Тема 6.
Современная теория портфеля

Любая экономическая проблема сводится к задаче наилучшего распределения ресурсов. Любой экономический субъект - отдельный человек, предприятие, либо правительство, сталкивается с вопросом - как распределить имеющиеся в его распоряжении ресурсы - материальные, финансовые, человеческие, и т. д. Экономическая теория исходит из того, что любой субъект, принимая решения, стремится к наибольшей выгоде, то есть, действует рационально. Этот же принцип лежит в основе решений о наилучшем инвестировании.

Что лучше, скажем, для данного инвестора: держать свои сбережения под подушкой, разместить на банковском депозите, дать взаймы государству, купить акции предприятия А, а может лучше В? Ответ на этот вопрос не очевиден. Каждое из возможных решений имеет множество измерений - выгоды от разных способов инвестиций, время, на которое инвестор расстается со своими средствами и, наконец, риск, связанный с тем или иным решением.

В этой главе рассматриваются основные принципы так называемой современной портфельной теории (modern portfolio theory, MPT) - теории, которая пытается дать обоснованные ответы на поставленные выше вопросы. Оказывается, что, на первый взгляд умозрительные проблемы и предлагаемые экономистами методы их решения, с одной стороны находят непосредственное практическое применение в реальной инвестиционной деятельности, с другой - позволяют объяснить закономерности окружающей нас экономической действительности, основные законы по которым работают, часто скрытые покрывалом таинственности, финансовые рынки.

Начало современной портфельной теории было положено революционной работой Гарри Марковица 1952 года. Результаты Марковица были развиты и дополнены не менее известными работами Джеймса Тобина, Вильяма Шарпа и других исследователей.

Важность этих разработок для развития современной экономики и финансов подчеркивает Нобелевская премия по экономике, которой были удостоены Гарри Марковиц, Джеймс Тобин и Вильям Шарп, в первую очередь, за развитие современной портфельной теории.

Выбор наилучшего портфеля и диверсификация

Итак, рассмотрим решения инвестора, располагающего богатством W и стоящего перед решением - каким образом использовать это богатство?

Будем считать, что выбор между текущим потреблением и инвестициями уже сделан, соответственно, пусть W - это стоимость, которая не будет потреблена в текущем периоде. Предположим для простоты, что инвестор рассматривает фиксированный плановый горизонт - средства W ему необходимо распределить на некоторый определенный период.

У нашего инвестора существует n возможностей использования средств, каждая из которых принесет соответственно $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ гривен дохода в расчете на 1 гривну вложений. Наиболее существенной проблемой для принятия решения является то, что величины ξi в общем случае случайные, то есть каким именно будет доход, заранее неизвестно.

Главным предположением, которое принял Гарри Марковиц, анализируя эту задачу, являлось то, что для инвестора, при оценке альтернативных решений, важными являются только два параметра каждого из них: первый - ожидаемая доходность инвестиций

$$\mu_i = E\xi_i,$$

(E - математическое ожидание), второй - стандартное отклонение доходности, как показатель, характеризующий риск принимаемого решения

$$\sigma_i = \sqrt{D\xi_i},$$

(D - дисперсия).

Важно, что это предположение в целом не противоречит теории ожидаемой полезности Неймана - Моргенштерна: для того чтобы оно выполнялось, необходимо, чтобы либо доходности активов ξi были распределены согласно нормальному закону либо, чтобы функция полезности богатства имела квадратичную форму.

Другим, не менее важным предположением, является следующие: инвестор не обязательно должен выбрать какое-то одно решение, он может выбрать любую комбинацию возможных инвестиций, распределяя свое богатство по различным направлениям вложений.

Оказывается, что проблема выбора в этом случае существенно упрощается. Пусть xi (i=1,...,n) - это доля от общего объема богатства, инвестируемого в i-й актив. Сформированную таким образом комбинацию инвестиций мы будем называть портфелем. Инвестору необходимо выбрать портфель, ожидаемая доходность μp и стандартное отклонение σp которого были бы для него наилучшими.

