

Курсова робота на тему:
Коспектральні кубічні графи для $n \leq 20$

Керівник курсової роботи
Старший викладач,
кандидат фіз.-мат. наук
Лебідь В. О.
(прізвище та ініціали)

“ ____ ” _____ 2020 р.

Виконала студентка
напряму підготовки
122 Комп'ютерні науки та
інформаційні технології
Уткіна О. Є.
(прізвище та ініціали)

“ ____ ” _____ 2020 р.

Міністерство освіти і науки України
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»
Кафедра математики факультету інформатики

ЗАТВЕРДЖУЮ
Зав. кафедри математики,
проф. Олійник Б. В.

_____ (підпис)
„_____” _____ 2020 р.

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ
на курсову роботу

студентці Уткіній О. Є. факультету інформатики 4 курсу

ТЕМА «Коспектральні кубічні графи для $n \leq 20$.»

Вихідні дані:

- F. Ramezan, B. Tayfeh-Rezaie, Spectral characterization of some cubic graphs
- Brouwer A.E., Haemers W. H., Spectra of graphs, 2011.

Зміст ТЧ до курсової роботи:

Індивідуальне завдання

Вступ

1 Основні означення та початкові відомості

1.1 Основні означення

1.2 Приклад розрахунку спектральних характеристик коспектральних графів

2 Спектральні характеристики кубічних графів

2.1 Спектральні характеристики кубічних графів $G_t = C_{2t+1} \times K_2$

2.2 Приклади розрахунку спектрів графів G_1 та G_2

3 Побудова коспектральних кубічних графів

3.1 Пошук коспектральних графів серед кубічних графів $n \leq 20$

3.2 Побудова коспектральних пар графів, які містять кубічні графи

Висновки

Список літератури

Дата видачі „_____” _____ 2020 р. Керівник _____
(підпис)

Завдання отримала _____

(підпис)

Тема: «Коспектральні кубічні графи для $n \leq 20$ »

Календарний план виконання роботи:

№ п/п	Назва етапу дипломного проекту (роботи)	Термін виконання етапу	Примітка
1.	Отримання завдання на курсову роботу.	02.11.2019	
2.	Ознайомлення з поняттям кубічного графа.	13.11.2019	
3.	Наведення прикладів та ілюстрацій.	19.01.2020	
4.	Визначення спектра графів.	03.02.2020	
5.	Формулювання тверджень.	04.03.2020	
6.	Доведення тверджень.	07.03.2020	
7.	Написання роботи.	04.04.2020	
8.	Створення слайдів для презентації	15.04.2020	
9.	Захист курсової роботи.	19.04.2020	

Студент Уткіна О.Є.

Керівник Лебідь В.О.

“ ” 2020 р.

Зміст

Вступ	3
1 Основні означення і початкові відомості	5
1.1 Основні означення	5
1.2 Приклад розрахунку спектральних характеристик коспектральних графів	6
2 Спектральні характеристики кубічних графів	9
2.1 Спектральні характеристики кубічних графів $G_t = C_{2t+1} \times K_2$. .	9
2.2 Приклади розрахунку спектрів графів G_1 та G_2	11
3 Побудова коспектральних кубічних графів	14
3.1 Пошук коспектральних графів серед кубічних графів $n \leq 20$. . .	14
3.2 Побудова коспектральних пар графів, які містять кубічні графи .	18
Список літератури	23

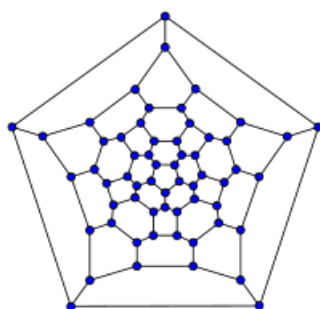
Вступ

В роботі розглядаються та досліджуються коспектральні кубічні графи для $n \leq 20$.

Кубічним графом називають простий граф, у якому кожна вершина має степінь 3. Клас кубічних графів є особливо цікавим для математичних застосувань та програм завдяки тому, що для різноманітних важливих відкритих проблем у теорії графів саме кубічні графи є найменшими або найпростішими контрприкладми.

