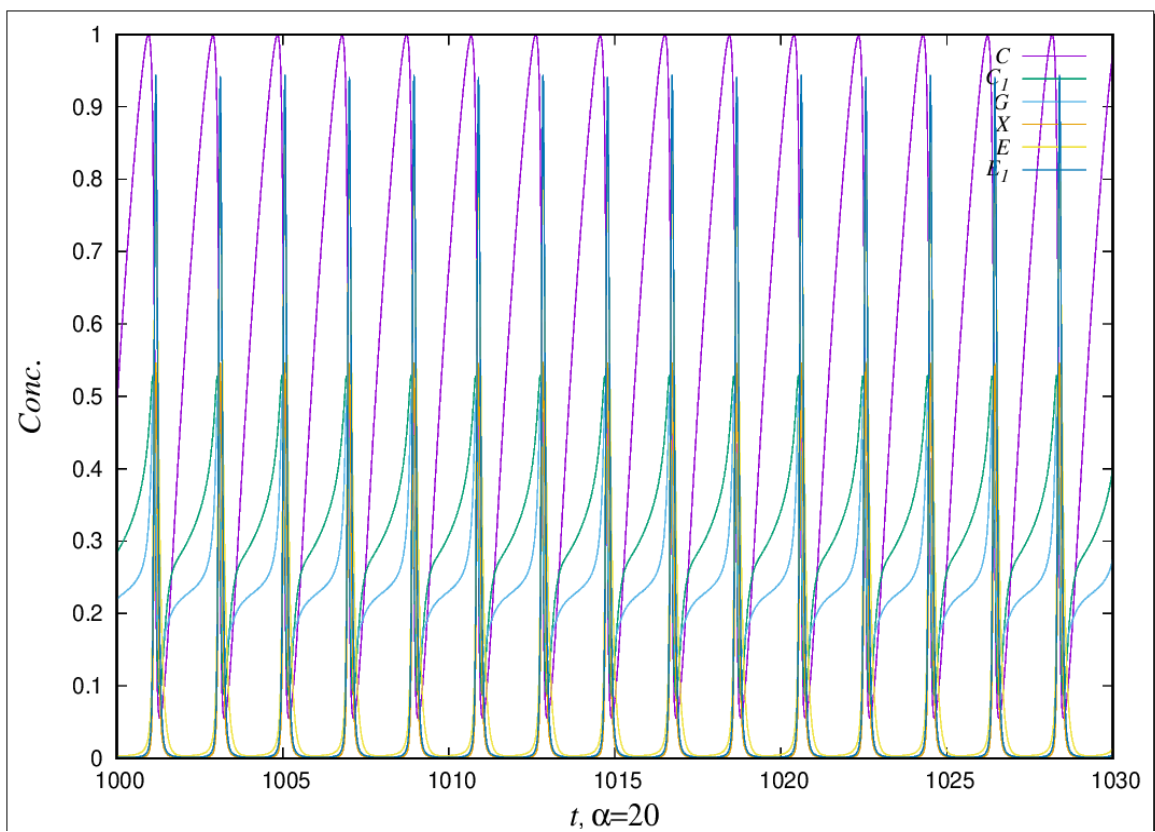


Рис 3. Графік 1 – циклу.

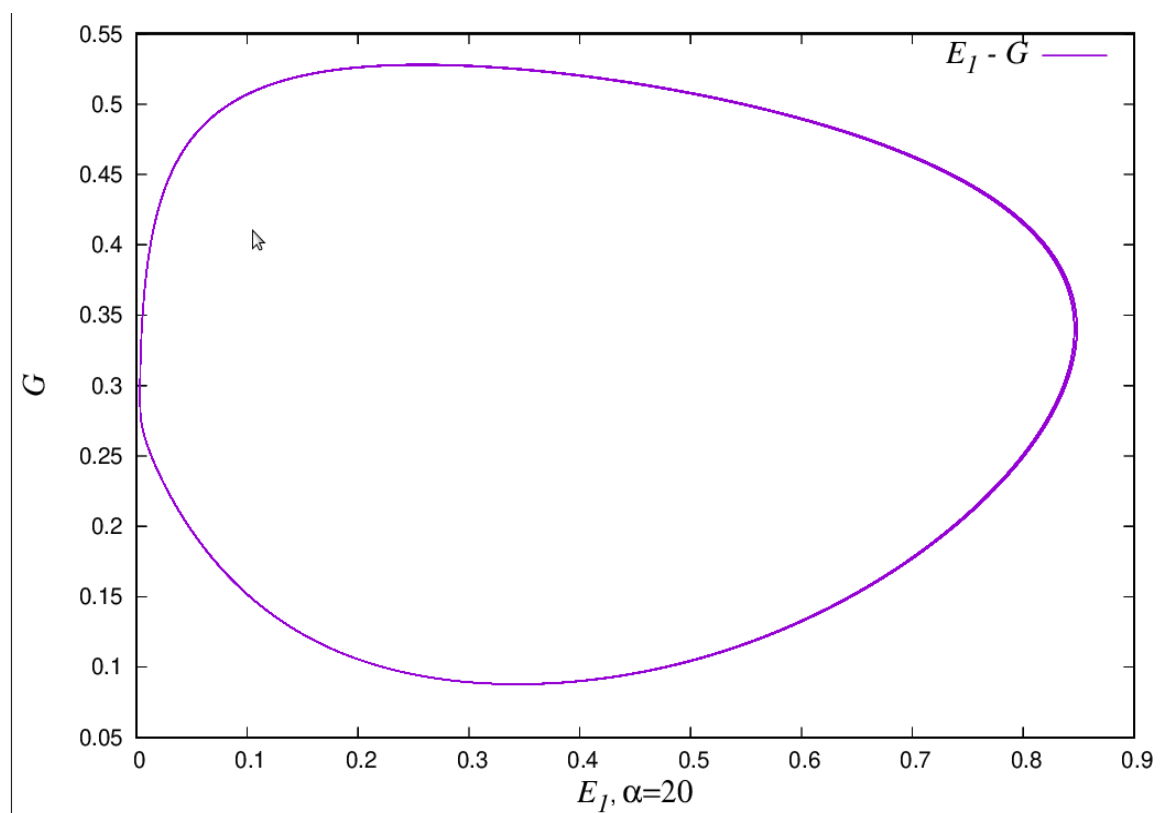


Рис 4. Фазовий портрет 1 – циклу. Проекція  $(E_1 - G)$ .