Средняя доходность портфеля

Прежде всего, необходимо установить какова средняя (ожидаемая) доходность портфеля. Доходность портфеля (ξ_p) мы определим как прирост богатства в расчете на единицу вложений, обеспечиваемый данным портфелем к моменту времени, рассматриваемому в качестве планового горизонта

$$\xi_p = \frac{W_E - W}{W},$$

где W - сегодняшний размер богатства, W_E - размер богатства на конец периода. Доходность портфеля можно рассчитать как взвешенную по объемам инвестиций доходность каждого входящего в портфель актива

$$\xi_p = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \ldots + \xi_n x_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i.$$

Это выражение можно представить в векторной форме

$$\xi_p = \xi^T x,$$

где

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Ожидаемая доходность портфеля μ_p определяется по формуле математического ожидания суммы случайных величин:

$$\begin{aligned} \mu_p &= E\xi_p = E[\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \ldots + \xi_n x_n] \\ &= E[\xi_1 x_1] + E[\xi_2 x_2] + \ldots + E[\xi_n x_n]. \end{aligned}$$

Выносgreat детерминированные величины $x_i, i = 1,...n$, за знак математического ожидания, получим

$$\begin{aligned} \mu_p &= E\xi_p = x_1 E\xi_1 + x_2 E\xi_2 + \ldots + x_n E\xi_n \\ &= x_1\mu_1 + x_2\mu_2 + \ldots + x_n\mu_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu_i. \end{aligned} \tag{6.1}$$

или в векторной форме

$$\mu_p = x^T \mu, \text{ где } \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}.$$

Таким образом, ожидаемая доходность инвестиционного портфеля - это средневзвешенная по долям инвестиций ожидаемая доходность каждого из активов, входящих в портфель.

Стандартное отклонение портфеля

Дисперсия доходности портфеля рассчитывается как дисперсия суммы случайных величин. Напомним, что если η и ζ - случайные величины, то

$$\begin{aligned} D[\eta + \zeta] &= E(\eta + \zeta)^2 - (E[\eta + \zeta])^2 \\ &= E\eta^2 - (E\eta)^2 + E\zeta^2 - (E\zeta)^2 + 2(E[\eta\zeta] - E\eta E\zeta) \\ &= D\eta + D\zeta + 2\operatorname{cov}(\eta, \zeta), \end{aligned}$$

где $\operatorname{cov}(\eta, \zeta)$ - коэффициент ковариации случайных величин η и ζ. Таким образом, для портфеля

$$D\xi_p = D\left[\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \ldots + \xi_n x_n\right]$$
$$= \sum_{i=1}^{n} D\left[\xi_i x_i\right] + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \operatorname{cov}\left(x_i\xi_i, x_j\xi_j\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 D\xi_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} x_i x_j \operatorname{cov}\left(\xi_i, \xi_j\right)$$

или, обозначив

$$\sigma_p^2 = D\xi_p,\quad \sigma_i^2 = D\xi_i,\quad \sigma_{ij} = \begin{cases} \sigma_i^2, & i = j \\ \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j), & i \neq j \end{cases},$$

получим

$$D\xi_p = \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij}. \qquad (6.2)$$

Стандартное отклонение портфеля σ_p, тем самым, равно

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij}}. \qquad (6.3)$$

Оценка средней доходности и стандартного отклонения на основании исторических данных

Одним из методов оценки средней доходности и стандартного отклонения финансового инструмента является использование исторических данных. Необходимо сразу же отметить недостатки этого подхода. Во-первых, исторический метод оценивает параметры финансового актива в прошлом (говорят, что результатом в этом случае являются величины ex post - после наблюдения), тогда как инвестора, принимающего решения, интересуют будущие величины (ex ante). Во-вторых, для расчетов необходимо располагать рядом наблюдений над фактической величиной доходности за ряд периодов - а эта информация часто может либо вовсе не существовать (если речь идет о вновь выпускаемой ценной бумаге), либо быть труднодоступной, либо содержать значительные искажения - это особенно характерно для пока еще недостаточно развитого и информационно закрытого украинского рынка.