У хімії кубічні графи служать моделями для фулеренів, за відкриття яких Роберт Керл, Герольд Крото та Річард Сполі отримали Нобелівську премію, або більш взагалі - для деяких циклополієнів.

Генерація кубічних графів може вважатися еталонною проблемою при перерахуванні структур.



Фулерен

Кубічні графи природним чином виникають у багатьох розділах топології, зокрема, при вивченні CW-комплексів. Також кубічними є графи простих багатогранників в тривимірному просторі, таких, як додекаедр.

Довільне вкладення графа в двовимірну поверхню можна представити у

вигляді структури кубічного графа, відомої як карта кодування графа. У цій структурі кожна вершина кубічного графа представляється як прапор вкладення, і являє собою трійку — вершина, ребро та грань. Три сусіди кожного прапора — це три прапори, які можна отримати, змінивши один з елементів прапора та залишивши два інших.

Зважаючи на актуальність дослідження кубічних графів та їх коспектральності, метою нашої роботи є розрахунок спектральних характеристик коспектральних графів, дослідження характеристик кубічних графів, пошук коспектральних графів серед кубічних графів з кількістю вершин $n \leq 20$.

Робота складається з 3 розділів.

У першому розділі розглянуто основні означення і початкові відомості про поняття, що стосуються коспектральних графів. Було обчислено спектральні характеристики коспектральних графів на 6 вершинах.

У другому розділі наведено спектральні характеристики кубічних графів спеціальних типів $G_t = C_{2t+1} \times K_2$, опрацьовано приклади розрахунку спектрів графів $G_1 = C_3 \times K_2$ та $G_2 = C_5 \times K_2$.

У третьому розділі була виконана робота з пошуку коспектральних графів серед кубічних графів $n \leq 20$. Побудовано коспектральні пари графів, які містять кубічні графи.

Розділ 1

Основні означення і початкові відомості

1.1 Основні означення

На початку пригадаємо основні означення.

Означення 1.1.1. [1] Загальним неорієнтованим графом називають $G = (V, E, L, \delta_E, \delta_L)$, де V - множина вершин, E - множина ребер, L - множина петель та відображень, $(\delta_E : E \rightarrow C_V^2)$ - множина двохелементних підмножин множини V , $(\delta_L : L \rightarrow V)$.

Означення 1.1.2. [1] Простим неорієнтовним графом називається $G = (V, E, \delta_E)$, де V - множина вершин, E - множина ребер, $(\delta_E : E \rightarrow C_V^2)$.

Означення 1.1.3. [1] Степінь вершини простого графа - це кількість ребер, з якою ця вершинина інцидентна.

Означення 1.1.4. [1] Простий граф називають k -регулярним, якщо всі його вершини мають степінь k .

Означення 1.1.5. [1] Граф називають кубічним, якщо степінь кожної його вершини дорівнює 3.

Означення 1.1.6. [4] Нехай Γ - це скінченний неорієнтовний граф без петель. Тоді матрицею інцидентності графа Γ є 0-1 матриця M , з рядками, індексованими за вершинами і стовпцями, індексованими за ребрами, де $M_{xe} = 1$, коли вершина x є кінцевою точкою ребра e .

Означення 1.1.7. [4] Нехай Γ - це скінченний граф без кратних ребер. Тоді матрицею суміжності графа Γ визначається 0-1 матриця A з нулів і оди-

ниця, яка індексована набором вершин V з Γ , де $A_{xy} = 1$, коли існує ребро з вершини x до вершини y в графі Γ , і $A_{xy} = 0$, коли не існує.

Означення 1.1.8. [4] Характеристичний поліном – це поліном, що визначається формулою $p_A(\theta) = \det(\theta I - A)$

Означення 1.1.9. [4] Спектром скінченного графа Γ називається множина власних чисел матриці суміжності A разом з їх кратністю.