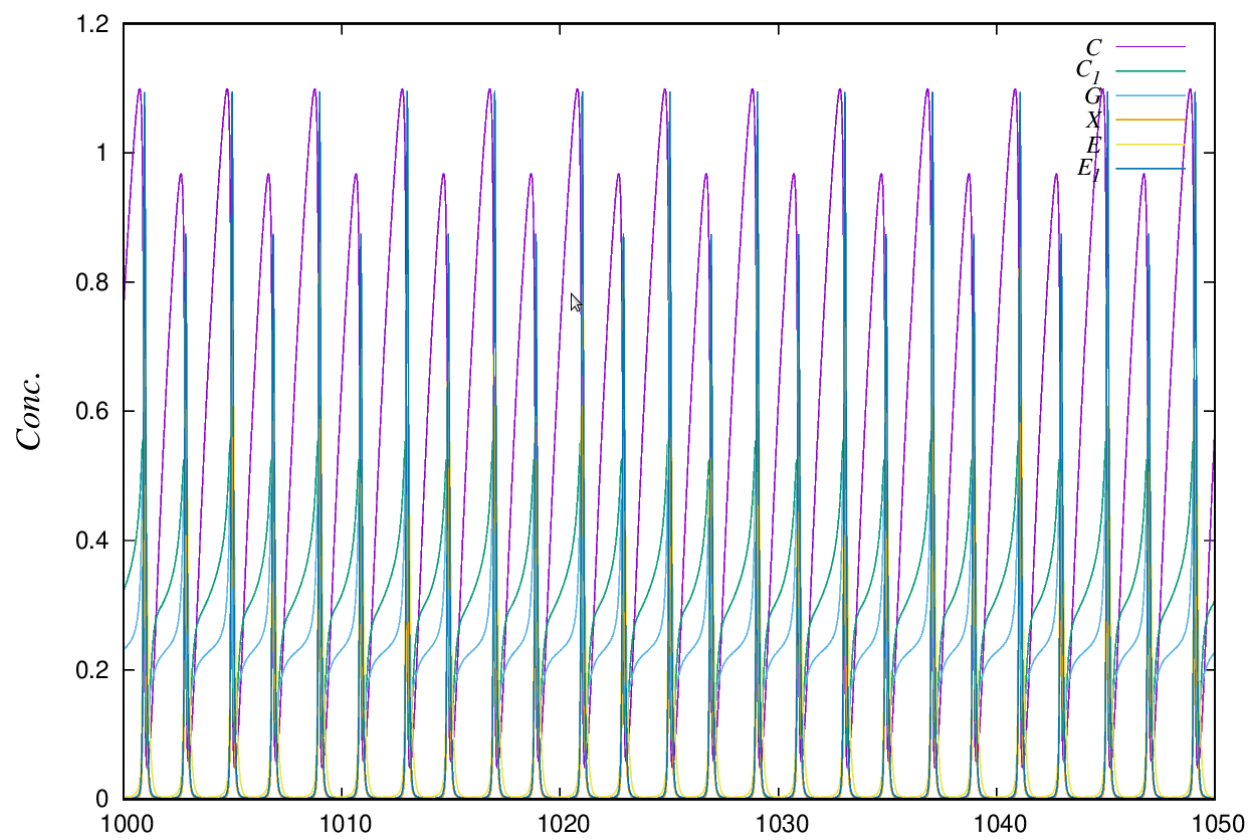


Рис 5. Графік 2 – циклу.

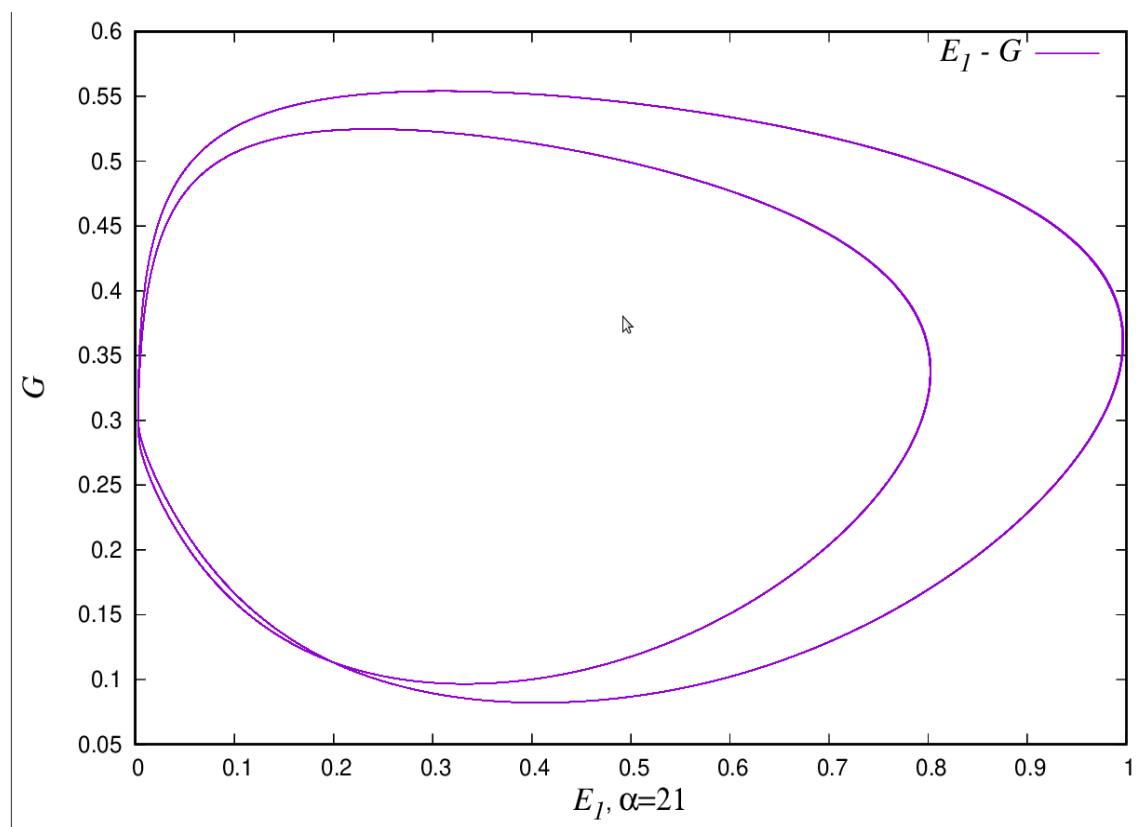


Рис 6. Фазовий портрет 2 – циклу.