Тем не менее, если существует необходимость оценки средней доходности и риска некоторой ценной бумаги, и невозможно применение более точных методов, исторический подход является полезным.

Обозначим через r_t - наблюдавшуюся в периоде t доходность некоторой ценной бумаги. Всего есть T наблюдений (t=1,...,T). Тогда статистическая оценка для показателя средней доходности рассчитывается как

$$r = \sum_{t=1}^{T} r_t \Big/ T, \qquad (6.4)$$

оценка дисперсии

$$\sigma_r^2 = \sum_{t=1}^{T} (r_t - r)^2 \Big/ (T-1) \quad .(6.5)$$

Пусть существует информация о доходности двух видов ценных бумаг - акций АО «Урюпинскспецсталь» и АО «Приморский ЦБК» :

Период	Урюпинскспецсталь	Приморский ЦБК
1994 III кв.	4.34%	3.25%
IV кв.	1.41%	0.53%
1995 I кв.	0.77%	30.33%
II кв.	2.17%	1.77%
III кв.	11.30%	6.98%
IV кв.	3.89%	3.28%
1996 I кв.	16.56%	21.17%
II кв.	2.44%	1.83%
III кв.	3.05%	2.54%
IV кв.	4.08%	3.30%

Используя эти данные и формулы (6.4), (6.5), получим, что оценка средней квартальной доходности акций «Урюпинскспецсталь» равна 5%, дисперсия - 0.25%, для Приморского ЦБК соответственно: 7.5% и 1%. Приведем эти величины к годовому измерению:

$$\mu_y = 4 \times 5\% = 20\%, \quad \sigma_y^2 = 4 \times 0.25\% = 1\%, \quad \sigma_y = \sqrt{0.01} = 0.1 = 10\%,$$
$$\mu_n = 4 \times 7.5\% = 30\%, \quad \sigma_n^2 = 4 \times 1\% = 4\%, \quad \sigma_n = \sqrt{0.04} = 0.2 = 20\%.$$

Для расчета статистической оценки коэффициента ковариации двух случайных величин используется формула

$$\sigma_{rs} = \sum_{t=1}^{T} (r_t - r)(s_t - \bar{s}) \Big/ (T-1) , \quad (6.6)$$

где r_t, s_t - наблюдения, , - средние величины.

В нашем примере, ковариация доходности в квартальном измерении равна 0.15%, соответственно в годовом измерении

$$\sigma_{yn} = 4 \times 0.15\% = 0.6\%,$$

откуда получим коэффициент корреляции

$$\rho_{yn} = \frac{\sigma_{yn}}{\sigma_y \sigma_n} = \frac{0.006}{0.10 \times 0.20} = 0.3 .$$

Необходимо еще раз подчеркнуть, что расчитываемые по формулам (6.4) - (6.6) показатели представляют собой лишь статистические оценки исторических значений средней доходности, дисперсии и ковариации. Тем более нельзя считать, что эти оценки сколько-нибудь точно прогнозируют будущие значения рассматриваемых показателей. Вместе с тем, на практике, когда нет возможности более точной оценки показателей доходности и риска ценных бумаг, часто используют именно статистические методы.

Портфель из двух активов

Пусть возможности по инвестированию ограничиваются двумя, уже использованными в качестве примера, видами ценных бумаг, причем будем считать, что рассчитанные нами на основании исторических данных оценки точно отражают действительные показатели доходности и риска:

1) первый актив - акции АО «Урюпинскспецсталь», - характеризуются доходностью $\xi_У$, средняя (ожидаемая) величина доходности $\mu_У$ равна

$$\mu_У = E\xi_У = 0.2 = 20\%,$$

стандартное отклонение (риск) равняется

$$\sigma_У = \sqrt{D\xi_У} = 0.1 = 10\%;$$

2) Второй актив (акции АО «Приморский ЦБК») обеспечивает случайную доходность ξ_n, ожидаемая величина которой равна