Означення 1.1.10. [4] Нехай Γ – це скінченний неорієнтовний граф без петель. Матрицею Лапласа графа Γ називається матриця L , яка індексована множиною вершин графа Γ , де $L_{xy} = -A_{xy}$ для $x \neq y$. Якщо D – це діагональна матриця, індексована набором вершин графа Γ таким, що D_{xx} є степенем вершини x , тоді $L = D - A$. Матриця $Q = D + A$ називається беззнаковою матрицею Лапласа графа Γ .

Означення 1.1.11. [4] Спектром Лапласа неорієнтовного скінченного графа без петель Γ є спектр матриці Лапласа.

1.2 Приклад розрахунку спектральних характеристик коспектральних графів

Розглянемо приклад двох неізоморфних графів, які мають однаковий спектр.

Два неізоморфні графи G та H називаються коспектральними, якщо вони мають однаковий спектр [7].

Маємо 2 коспектральних графи:

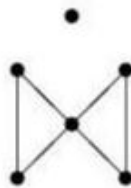


рис 1.2.1 - Граф G

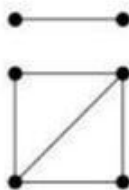


рис 1.2.2 - Граф Н

Рохрауємо за відповідною формулою їх характеристичний многочлен:

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda * I - A)$$

$$\text{Отримуємо: } p_A(\lambda) = \lambda^6 - 6\lambda^4 - 4\lambda^3 + 5\lambda^2 + 4\lambda.$$

Прирівнявши характеристичний многочлен до 0, отримаємо власні числа для кожного з графів.

Порахуємо власні вектори, що відповідають власним числам для кожного із графів.

У наступній таблиці записані власні вектори для Графа G та Графа Н:

Власні числа	Граф G	Граф Н
$\lambda_1 = 0$	$\begin{pmatrix} u \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -u \\ 0 \\ u \\ 0 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 1$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -u \\ -u \\ 0 \\ u \\ u \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u \\ u \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\lambda_3 = -1$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -u \\ u \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -v \\ v \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -u \\ u \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -v \\ 0 \\ v \end{pmatrix}$
$\lambda_4 = -1$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -u \\ u \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -v \\ v \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -u \\ u \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -v \\ 0 \\ v \end{pmatrix}$
$\lambda_5 = \frac{\sqrt{17}+1}{2}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ u \\ u \\ \frac{\sqrt{17}-1}{2}u \\ u \\ u \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{17}-1}{4}u \\ u \\ \frac{\sqrt{17}-1}{4}u \\ u \end{pmatrix}$

$\lambda_6 = \frac{1-\sqrt{17}}{2}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ u \\ u \\ \frac{-\sqrt{17}-1}{2}u \\ u \\ u \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-\sqrt{17}-1}{4}u \\ u \\ \frac{-\sqrt{17}-1}{4}u \\ u \end{pmatrix}$
-------------------------------------	--	--

Розділ 2

Спектральні характеристики кубічних графів

2.1 Спектральні характеристики кубічних графів $G_t = C_{2t+1} \times K_2$

Детально ми будемо розглядати такі кубічні графи, які є декартовим добутком двох графів - циклічного графа C_n та повного графа на двох вершинах K_2 .

Дамо означення декартового добутку двох довільних графів G та H .

Означення 2.1.1. [6] Припустимо, G та H є графами з набором вершин $V(G) = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ та $V(H) = (v_1, v_2, \dots, v_n)$. Треба відзначити, що графи G та H можуть мати різну кількість вершин.

Тоді декартовим добутком графа G та графа H буде граф, який має набір вершин таких, що $V(G \times H) = \{(u_i, v_j) | u_i \in V(G) \text{ та } v_j \in V(H)\}$.

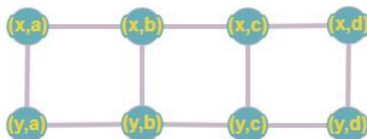
$(e = (u_i, v_j)(u_k, v_l))$ буде ребром графа $G \times H$ тоді і тільки тоді, коли або

1) $i = k$ та v_j та v_l є суміжними у H

або

2) $j = l$ та u_i та u_k є суміжними у G .