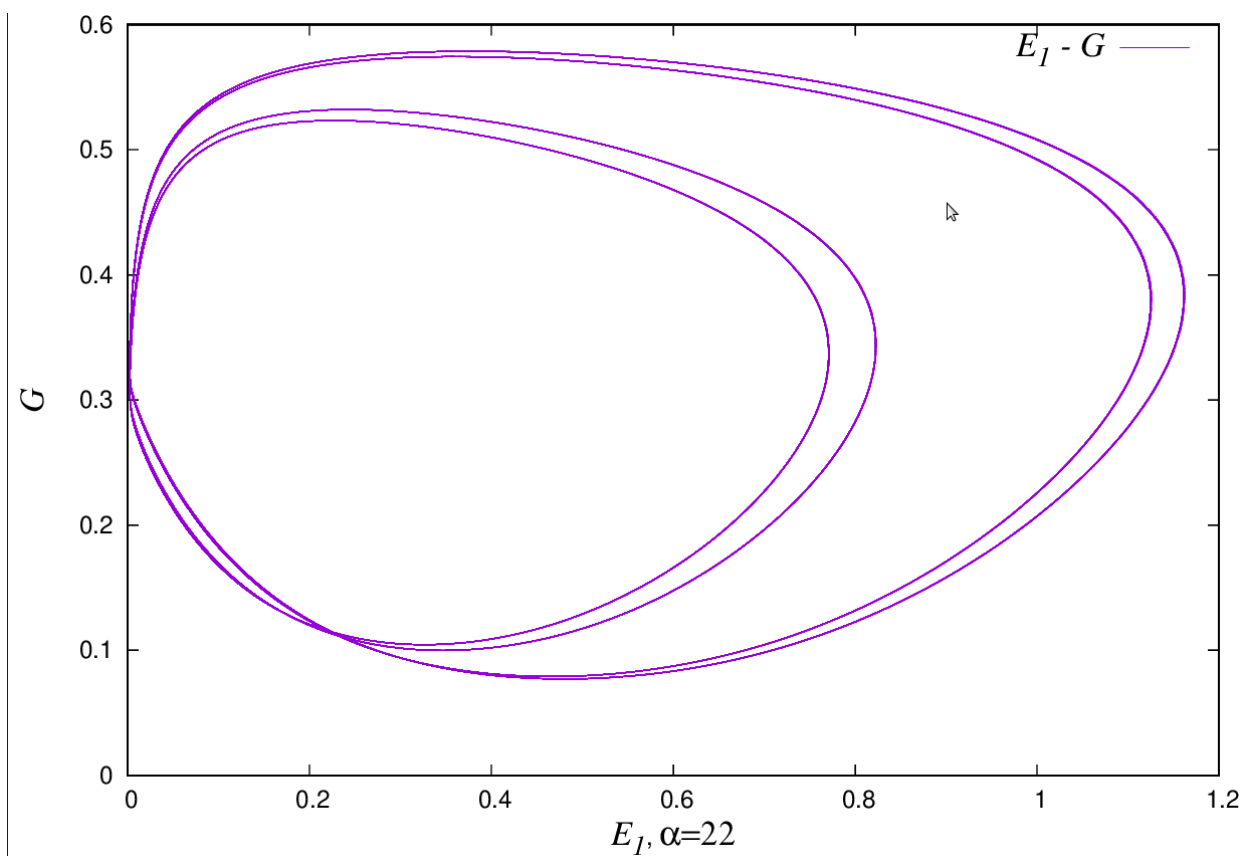
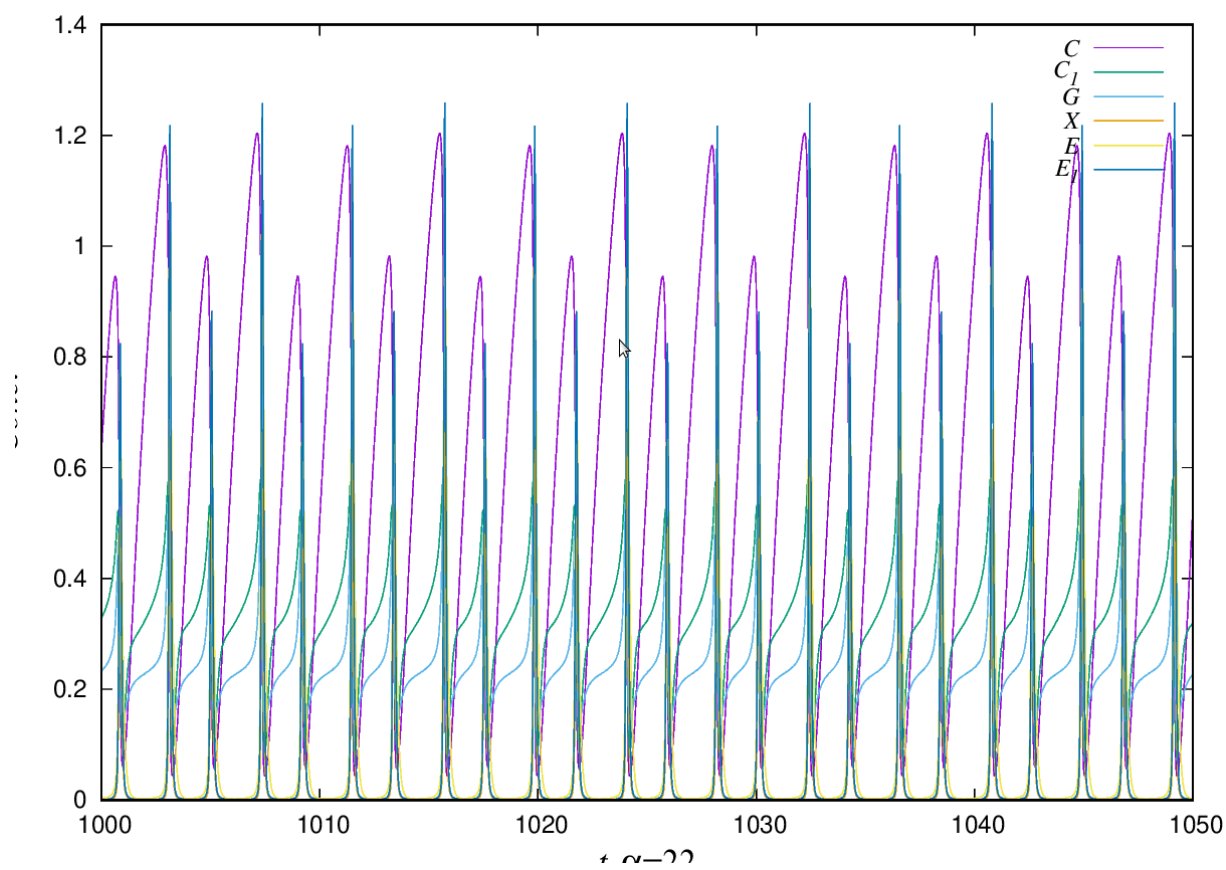


Рис 7. Графік 4 – циклу.

Рис 8. Фазовий портрет 4 – циклу.