$$\mu_n = E\xi_n = 0.3 = 30\%,$$

стандартное отклонение составляет

$$\sigma_n = \sqrt{D\xi_n} = 0.2 = 20\%$$

Пусть, $x_У$ - доля богатства инвестора, которая инвестируется в акции Урюпинска, а $x_П$ - доля богатства, инвестируемая в Приморск. Рассчитаем среднюю доходность и стандартное отклонение (риск) портфеля

$$\begin{aligned}\mu_p &= x_У\mu_У + x_n\mu_n \\ &= x_У \times 0.2 + x_n \times 0.3\end{aligned} \qquad (6.7)$$

$$\sigma_p = \sqrt{x_У^2\sigma_У^2 + x_n^2\sigma_n^2 + 2x_Уx_n\sigma_{Уn}}. \qquad (6.8)$$

Напомним, что

$$\sigma_{Уn} = \operatorname{cov}(\xi_У, \xi_n) = 0.006,$$

откуда

$$\begin{aligned}\sigma_p &= \sqrt{x_У^2 \times (0.1)^2 + x_n^2 \times (0.2)^2 + 2 \times x_У \times x_n \times 0.006} \\ &= \sqrt{x_У^2 \times 0.01 + x_n^2 \times 0.04 + 0.012 \times x_Уx_n}\end{aligned}$$

Например, если инвестор принял решение распределить инвестиции в 1-й и 2-й актив портфеля поровну, т. е. $x_У = 0.5 = 50\%$ и $x_n = 0.5 = 50\%$, тогда

$$\mu_p = 0.5 \times 0.2 + 0.5 \times 0.3 = 0.25 = 25\%,$$

$$\sigma_p = \sqrt{(0.5)^2 \times 0.01 + (0.5)^2 \times 0.04 + 0.012 \times 0.5 \times 0.5} = 0.1245 = 12.45\%.$$

Эффект диверсификации

Напомним, что если σ12 - коэффициент ковариации показателей доходности некоторых двух ценных бумаг, то

$$\sigma_{12} = \mathrm{cov}(\xi_1, \xi_2) = \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12}.$$

где σ_1, σ_2 - стандартные отклонения, ρ_{12} - коэффициент корреляции случайных величин доходности 1-го и 2-го активов. Следовательно, формулу для расчета стандартного отклонения портфеля, состоящего из 2-х активов, можно записать

$$\sigma_p = \sqrt{x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 + 2 x_1 x_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12}}.$$

Таким образом, общий риск портфеля зависит от величины риска активов, входящих в портфель σ_i, доли каждого из активов в портфеле x_i и коэффициента, характеризующего статистическую взаимосвязь между величинами доходности активов, входящих в портфель ρ12.

Эффект диверсификации - распределения инвестиций между различными направлениями, состоит в том, что, выбирая объемы инвестиций в различные активы, инвестор может регулировать рискованность портфеля - выбирать такую величину из возможных, которая отвечает его предпочтениям. Возможности по снижению риска портфеля зависят от тесноты статистической взаимосвязи между доходностью различных инвестиционных решений (в нашем примере - величины ρ_{12}). Напомним, что величина коэффициента корреляции двух случайных величин может изменяться в пределах от -1 до 1. Величина $\rho 12$=-1 означает совершенную отрицательную взаимосвязь - если доходность одного актива увеличивается, доходность второго - пропорционально снижается. В случае ρ_{12}=1 оба актива характеризуются совершенной положительной взаимосвязью: любое увеличение доходности одного из них с необходимостью приводит к пропорциональному увеличению доходности второго. Если же ρ_{12}=0 - доходность одного актива никак не связана с доходностью второго.