Приклад 2.1.1. Приклад декартового добутку двох графів $K_2 \times P_4$

рис.2.1.1 - Граф K_2 рис.2.1.2 - Граф P_4 рис.2.1.3 - Граф $K_2 \times P_4$

Декартів добуток графів використовують у різноманітних галузях. Наприклад, таких як: теорія кодування, проектування мереж, у хімічній галузі (досліджують теорію хімічних графів).

Було доведено (див у статті [7]), що декартів добуток циклу непарної довжини та повного графа на двох вершинах визначається своїм спектром. Було також допущено, що таке ж твердження є вірним і для циклів парної довжини.

Нехай C_n визначає цикл довжини n . Сформулюємо основні твердження, які доводять, що для будь-якого додатнього числа t граф $G_t = C_{2t+1} \times K_2$ визначається своїм спектром.

Припустимо, граф G_t має коспектральну пару - граф H_t , який містить 2 цикли довжиною $2t + 1$. Позначимо ці цикли графа H_t : C та C' . Оскільки C та C' - найменші цикли непарної довжини у графі H_t , то вони є підграфами графа H_t .

Наступна лема доводить, що цикли C та C' є незв'язними.

Лема 2.1.1. [7] C та C' є незв'язними. (доведення див у статті ([7])).

Твердження 2.1.1. [7] Для заданого k -регулярного графа G нехай H - коспектральний до графа $\Gamma = G \times K_2$. Якщо H - незв'язне об'єднання двох

копій графа G як підграфа, тоді H є ізоморфним до G .

Теорема 2.1.1. [7] Для будь-якого додатнього числа t граф G_t визначається своїм спектром.

Доведення. [7] Нехай H_t – граф, що є коспектральним до G_t . Тоді H_t має 2 цикли довжиною $2t + 1$, скажімо, C та C' . За Лемою 2.1.1 C та C' не зв'язні і тому твердження теореми впливає з Твердження 2.1.1. \square

Ми довели, що декартів добуток непарного циклу з K_2 визначений своїм спектром. Для парного n ми не знаємо багато про спектральну характеристику $C_n \times K_2$. Наразі ми лише знаємо, що $C_n \times K_2$ визначений своїм спектром для $n = 6, 8, 10$. Зазначимо, що $C_4 \times K_2$ – також визначений своїм спектром. Ми припускаємо, що $C_n \times K_2$ – визначений своїм спектром для всіх n .

2.2 Приклади розрахунку спектрів графів G_1 та G_2

Якщо G – k -регулярний граф, тоді для кожного власного числа θ маємо $|\theta| \leq k$.

Як наслідок, якщо G – k -регулярний граф, тоді матриця суміжності визначається формулою $L = kI - A$. [4]

Отже, якщо G має власні числа матриці суміжності $k = \theta_1 \geq \dots \geq \theta_n$ та власні числа матриці Лапласа $0 = \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n$, тоді $\theta_i = k - \mu_i$ для $i = 1, \dots, n$.

Для кубічних графів маємо наступне.

Для кожного власного числа θ маємо $|\theta| \leq 3$.

Як наслідок, якщо G – кубічний граф, тоді матриця Лапласа визначається формулою $L = 3I - A$.

Отже, якщо G має власні числа матриці суміжності $3 = \theta_1 \geq \dots \geq \theta_n$ та власні числа матриці Лапласа $0 = \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n$, тоді $\mu_i = 3 - \theta_i$ для $i = 1, \dots, n$.

Данна властивість спектру кубічних графів дозволяє сформулювати наступне твердження.

Твердження 2.2.1. *Якщо кубічні графи коспектральні відносно матриці суміжності, то вони коспектральні і відносно матриці Лапласа.*

Дане твердження (Твердження 2.2.1) є справедливим, оскільки між власними числами матриці суміжності та власними числами матриці Лапласа є взаємно однозначна відповідність (бієкція).