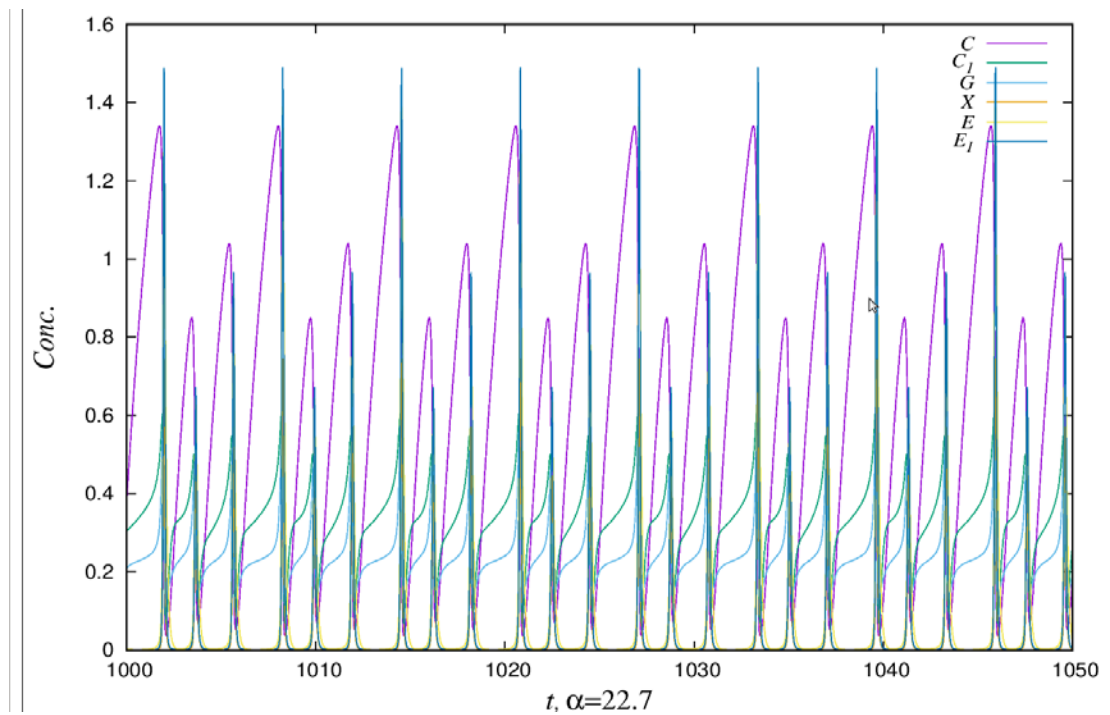


Рис 9. Графік 3 – циклу.

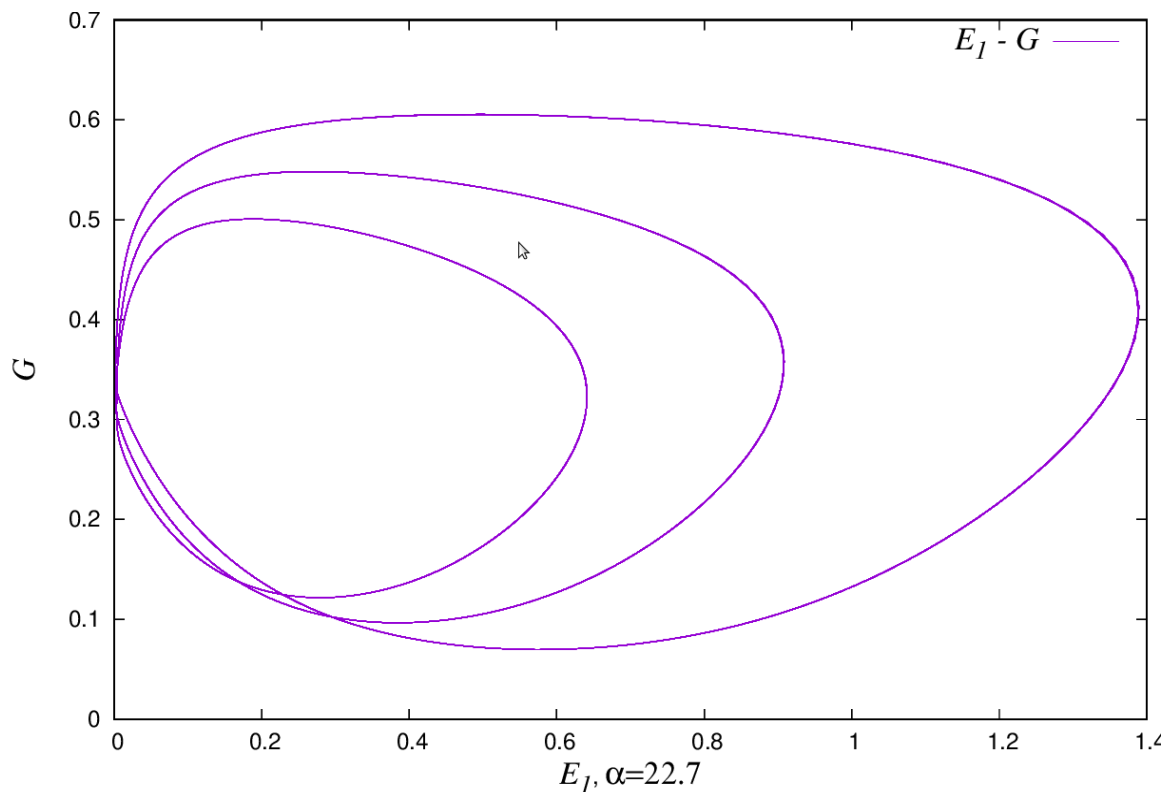


Рис 10. Фазовий портрет 3 – циклу.

Існування 3 – циклу є неявним підтвердженням того, що в системі маємо дивний атрактор, який утворився після подвоєнь (теорема Шарковського).

## V. ВИСНОВКИ

Побудована математична модель активного середовища у відкритих умовах. Модель є динамічною системою 6-ти нелінійних диференціальних рівнянь. Знайдено і досліджено формування коливальних кінетичних режимів. Знайдено формування режиму дивного атрактора у фазовому просторі системи через каскад біфуркацій граничних циклів при зміні параметру. Це режим нестійкості за початковими умовами задачі Коші. Такий режим чутливий до зміни початкових режимів. Він існує завдяки відкритості і нерівноважності нелінійної динамічної системи – моделі процесу. Побудовані програми для дослідження формування кінетичних режимів нерівноважних динамічних систем.