Портфель с минимальным риском

Пусть целью инвестора является выбор портфеля с минимальным возможным риском, то есть необходимо так выбрать x_1 и x_2, чтобы величина риска портфеля была бы наименьшей. Эту задачу можно просто решить аналитически. Прежде всего, заметим, что для портфеля из 2-х активов всегда должно выполняться бюджетное ограничение

$$x_1 + x_2 = 1,$$

- сумма долей равняется единице. Значение x_2 мы можем выразить через x_1

$$x_2 = 1 - x_1.$$

Обозначим

$$x = x_1,$$
$$1 - x = x_2.$$

Задачу выбора портфеля с наименьшим риском можно записать

$$\min_x\left\{\sqrt{x^2\sigma_1^2+(1-x)^2\sigma_2^2+2x(1-x)\sigma_1\sigma_2\rho_{12}}\right\}. \qquad (6.9)$$

Запишем условие первого порядка для данной задачи (возьмем производную по *x* и приравняем ее к нулю)

$$-\frac{2x\sigma_1^2-2(1-x)\sigma_2^2+2(1-2x)\sigma_1\sigma_2\rho_{12}}{2\sqrt{x^2\sigma_1^2+(1-x)^2\sigma_2^2+2x(1-x)\sigma_1\sigma_2\rho_{12}}}=0,$$

откуда, при условии, что знаменатель не равен нулю, получим

$$x^*=\frac{\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_2\rho_{12}}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}}. \qquad (6.10)$$

Формула (6.10) дает возможность определить портфель, риск (стандартное отклонение доходности) которого минимален.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Пусть ρ_{12}=-1 тогда

$$x^*=\frac{\sigma_2^2+\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\sigma_1\sigma_2}=\frac{\sigma_2(\sigma_1+\sigma_2)}{(\sigma_1+\sigma_2)^2}=\frac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2},$$

$$1-x^*=\frac{\sigma_1}{\sigma_1+\sigma_2}.$$

В этом случае риск портфеля равен нулю

$$\sigma_p=\sqrt{\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}\right)^2\sigma_1^2+\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_1+\sigma_2}\right)^2\sigma_2^2-2\frac{\sigma_1}{\sigma_1+\sigma_2}\frac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}\sigma_1\sigma_2}=0.$$

То есть, если доходность первого актива снизится, для портфеля в целом это будет полностью компенсировано ростом доходности второго актива.

2. В случае, когда ρ_{12}=0, то есть какая-либо взаимосвязь между доходностью первого и второго актива отсутствует, портфель с наименьшим риском выбирается так:

$$x^*=\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2},\quad 1-x^*=\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}.$$

Стандартное отклонение такого портфеля будет равно. Если σ_1<1 и σ_2<1, риск портфеля будет меньше, чем риск каждого из отдельно взятых активов.

3. Когда ρ_{12}=1, оптимальный портфель выбирается следующим образом:

$$x^*=\frac{\sigma_2}{\sigma_2-\sigma_1},\quad 1-x^*=\frac{-\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1}.$$

Риск такого портфеля также равен нулю:

$$\sigma_p = \sqrt{\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_2-\sigma_1}\right)^2\sigma_1^2 + \left(\frac{-\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1}\right)^2\sigma_2^2 + 2\frac{\sigma_2}{\sigma_2-\sigma_1}\frac{(-\sigma_1)}{\sigma_2-\sigma_1}\sigma_1\sigma_2} = 0,$$

но существует важное отличие от случая, когда ρ_{12}=-1: при совершенной отрицательной корреляции оптимальные объемы инвестиций в каждый из активов были положительными. Здесь же, либо x*, либо 1-x* меньше нуля (причем, если x*<0, то (1-x*)>1, и наоборот). Отрицательный объем инвестиций означает короткую продажу - когда продается актив, взятый в долг с обязательством последующего возврата. Следовательно, в случае положительной корреляции, для того, чтобы получить портфель с минимальным риском, необходимо коротко продать один из активов, и инвестировать все имевшиеся и вырученные за счет короткой продажи средства во второй актив.

Хеджирование

Полученные выше результаты позволяют сделать очень важный вывод: чем больше степень статистической взаимосвязи между доходностью двух активов, тем больше возможностей по снижению риска путем комбинации инвестиций в эти активы (формирования портфеля), - другими словами тем более эффективна диверсификация, предпринимаемая с целью снижения риска. Данный факт лежит в основе стратегии хеджирования.

Хеджирование представляет собой стратегию снижения риска, при которой инвестор, для того, чтобы обезопасить себя от возможных потерь, связанных с инвестированием в некоторый актив, одновременно инвестирует в другой актив, доходность которого негативно коррелирована с доходностью первого.