Розглянемо наступні кубічні графи:

Приклад 2.2.1. *Приклад розрахунку власних чисел матриці суміжності і матриці Лапласа графа $G_1 = C_3 \times K_2$*

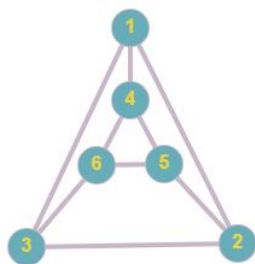
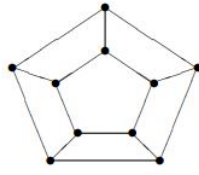


рис.2.2.1 - Граф $C_3 \times K_2$

Власні числа A	Власні числа L
$\lambda_1 = 3$	$\mu_1 = 0$
$\lambda_2 = 1$	$\mu_2 = 2$
$\lambda_3 = 0$	$\mu_3 = 3$
$\lambda_4 = -0$	$\mu_4 = 3$
$\lambda_5 = -2$	$\mu_5 = 5$
$\lambda_6 = -2$	$\mu_6 = 5$

Приклад 2.2.2. *Приклад розрахунку власних чисел матриці суміжності і матриці Лапласа графа $G_2 = C_5 \times K_2$*

рис.2.2.2 - Граф $C_5 \times K_2$

Власні числа A	Власні числа L
$\lambda_1 = 3$	$\mu_1 = 0$
$\lambda_2 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$	$\mu_2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$
$\lambda_3 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$	$\mu_3 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$
$\lambda_4 = 1$	$\mu_4 = 2$
$\lambda_5 = \frac{\sqrt{5}-3}{2}$	$\mu_5 = \frac{9-\sqrt{5}}{2}$
$\lambda_6 = \frac{\sqrt{5}-3}{2}$	$\mu_6 = \frac{9-\sqrt{5}}{2}$
$\lambda_7 = -\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	$\mu_7 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$
$\lambda_8 = -\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	$\mu_8 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$
$\lambda_9 = -\frac{\sqrt{5}+3}{2}$	$\mu_9 = \frac{9+\sqrt{5}}{2}$
$\lambda_{10} = -\frac{\sqrt{5}+3}{2}$	$\mu_{10} = \frac{9+\sqrt{5}}{2}$

Розділ 3

Побудова коспектральних кубічних графів

3.1 Пошук коспектральних графів серед кубічних графів $n \leq 20$

Історично, перші повні списки кубічних зв'язних графів були розроблені вченим на ім'я де Вріс у кінці 19 сторіччя, який надав світові список всіх кубічних зв'язних графів з кількістю вершин до 10. Вчений Балабан, який був відомим теоретичним хіміком, у 1966-1967 роках зміг згенерувати всі можливі кубічні графи з кількістю вершин до 12.

Списки графів де Вріса були незалежно підтверджені розрахунками вручну вченими Буссемейкером та Зайделем у 1968 році та іншим вченим Імричем, який працював над перевіркою списків у 1971 році.

Починаючи з 1974 року було опубліковано багато різноманітних алгоритмів генерації кубічних графів. Кожний алгоритм був реалізований у комп'ютерній програмі, яка могла генерувати великі списки кубічних графів. У 1983 році вчені Робінсон та Вормальд опублікували спільну статтю про неконструктивне перерахування кубічних графів.

Коли почались сучасні дослідження, найбільш швидкою публічнодоступною програмою для генерації кубічних графів була програма `miniBaum`. Створена в 1992 році `miniBaum` могла використовуватися для створення повних списків всіх кубічних графів з кількістю вершин до 24 та декількох обме-

жених класів з великою кількістю вершин, таких як дводольні графи або графи з найбільшим обхватом.

Пізніше, коли комп'ютери стали доступні в набагато більшій кількості та стали набагато швидшими, програма `miniBaum` стала використовуватися для генерування всіх кубічних графів включаючи графи з кількістю вершин рівну 30 для того, щоб перевірити їх на розклад Ютсиса.

У 1999 році вчений Мерінгер опублікував дуже ефективний алгоритм для генерування регулярних графів для заданого степеня, проте для генерації всіх кубічних графів програма, заснована на його алгоритмі, працювала повільніше, ніж програма `miniBaum`.