## VI. СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Анісімов І.О. / Коливання та хвилі. - К.: Академпрес, 2003.
- [2] Анісімов І.О. / Коливання та хвилі. К., ВПЦ "Київський університет", 2009.
- [3] Анісімов І.О. / Синергетика. К.: ВПЦ «Київський університет», 2014.
- [4] Васильев В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Г. / Автоволновые процессы. М., Наука, 1987.
- [5] Вовк И.В., Гринченко В.Т., Мацыпура В.Т., Снарский А.А. / Дюжина лекций о фракталах: от объекта восхищения к инструменту познания, М.: ЛЕНАНД, 2018.
- [6] Гачок В.П., Жохін А.С. / Kinetics of polyenzymatic systems under gene control. IV. Stationary regimes formation in the system, 1984.
- [7] Гачок В.П. / Кинетика биохимических процессов; Київ Наукова думка, 1988.
- [8] Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М., Непомнящий А.А. / Устойчивость конвективных течений. М., Наука, 1989.
- [9] Гленсдорф П., Пригожин И. / Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. М., УРСС, 2003.
- [10] Дмитриев А.В. / Регулярная и хаотическая динамика социально-экономических систем. М.-Ижевск.: Институт компьютерных исследований, 2016.
- [11] Жохін А.С. / Исследование спектра Пуанкаре – отображения для системы в предтурбулентном режиме, 1985.
- [12] Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. / Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса. М.: Наука, 1988.

- [13] Карлов Н.В., Кириченко Н.А. / Колебания, волны, структуры. – М.ФИЗМАТЛИТ, 2003.
- [14] Климонтович Ю.Л. / Турбулентное движение и структура хаоса. М., Наука, 1990.
- [15] П/ред. Кравцова Ю.А. М., ЦентрКом, / Пределы предсказуемости, 1997.
- [16] Кузнецов С.П. / Динамический хаос. М., Физматлит, 2006.
- [17] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. / Гидродинамика. М., Физматлит, 2001.
- [18] Лихтенберг А., Либерман М. / Регулярная и стохастическая динамика. М., Мир, 1984.
- [19] Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. / Введение в синергетику. М., Наука, 1990.
- [20] Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. / Основы теории сложных систем.М. – Ижевск. НИЦ «РСД», Ин-т компьютерных исследований, 2007.
- [21] Малинецкий Г.Г. / Математические основы синергетики: хаос, структуры, вычислительный эксперимент. М.: Изд-во ЛКИ, 2007.
- [22] Малинецкий Г.Г., Потапов А.Б., Подлазов А.В. / Нелинейная динамика: подходы, результаты, надежды. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2016.
- [23] Мишин Е.В., Ружин Ю.Я., Телегин В.А. / Взаимодействие электронных потоков с ионосферной плазмой. Л., Гидрометеиздат, 1989.
- [24] Николис Г., Пригожин И. / Познание сложного. М., Мир, 1990.
- [25] Олемской А.И. / Синергетика сложных систем: феноменология и статистическая теория, М.: КРАСАНД, 2009.
- [26] Пригожин И. / От существующего к возникающему: время и сложность в физических науках. М., УРСС, 2002.
- [27] Рабинович М.И., Трубецков Д.И. / Введение в теорию колебаний и волн. R&C Dynamics, 2000.

- [28] Сигов Ю.С. / Вычислительный эксперимент: мост между прошлым и будущим физики плазмы. М., Физматлит, 2001.
- [29] Скотт Э. / Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. М., Сов. радио, 1977.
- [30] Сугаков В.Й. / Основы синергетики. К., Обереги, 2001.
- [31] Табор М. / Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике, М., УРСС, 2001.
- [32] Трубецков Д.И. / Введение в синергетику. Хаос и структуры. М., УРСС, 2004.
- [33] Трубецков Д.И., Мchedлова Е.С., Красичков Л.В. / Введение в теорию самоорганизации открытых систем. М., Физматлит, 2005.
- [34] Хакен Г. / Информация и самоорганизация. М., УРСС, 2005.
- [35] Холодниок М., Клич А., Кубичек М., Марек М. Методы анализа нелинейных динамических моделей. М.: Мир, 1991.
- [36] W.Horton, Y.-H.Ishikawa. / Chaos and Structures in Nonlinear Plasmas. Singapore -New Jersey -London -Hong Kong, World Scientific Publishing, 1996.

## VII. ДОДАТКИ

### Програма на мові Octave

```
NDim=6;

NPoints=8000;

DatFil ="D6EQ.DAT";

TBE=1000.;

TEN=1050.;

XORI=[1.0,0.01,0.01,0.3,0.01,0.01];

TEMP=0

function f=V(x)

f=x/(1+x);

end

function f=W(x,a)

f=x/(1+x+a);

end

function DU = dtu(t,r)

C=r(1);S=r(2);G=r(3);X=r(4);E=r(5);F=r(6);

A1=100*W(E,C)*W(C,S);

A2=200*V(F)*W(S,G);

A3=G*X/(1+G+X);

DC=1.2/(1+C)-A1;

DS=2*A1-A2;

DG=2*A2-400*A3;
```

```

DX=250*A3-47*X;

DE=300*X*V(C*C)/(1+S+G)-10*E;

DF=490*X*V(S*S)/(1+G)-22.2*F;


DU(1)=DC;DU(2)=DS;DU(3)=DG;

DU(4)=DX;DU(5)=DE;DU(6)=DF;


endfunction


function result(n,m,t1,t2,u)

fl = fopen ("D6EQ.DAT", "w");

for i=1:m

fprintf (fl,"%15.5f %15.5f %15.5f %15.5f %15.5f \n",t1+(t2-t1)*i/(m-
1),u(1,i),u(2,i),u(3,i),u(4,i));

end

fclose(fl)

endfunction


function u = soleg(n,m,x,u,b,v)

t1=b; t=0.0; ok=true;

i=j=l=0; a=0.00001; hn=0.01;

w=0.00001; l=1; j=0;

t= 0.0; TEMP=t;

x=merson(t,t1,x,n,a,hn,w,j,ok);

TEMP=t=t1;


for i=1:n #1

u(i,1)=x(i);

end #1

s=(v-b)/(m-1.); t=b;


for l=2:m #2

```

```

t1=t+s; TEMP=t;

x= merson(t, t1, x, n, a, hn, w, j, ok);

TEMP=t=t1;

for i=1:n #3
u(i,1)=x(i);

end #3

end#2


endfunction # soleg


function y=merson(t,q,y,n,a,h,o, j,l)

d0=zeros (1,n, "double"); d1=zeros (1,n, "double"); d2=zeros (1,n, "double");
d3=zeros (1,n, "double"); d4=zeros (1,n, "double");

r= 1e-13; s=0.01; l= 1; z=0.;

for k=1:n

d4(k)=y(k);

end

z= t;  s= h;  p=s;  is= 0; ok=true;


while ok==true

p=s;c= q-z;

if abs(s)>abs(c)

s=c;

if abs(c/p)<r

break

end

is=1;

end


for k=1:n

```

```

d0(k)=d4(k);

end

f=s/3.;

#    print(d0)

z=z+f;


for k=1:n

d1(k)=f*d3(k);

d4(k)=d1(k)+d0(k);

end

d3=dtu(z,d4,d3);


for k=1:n

d1(k)=d1(k)*0.5;

d4(k)=f*0.5*d3(k)+d1(k)+d0(k);

end

d3=dtu(z,d4,d3);


z=z+f*0.5;

for k=1:n

d2(k)=f*4.5*d3(k);

d4(k)=d2(k)*0.25 +0.75*d1(k)+d0(k);

end

d3=dtu(z,d4,d3);


z=z+s*0.5;

for k=1:n

d1(k)=f*2*d3(k)+d1(k);

d4(k)=d1(k)*3-d2(k)+d0(k);

end

d3=dtu(z,d4,d3);