В качестве примера рассмотрим ту же задачу выбора портфеля, но в несколько измененном виде.

Пусть инвестор владеет одной единицей некоторого актива, который принесет ему единиц чистого дохода на протяжении планового горизонта. Обозначим через x объем инвестиций в этот актив: $x = 1$.

Доходность ζ является случайной величиной. Предположим, что она может быть как положительной, так и отрицательной. Пусть инвестор желает обезопасить себя от риска потери стоимости своего актива - тех случаев, когда ζ окажется отрицательной. Для этого он инвестирует средства в другой актив, доходность которого η также случайна, но связана отрицательной статистической взаимосвязью с доходностью первого актива. Обозначим через h объем инвестиций во второй актив. Суммарная ожидаемая доходность инвестиций (портфеля) будет составлять

$$\mu_p = E\zeta \times 1 + E\eta \times h = \mu_\zeta + h\mu_\eta.$$

Риск портфеля будет равен

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_\zeta^2 + h^2\sigma_\eta^2 + 2h\,\mathrm{cov}(\zeta,\eta)}. \quad (6.11)$$

Риск будет минимальным, если, исходя из условий первого порядка минимума функции (6.11), выполняется равенство

$$2h\sigma_\eta^2 + 2\operatorname{cov}(\zeta,\eta) = 0,$$

или

$$h = -\frac{\operatorname{cov}(\zeta,\eta)}{\sigma_\eta^2} = -\frac{\sigma_\zeta \sigma_\eta \rho_{\zeta\eta}}{\sigma_\eta^2} = -\rho_{\zeta\eta}\frac{\sigma_\zeta}{\sigma_\eta}, \qquad (6.12)$$

где $\rho_{\zeta\eta}$ - коэффициент корреляции случайных величин ζ и η.

Величина h, рассчитанная по формуле (6.12) называется коэффициентом хеджирования с минимальным риском. Заметим, что если

$\rho_{\zeta\eta}$=-1,

то h=1, то есть хеджирование будет обеспечивать минимальный риск, если в портфеле каждой единице средств, инвестированных в первый актив, будет соответствовать ровно одна единица инвестиций в актив, используемый для хеджирования. Хеджирование в пропорции «один к одному» называют еще «наивным хеджем», так как коэффициент хеджирования с минимальным риском равен единице лишь в случае абсолютной отрицательной взаимосвязи между доходностью двух активов.

Графическая иллюстрация

Предполагая, что инвесторы, принимая решение, ориентируются лишь на среднюю доходность и риск, измеряемый стандартным отклонением доходности, мы можем использовать в качестве иллюстрации портфельных инвестиций диаграмму из главы 3, на которой по вертикали откладывается средняя доходность, а по горизонтали - риск, под которым теперь будем понимать стандартное отклонение случайной величины доходности (рисунок 6-1).

Точки *У* и *П* соответствуют активам, которые мы выбрали в качестве примера (акции «Урюпинскспецсталь» и Приморского ЦБК). Рассчитаем, каким будет средняя доходность и стандартное отклонение нескольких вариантов портфеля.

Рассматриваемые нами варианты портфеля приведены в таблице (цифры обозначают процент от общего объема средств, инвестируемый в соответствующий актив):

	Портфели				
	А	Б	В	Г	Д
Урюпинск	20%	40%	50%	60%	80%
Приморск	80%	60%	50%	40%	20%