У 2000 році вчена Сан'їмятав та її керівник Маккей розробили набір дуже швидких спеціалізованих програм для різних класів кубічних графів. На жаль, ці програми ніколи не виходили і не публікувалися.

У статті [7] зазначається, що на сьогоднішній день порахована точна кількість кубічних графів для графів з кількістю вершин рівною 32:

n (К-ть вершин)	Кількість кубічних графів
4	1
6	2
8	5
10	19
12	85
14	509
16	4060
18	41301
20	510489
22	7319447
24	179405351
26	2094480864
28	40497138011
30	845480228069
32	18941522184590

таблиця 3.1.1

На основі цих розрахунків наведемо опис спектру та структурних характеристик графів у наступній таблиці.

n - Кількість вершин

N - Кількість кубічних графів для $n \leq 32$.

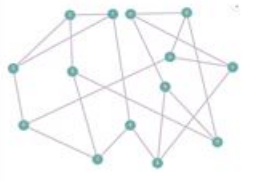

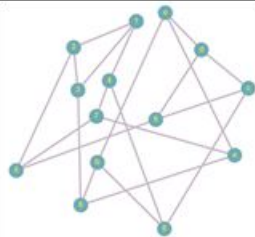
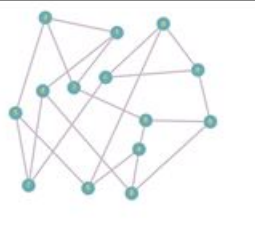
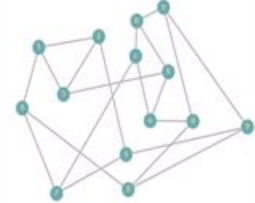
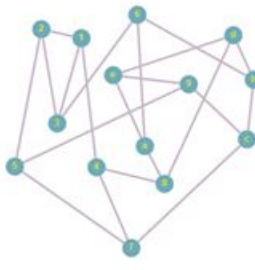
DS - Кількість графів визначається своїм спектром

CG - К-ть коспектральних графів

n	N	DS	CG
n=4	1	1	0
n=6	2	2	0
n=8	5	5	0
n=10	19	19	0
n=12	85	85	0
n=14	509	503	$2 \times 3 = 6$ (3 пари)
n=16	4060	3973	$2 \times 42 = 84$ (42 пари), 3 (1 трійка)
n=18	41301	40310	$471 \times 2 = 942$ (471 пара), $15 \times 3 = 45$ (15 трійок), 1 четвірка
n=20	510489	500377	$4799 \times 2 = 9598$ (4799 пар), $168 \times 3 = 45$ (168 трійок), $10 \times 4 = 40$ (10 четвірок)

табл 3.1.2

З таблиці 3.1.2 видно, що перша пара коспектральних кубічних графів з'являється на 14 вершинах. А саме, на таких графах, що наведені у наступній таблиці (див. [7]).

n=14	L_1	L_1^I	Спектр Матриці суміжності
			$[-2.8512,$ $-1.8794,$ $-1.8794,$ $-1.8372, -1, -1,$ $0, 0.3473,$ $0.3473, 1.2555,$ $1.5321, 1.5321,$ $2.4329, 3]$
			$[-2.6970,$ $-1.9319,$ $-1.8521,$ $-1.4142,$ $-1.4142, -1,$ $-0.5176, 0.2627,$ $0.5176, 1.4142,$ $1.4142, 1.9319,$ $2.2863, 3]$
			$[-2.4812,$ $-2.4621,$ $-2.0569,$ $-1.6180,$ $-0.8319,$ $-0.6889,$ $-0.4352, 0.1743,$ $0.6180, 1.1701,$ $1.4598, 1.9276,$ $2.2245, 3]$

3.2 Побудова коспектральних пар графів, які містять кубічні графи

У загальному випадку спектр графа не визначає граф однозначно. Відомо, що регулярні графи степені 0, 1, 2 характеризуються їх спектром з точністю до ізоморфізму, і що для кожного $k \geq 4$ існують коспектральні регулярні графи степеня k . Останнє твердження вірне і для $k=3$.