```

```

for k=1:n
d2(k)=-0.5*f*d3(k)-d2(k)+d1(k)*2.;
d4(k) = d4(k)-d2(k);
d1(k)=abs(a*0.5*d4(k));
d2(k)=abs(d2(k));
if abs(d4(k))<=r
continue
end

if d2(k)>d1(k)
c=s*0.5;
if (abs(c) >= o)
for k=1:n
d4(k)=d0(k);
end
z=z-s;
s=c;
is=0;
end

if j==0
l=0;
break
end
s=o;
if p<0.
s=-s;
end
if is==1
break

```



```

end
continue
end
end

if is==1
break
end
i=0;

for k=1:n
if (d2(k)>d1(k)/32.)
i=1;
end
end

if i==0
s=s*2;
end
continue
end

h = p;  t=z;
for k=1:n
y(k)=d4(k);
end
TEMP=z;

endfunction

n=NDim;

```

```

m=NPoints;

t1=TBE;

t=TEN;

x=XORI;

u=zeros(n,m)*0.1;

u=soleq(n,m,x,u,t1,t);

result(n,m,t1,t,u);

```

## Програма на мові Fortran

```

SUBROUTINE D6EE

IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)

COMMON/ARG6/C,S,G,X,E,F,
.DC,DS,DG,DX,DE,DF

V(X)=X/(X+1)

W(X,A)=X/(1+X+A)

* Var

A1=100*W(E,C)*W(C,S)

A2=200*V(F)*W(S,G)

A3=G*X/(1+G+X)

* Diff

DC=1.2/(1+C)-A1

DS=2*A1-A2

DG=2*A2-400*A3

*   DX=250*A3-48*X

    DX=250*A3-47*X

    DE=300*X*V(C*C)/(1+S+G)-10*E

*   DF=500*X*V(S*S)/(1+G)-10*F

*   Alf=23.5 - Chaos

    DF=490*X*V(S*S)/(1+G)-22.7*F

*   Alf=22.7 - 3-Circ

*   DF=490*X*V(S*S)/(1+G)-22.7*F

* 2-Cirk

```

```

*      DF=490*X*V(S*S)/(1+G)-23.7*F
*      DF=490*X*V(S*S)/(1+G)-23.6*F

RETURN

END

*  THE GENERAL SOLUTION

BLOCK DATA

IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)

COMMON/MERSOL/A(4),K,I(3)

DATA K,A,I/0,.00001,.01,.000001,5000.,0,1,1/

END

PROGRAM INT6G

IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)

PARAMETER(KD=10000,LD=6)

REAL*8 U(KD,LD),X(LD)
.,Y(LD,LD),V(LD),W(LD)

CHARACTER UK*7

COMMON/MERSOL/A(4),K(4)

COMMON/PRM6/X0(LD)

EXTERNAL D6EQ

DATA UK/'UNKNOWN'/

OPEN(1,FILE='D6EQ.DTN',FORM='UNFORMATTED',STATUS=UK)

OPEN(16,FILE='D6EQ.RES',STATUS=UK)

CALL PAR6

T1= 1000

T = 1050

DO2 I=1,LD

```

```

2  X(I)=X0(I)

      CALL SOLEQ(LD,KD,X,U,T1,T,D6EQ)

      OPEN(3,FILE="D6EQ.DAT",STATUS=UK)


      DO4 I=1,KD

      TI=(I-1)*(T-T1)/(KD-1)+T1

      4  WRITE(3,3)TI,U(I,1),U(I,2),U(I,3),U(I,4),
        .U(I,5),U(I,6)

      CALL D6DU(X,Y)

      SUM=0

      DO7 I=1,LD

7      SUM=SUM+Y(I,I)

WRITE(16,*) ' SUM= ',SUM


      CALL EISRG(LD,LD,Y,W,V,IE)

WRITE(16,*) IE

WRITE(16,*) ' W='

WRITE(16,*) W

WRITE(16,*) ' V='

WRITE(16,*) V

WRITE(16,*) ' MAX= ',DMX(W,LD)

CLOSE(1)

      STOP

      3  FORMAT(19F12.5)

      5  FORMAT(F12.5)

      STOP

      END


      SUBROUTINE PAR6

      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)

      COMMON/PRM6/C,S,G,X,E,F

```

```

      C = 1.
*      C = 1.9
      S = .01
      G = .01
      X = .3
      E = .01
      F = .01
      RETURN
      END

      SUBROUTINE D6EQ(T,X,F)

      IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)

      DIMENSION X(6),F(6)

      COMMON/ARG6/Y(6),G(6)

      DO1 I=1,6
1  Y(I)=X(I)

      CALL D6EE

      DO2 I=1,6
2  F(I)=G(I)

      RETURN

      END

      SUBROUTINE SOLEQ(N,M,X,U,Z,V,DTU)

      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)

      DIMENSION X(N),U(M,N)

      COMMON/MERSOL/A,H,W,B,K,L,J,NI(1)

      LOGICAL O,Q,OL

      EXTERNAL DTU

      OL=.TRUE.

      Q=K.EQ.0.OR.K.EQ.5

      O=K.EQ.3.OR.K.EQ.4.OR.K.EQ.5

```

```

IF(.NOT.O) J=N

WRITE(16,1) N,M,K,Z,V,A,H,W

1 FORMAT('*** SOL EQ N=',I4,' M=',I6,' K=',I4/,
. ' T1=',E10.4,' T2=',E10.4,' ACC,H,HMIN=',3E10.4)

L=1-M

S=Z/(M-1)

IF(Q.OR.Z.EQ.0.) L=0

IF(Q) S=Z

IF(Q.OR.K.EQ.1.OR.K.EQ.3) GOTO5

READ(1)T,S,H,L,X,((U(I1,I2),I1=1,M),I2=1,J)

WRITE(16,3) K,L,T

3 FORMAT('*** IN SOL K=',I4,' L=',I4,' T=',E10.4)

4 IF(L.GE.M) GOTO8

5 L=L+1

IF(L.EQ.2) S=(V-Z)/(M-1)

J0=0

CALL MERSON(T,T+S,X,N,A,H,W,J0,OL,DTU)

IF(L.LT.1) GOTO7

DO6 I=1,J

IF(O) U(L,I)=X(NI(I))

IF(.NOT.O) U(L,I)=X(I)

6 CONTINUE

7 IF(.NOT.Q) CALL CCTIME(C,CT)

IF(C.LT.B.OR.Q) GOTO4

8 IF(Q.AND.L.GE.M) RETURN

REWIND(1)

WRITE(1)T,S,H,L,X,((U(I1,I2),I1=1,M),I2=1,J)

WRITE(16,9) K,L,T

9 FORMAT('*** OUT SOL K=',I4,' L=',I4,' T=',E10.4)

RETURN

END