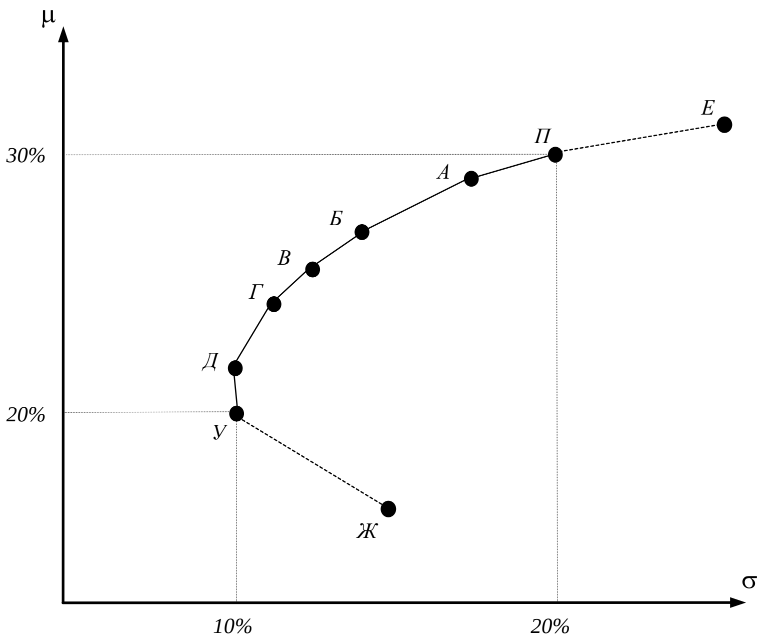

Рисунок 6-1

Портфель из двух активов. На рисунке по вертикали откладывается средняя (ожидаемая) доходность финансовых активов, по горизонтали – стандартное отклонение доходности (риск). Точка *У* соответствует ценной бумаге, обеспечивающей средний доход на уровне 20% годовых при стандартном отклонении 10%. Параметры ценной бумаги, характеризуемой точкой *П*, соответственно 30% и 20%. Точки *А*, *Б*, *В*, *Г*, *Д*, *Е*, *Ж* соответствуют комбинациям риска и доходности, обеспечиваемым различными портфелями.

Доходность и стандартное отклонение портфелей рассчитывается по формулам (6.7) и (6.8) соответственно. Результаты приведены на рисунке 6-1 и в таблице:

	Портфели				
	А	Б	В	Г	Д
μ_p	28%	26%	25%	24%	22%
σ_p	16.71%	13.74%	12.45%	11.35%	9.96%

Можно сделать вывод, что все возможные портфели лежат на кривой П-А-Б-В-Г-Д-У. Однако это относится лишь к случаю, когда $x_У \geq 0$ и $x_п \geq 0$. Мы не накладывали ограничений на неотрицательность величин хУ и хУ, так как предполагается возможность неограниченных коротких продаж. Рассмотрим следующие два портфеля:

	Портфели	
	Е	Ж
Урюпинск	-30%	150%
Приморск	130%	-50%

В случае портфеля Е инвестор вкладывает все свое богатство в акции Приморского ЦБК, одновременно коротко продает акции Урюпинска, и все вырученные деньги также вкладывает в акции Приморска. Средний доход портфеля Е 33%, риск 25.26%.

Для портфеля Ж - ситуация обратная: инвестор коротко продает акции Приморска на сумму, равную половине всех инвестиций, и все деньги (собственное богатство и средства, вырученные от короткой продажи) вкладывает в акции Урюпинска. Средняя доходность этого портфеля равна 15%, стандартное отклонение 15.33%.

В целом, при неограниченных возможностях коротких продаж, все доступные инвестору комбинации доходности и риска можно представить на рисунке в виде кривой Е-П-А-Б-В-Г-Д-У-Ж, которая задана параметрически уравнениями (6.7) и (6.8).

Допустимые комбинации риска и доходности при разной степени статистической взаимосвязи активов, входящих в портфель

Пусть есть портфель из двух активов: x_1 и x_2 обозначают долю от общего объема инвестиций, приходящуюся на каждый из активов, μ_1 и μ_2 - ожидаемые доходности, σ_1 и σ_2 - стандартные отклонения доходности первого и второго активов соответственно. Средняя доходность и риск портфеля рассчитываются как

$$\mu_p = x_1\mu_1 + x_2\mu_2, \tag{6.13}$$

$$\sigma_p = \sqrt{x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + 2x_1x_2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}}. \tag{6.14}$$

Рассмотрим, используя рисунок, случаи, когда показатели доходности активов, входящих в портфель, связаны между собой абсолютной положительной зависимостью: ρ_{12}=1, абсолютной негативной взаимосвязью ρ_{12}=-1, а также ситуацию, когда статистическая взаимосвязь между доходностью двух активов отсутствует ρ_{12}=0.