У статті [5] було досліджено, що зв'язні кубічні графи можуть не мати коспектральної пари, проте, у незв'язному об'єднанні з іншим графом - коспектральна пара може з'явитися.

Як приклад, розглянемо наступну пару об'єднань:

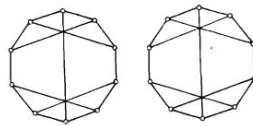


рис.3.2.1 - Перше об'єднання

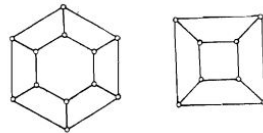


рис.3.2.2 - Друге об'єднання

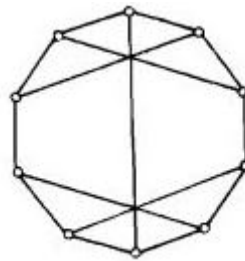


рис.3.2.3 - Граф А

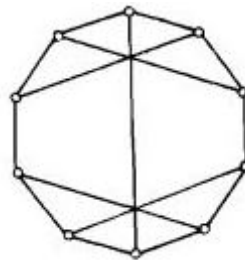


рис.3.2.4 - Граф В

Перше об'єднання складається з графа А на 10 вершинах та графа В, що є

копією графа А.

Граф А має спектр $3; 2; 1; 1; 0; 0; -1; -1; -2; -3$ та не має коспектральної пари. Об'єднавши цей граф зі своєю копією (графом В) отримуємо спектр об'єднання: $3; 3; 2; 2; 1; 1; 1; 1; 0; 0; 0; 0; -1; -1; -1; -1; -2; -2; -3; -3$.

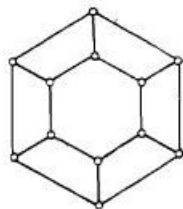


рис.3.2.5 - Граф С

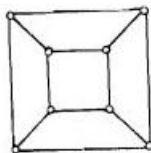


рис.3.2.6 - Граф D

Друге об'єднання складається з графа С на 12 вершинах та графа D на 8 вершинах.

Граф С має спектр $3; 2; 2; 1; 0; 0; 0; 0; -1; -2; -2; -3$. та не має коспектральної пари. Об'єднавши цей граф з графом D на 8 вершинах зі спектром $3; 1; 1; 1; -1; -1; -1; -3$, отримуємо спектр об'єднання: $3; 3; 2; 2; 1; 1; 1; 1; 0; 0; 0; 0; -1; -1; -1; -1; -2; -2; -3; -3$.

Як бачимо, спектри цих двох об'єднань співпадають, отже ми отримали коспектральну пару на 20 вершинах.

У ході роботи над курсовою роботою було самостійно знайдено пари коспектральних графів, які є незв'язним об'єднанням кубічних та інших, зокрема ізолюваних точок та шляхів довжини 2.

Ми побудували власні приклади таких об'єднань.