```

```

SUBROUTINE CCTIME(A,B)

IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)

DATA K/0/

K=K+1

A=K

B=A

RETURN

END

SUBROUTINE MERSON(T,Q,Y,N,A,H,O,J,L,DTU)

IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)

COMMON/MERSNL/D(500)

LOGICAL L

REAL*8 Y(N)

DATA R/1.E-13/

L=.TRUE.

DO1 K=1,N

1 D(K+4*N)=Y(K)

Z=T

S=H

IS=0

2 P=S

C=Q-Z

IF(ABS(S).LT.ABS(C)) GOTO3

S=C

IF(ABS(C/P).LT.R) GOTO11

IS=1

3 DO4 K=1,N

4 D(K)=D(K+4*N)

F=S/3

CALL DTU(Z,D(1+4*N),D(1+3*N))

```

```

Z=Z+F

DO5 K=1,N

D(K+N)=F*D(K+3*N)

5 D(K+4*N)=D(K+N)+D(K)

CALL DTU(Z,D(1+4*N),D(1+3*N))

DO6 K=1,N

D(K+N)=.5*D(K+N)

6 D(K+4*N)=.5*F*D(K+3*N)+D(K+N)+D(K)

CALL DTU(Z,D(1+4*N),D(1+3*N))

Z=Z+.5*F

DO7 K=1,N

D(K+2*N)=4.5*F*D(K+3*N)

7 D(K+4*N)=.25*D(K+2*N)+.75*D(K+N)+D(K)

CALL DTU(Z,D(1+4*N),D(1+3*N))

Z=Z+.5*S

DO8 K=1,N

D(K+N)=2*F*D(K+3*N)+D(K+N)

8 D(K+4*N)=3*D(K+N)-D(K+2*N)+D(K)

CALL DTU(Z,D(1+4*N),D(1+3*N))

DO9 K=1,N

D(K+2*N)=-.5*F*D(K+3*N)-D(K+2*N)+2*D(K+N)

D(K+4*N)=D(K+4*N)-D(K+2*N)

D(K+N)=ABS(.5*A*D(K+4*N))

D(K+2*N)=ABS(D(K+2*N))

IF(ABS(D(K+4*N)).LE.R) GOTO9

IF(D(K+2*N).GT.D(K+N)) GOTO13

9 CONTINUE

IF(IS.EQ.1) GOTO11

DO10 K=1,N

IF(D(K+2*N).GT.D(K+N)/32) GOTO2

10 CONTINUE

```



```

        S=S*2

        GOTO2

11  H=P

        T=Z

        DO12 K=1,N

12  Y(K)=D(K+4*N)

        RETURN

13  C=.5*S

        IF(ABS(C).GE.O) GOTO14

IF(J.EQ.O) GOTO16

        S=O

IF(P.LT.O.) S=-S

IF(IS.EQ.1) GOTO11

        GOTO2

14  DO15 K=1,N

15  D(K+4*N)=D(K)

        Z=Z-S

        S=C

        IS=0

        GOTO2

16  L=.FALSE.

        GOTO11

        END


SUBROUTINE EISRG(NM,N,AR,WR,WI,IERR)

IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)

DIMENSION AR(NM,NM),WR(N),WI(N)

CALL BALANC(NM,N,AR,LOW,IGH,WR)

CALL ELMHES(NM,N,LOW,IGH,AR,WR)

CALL HQR(NM,N,LOW,IGH,AR,WR,WI,IERR)

RETURN

```

```

END

SUBROUTINE BALANC(NM,N,A,LOW,IGH,SCALE)

IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)

DIMENSION A(NM,N),SCALE(N)

LOGICAL NOCONV

RADIX = 2.

B2 = RADIX * RADIX

K = 1

L = N

GO TO 100

20 SCALE(M) = J

IF (J .EQ. M) GO TO 50

DO 30 I = 1, L

    F = A(I,J)

    A(I,J) = A(I,M)

    A(I,M) = F

30 CONTINUE

DO 40 I = K, N

    F = A(J,I)

    A(J,I) = A(M,I)

A(M,I) = F

40 CONTINUE

50 GO TO (80,130), IEXC

80 IF (L .EQ. 1) GO TO 280

    L = L - 1

100 DO 120 JJ = 1, L

    J = L + 1 - JJ

    DO 110 I = 1, L

        IF (I .EQ. J) GO TO 110

        IF (A(J,I) .NE. 0.0) GO TO 120

110    CONTINUE

```

```

        M = L

        IEXC = 1

        GO TO 20

120  CONTINUE

        GO TO 140

130  K = K + 1

140  DO 170 J = K, L

        DO 150 I = K, L

            IF (I .EQ. J) GO TO 150

            IF (A(I,J) .NE. 0.0) GO TO 170

150    CONTINUE

        M = K

        IEXC = 2

        GO TO 20

170  CONTINUE

        DO 180 I = K, L

180    SCALE(I) = 1.0

190    NOCONV = .FALSE.

        DO 270 I = K, L

C = 0.0

        R = 0.0

        DO 200 J = K, L

            IF (J .EQ. I) GO TO 200

            C = C + ABS(A(J,I))

            R = R + ABS(A(I,J))

200    CONTINUE

        G = R / RADIX

        F = 1.0

        S = C + R

210    IF (C .GE. G) GO TO 220

        F = F * RADIX

```

```

        C = C * B2

        GO TO 210

220     G = R * RADIX

230     IF (C .LT. G) GO TO 240

        F = F / RADIX

        C = C / B2

        GO TO 230

240     IF ((C + R) / F .GE. 0.95 * S) GO TO 270

        G = 1.0 / F

        SCALE(I) = SCALE(I) * F

        NOCONV = .TRUE.

        DO 250 J = K, N

250     A(I,J) = A(I,J) * G

        DO 260 J = 1, L

260     A(J,I) = A(J,I) * F

270 CONTINUE

        IF (NOCONV) GO TO 190

280 LOW = K

        IGH = L

        RETURN

        END

        SUBROUTINE ELMHES(NM,N,LOW,IGH,A,INT)

        IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)

        REAL*8 A(NM,N),INT(IGH)

        LA = IGH - 1

        KP1 = LOW + 1

        IF (LA .LT. KP1) GO TO 200

        DO 180 M = KP1, LA

            MM1 = M - 1

            X = 0.0

            I = M

```

```

DO 100 J = M, IGH

    IF (ABS(A(J,MM1)) .LE. ABS(X)) GO TO 100

    X = A(J,MM1)

    I = J
100    CONTINUE

    INT(M) = I

    IF (I .EQ. M) GO TO 130

    DO 110 J = MM1, N

        Y = A(I,J)

        A(I,J) = A(M,J)

        A(M,J) = Y
110    CONTINUE

    DO 120 J = 1, IGH

        Y = A(J,I)

        A(J,I) = A(J,M)

        A(J,M) = Y
120    CONTINUE

130    IF (X .EQ. 0.0) GO TO 180

    MP1 = M + 1

    DO 160 I = MP1, IGH

        Y = A(I,MM1)

        IF (Y .EQ. 0.0) GO TO 160

        Y = Y / X

A(I,MM1) = Y

    DO 140 J = M, N

140        A(I,J) = A(I,J) - Y * A(M,J)

        DO 150 J = 1, IGH

150            A(J,M) = A(J,M) + Y * A(J,I)

160    CONTINUE


180 CONTINUE

```

```

200 RETURN

END

SUBROUTINE HQR(NM,N,LOW,IGH,H,WR,WI,IERR)

IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)

INTEGER EN,ENM2

REAL*8 MACHEP

LOGICAL NOTLAS

DIMENSION H(NM,N),WR(N),WI(N)

MACHEP=2.**(-23)
C MACHEP=2.**(-55)

IERR = 0

DO 50 I = 1, N

    IF (I .GE. LOW .AND. I .LE. IGH) GO TO 50

    WR(I) = H(I,I)

    WI(I) = 0.0

50 CONTINUE

EN = IGH

T = 0.0

60 IF (EN .LT. LOW) GO TO 1001

ITS = 0

NA = EN - 1

ENM2 = NA - 1

70 DO 80 LL = LOW, EN

    L = EN + LOW - LL

    IF (L .EQ. LOW) GO TO 100

    IF (ABS(H(L,L-1)) .LE. MACHEP * (ABS(H(L-1,L-1))

X      + ABS(H(L,L)))) GO TO 100

80 CONTINUE

100 X = H(EN,EN)

IF (L .EQ. EN) GO TO 270

Y = H(NA,NA)

```

```

      W = H(EN,NA) * H(NA,EN)

      IF (L .EQ. NA) GO TO 280

C     CIRCUS

C     IF (ITS .EQ. 30) ITS=20

      IF (ITS .EQ. 30) GO TO 1000

      IF (ITS .NE. 10 .AND. ITS .NE. 20) GO TO 130

      T = T + X

      DO 120 I = LOW, EN

120  H(I,I) = H(I,I) - X

      S = ABS(H(EN,NA)) + ABS(H(NA,ENM2))

      X = 0.75 * S

      Y = X

      W = -0.4375 * S * S

130  ITS = ITS + 1

      DO 140 MM = L, ENM2

      M = ENM2 + L - MM

      ZZ = H(M,M)

      R = X - ZZ

      S = Y - ZZ

      P = (R * S - W) / H(M+1,M) + H(M,M+1)

      Q = H(M+1,M+1) - ZZ - R - S

      R = H(M+2,M+1)

      S = ABS(P) + ABS(Q) + ABS(R)

P = P / S

      Q = Q / S

      R = R / S

      IF (M .EQ. L) GO TO 150

      IF (ABS(H(M,M-1)) * (ABS(Q) + ABS(R)) .LE. MACHEP * ABS(P)

X      * (ABS(H(M-1,M-1)) + ABS(ZZ) + ABS(H(M+1,M+1)))) GO TO 150

140  CONTINUE

150  MP2 = M + 2

```

```

DO 160 I = MP2, EN

H(I,I-2) = 0.0

IF (I .EQ. MP2) GO TO 160

H(I,I-3) = 0.0

160 CONTINUE

DO 260 K = M, NA

NOTLAS = K .NE. NA

IF (K .EQ. M) GO TO 170

P = H(K,K-1)

Q = H(K+1,K-1)

R = 0.0

IF (NOTLAS) R = H(K+2,K-1)

X = ABS(P) + ABS(Q) + ABS(R)

IF (X .EQ. 0.0) GO TO 260

P = P / X

Q = Q / X

R = R / X

170 S = SIGN(SQRT(P*P+Q*Q+R*R),P)

IF (K .EQ. M) GO TO 180

H(K,K-1) = -S * X

GO TO 190

180 IF (L .NE. M) H(K,K-1) = -H(K,K-1)

190 P = P + S

X = P / S

Y = Q / S

ZZ = R / S

Q = Q / P

R = R / P

DO 210 J = K, EN

P = H(K,J) + Q * H(K+1,J)

IF (.NOT. NOTLAS) GO TO 200

```



```

        P = P + R * H(K+2,J)

        H(K+2,J) = H(K+2,J) - P * ZZ
200      H(K+1,J) = H(K+1,J) - P * Y

        H(K,J) = H(K,J) - P * X

210      CONTINUE

        J = MIN0(EN,K+3)

        DO 230 I = L, J

            P = X * H(I,K) + Y * H(I,K+1)

            IF (.NOT. NOTLAS) GO TO 220

            P = P + ZZ * H(I,K+2)

            H(I,K+2) = H(I,K+2) - P * R
220      H(I,K+1) = H(I,K+1) - P * Q

            H(I,K) = H(I,K) - P

230      CONTINUE

260      CONTINUE

        GO TO 70

270      WR(EN) = X + T

        WI(EN) = 0.0

        EN = NA

        GO TO 60

280      P = (Y - X) / 2.0

        Q = P * P + W

        ZZ = SQRT(ABS(Q))

        X = X + T

        IF (Q .LT. 0.0) GO TO 320

        ZZ = P + SIGN(ZZ,P)

        WR(NA) = X + ZZ

        WR(EN) = WR(NA)

        IF (ZZ .NE. 0.0) WR(EN) = X - W / ZZ

        WI(NA) = 0.0

        WI(EN) = 0.0

```

```

        GO TO 330

320 WR(NA) = X + P

        WR(EN) = X + P

        WI(NA) = ZZ

        WI(EN) = -ZZ

330 EN = ENM2

        GO TO 60

1000 IERR = EN

1001 RETURN

        END

        SUBROUTINE D6DU(X,Y)

        IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)

REAL*8 X(6),Y(6,6),F(6),G(6)

        H=.00001

        DO1 J=1,6

        A=X(J)

        X(J)=A+H

        CALL D6EQ(T,X,G)

X(J)=A-H

        CALL D6EQ(T,X,F)

DO2 I=1,6

        2 Y(I,J)=(G(I)-F(I))/H/2

        1 X(J)=A

        RETURN

        END

        FUNCTION DMX(X,N)

        IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)

        REAL*8 X(N)

        DMX=X(1)

        DO1 J=1,N

        IF(DMX.LT.X(J)) DMX=X(J)

```

1      CONTINUE  
RETURN  
END