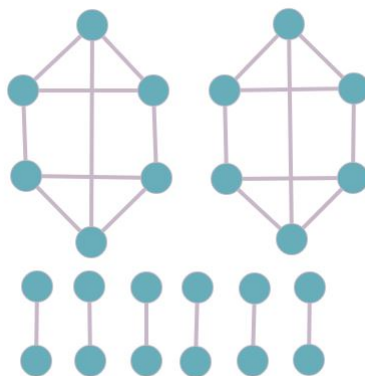


рис.3.2.7 - Перше об'єднання

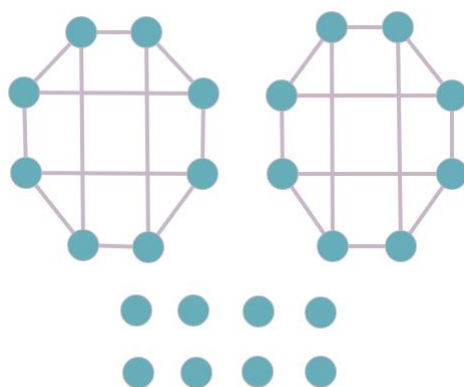


рис.3.2.8 - Друге об'єднання

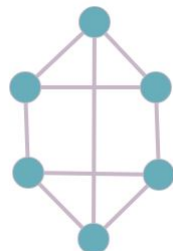


рис.3.2.9 - Граф L

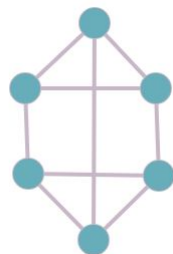


рис.3.2.10 - Граф M



рис.3.2.11 - 3 пари шляхів довжини 2

Перше об'єднання складається з графа L на 6 вершинах, графа M, що є

копією графа L та 3 пар шляхів довжини 2.

Граф L має спектр $3; 0; 0; 0; 0; -3$ та не має коспектральної пари. Об'єднавши цей граф зі своєю копією (графом M) та 3 пар шляхів довжини 2 (їх спектр $1^6; -1^6$), отримуємо спектр об'єднання: $3; 3; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; -1; -1; -1; -1; -1; -1; -2; -3; -3$.

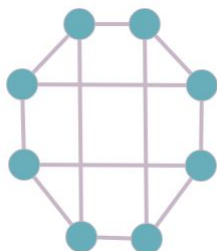


рис.3.2.12 - Граф N

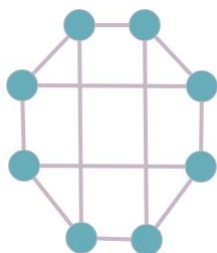


рис.3.2.13 - Граф P



рис.3.2.14 - 8 ізольованих точок

Друге об'єднання складається з графа N на 8 вершинах, графа P, що є копією графа N та 8 ізольованих точок.

Граф N має спектр $3; 1; 1; 1; -1; -1; -1; -3$ та не має коспектральної пари. Об'єднавши цей граф зі своєю копією (графом P) та 8 ізольованих точок (їх спектр 0^8), отримуємо спектр об'єднання: $3; 3; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; -1; -1; -1; -1; -1; -1; -1; -1; -3; -3$.

Як бачимо, спектри цих двох незвязних об'єднань графів співпадають, отже ми отримали коспектральну пару на 24 вершинах.

Висновки

Робота присвячена дослідженню спектральних характеристик кубічних графів та пошуку і побудові коспектральних їм пар.

У першому розділі були наведені основні означення з теорії графів та детально розібраний приклад розрахунку власних значень та власних векторів для коспектральних графів на 6 вершинах.

У другому розділі розглянуто спеціальний тип кубічних графів $G = C_n \times K_2$, де C_n - циклічний граф на n вершинах, K_2 - повний граф на 2 вершинах. Було наведено доведення того, що даний граф визначається своїм спектром для непарних n .

Третій розділ присвячений пошуку та побудові коспектральних пар графів.

Виявлено, що перші коспектральні пари кубічних графів з'являється на 14 вершинах.

Побудовано коспектральні пари графів, які є незв'язним об'єднанням кубічних та інших графів на 20 та 24 вершинах.

Список літератури

- [1] Боднарчук Ю. В., *Основи дискретної математики: навч. посіб.*, Олійник Б. В., К.: Видавничий дім «Києво-Могилянська Академія», ISBN: 978-966-518-484-3.
- [2] Гейн А. Г., *Інформатика і ІКТ*, Сенокосов А. І., 2011.
- [3] Зорін В. М., *Теплоенергетика і теплотехніка.*, Клименко А. В., 1987.
- [4] Brouwer A.E., *Spectra of graphs.*, Haemers W. H., 2011.
- [5] Bussemaker F.C., *Computer investigation of cubic graphs*, Cobeljic S., Cvetkovic D. M., Seidel J. ,1976.
- [6] Simon Spacapan, *Connectivity of Cartesian products of graphs*, Applied Mathematics Letters, 2008.
- [7] Ramezania F., *Spectral characterization of some cubic graphs*, Tayfeh-Rezaie B., Graphs and Combinatorics, 2012.