Если $\rho_{12} = 1$, стандартное отклонение равно

$$\begin{aligned}\sigma_p &= \sqrt{x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 + 2x_1x_2\sigma_1\sigma_2} \\ &= \sqrt{(x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2)^2} = |x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2|.\end{aligned} \tag{6.15}$$

Уравнения (6.13) и (6.15) определяют линейную взаимосвязь между μ_p и σ_p при изменении параметров x_1 и x_2 (намним, что $x_1 = 1 - x_2$). Тем самым комбинации риска и дохода для различных портфелей лежат на прямой, проходящей через точки a и b на рисунке 6-2.

При ρ_{12}=-1,

$$\begin{aligned}\sigma_p &= \sqrt{x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2 - 2x_1x_2\sigma_1\sigma_2} \\ &= \sqrt{(x_1\sigma_1 - x_2\sigma_2)^2} = |x_1\sigma_1 - x_2\sigma_2|.\end{aligned} \tag{6.16}$$

Комбинации риска и дохода, соответствующие этому случаю - точки, лежащие на лучах ca и cb (рисунок 6-2). Отрезки ca и cb соответствуют комбинациям стандартного отклонения и доходности при условии

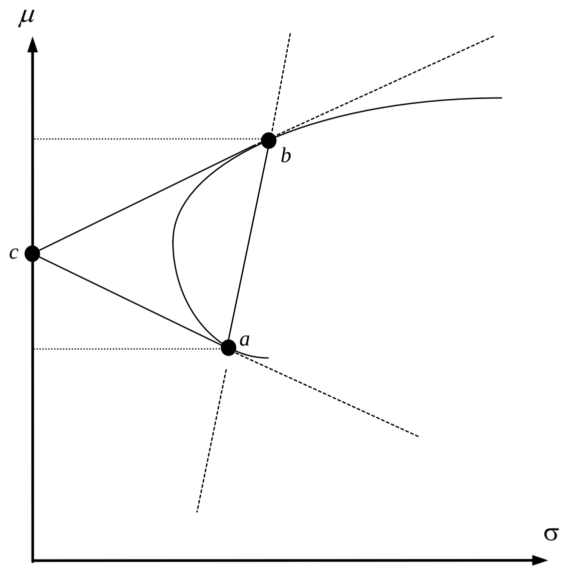

Рисунок 6-2

Точки a и b характеризуют комбинации риска и доходности двух активов, входящих в портфель. При коэффициенте корреляции ρ_{12}=1 все возможные портфели, составленные из этих активов, располагаются вдоль прямой ab. При ρ_{12}=-1 все возможные портфели лежат на лучах cb и ca. Штрихованные участки прямых соответствуют короткой продаже одного из активов. При 0<ρ<1 достижимые комбинации риска и доходности характеризуются параболой, проходящей через точки a и b.

$x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$.

Наконец, если ρ_{12}=0, то все возможные варианты отражает кривая, параметрически задаваемая уравнением (6.13) и уравнением

$$\sigma_p = \sqrt{x_1^2\sigma_1^2 + x_2^2\sigma_2^2}\,. \qquad (6.17)$$

Рисунок 6-2 позволяет проследить важную закономерность: чем меньше величина ρ_{12} (чем ближе она к -1), тем меньшего уровня риска можно достичь, причем при ρ_{12}=-1 существует портфель с нулевым риском (точка *c*) - факт, уже обоснованный нами выше, и используемый в стратегии хеджирования.

Эффективность инвестиционного портфеля. Эффективное множество

Вернемся к анализу более реальной ситуации - когда инвестор имеет возможность выбирать не из двух, а из гораздо большего количества активов, каждый из которых характеризуется своими показателями доходности и риска (точки 1, 2, 3, и т.д. на рисунке 6-3). Теперь инвестор может выбирать любой актив (и в любом количестве) для включения в свой портфель. Кривые 1-2, 2-4, и т.д., отражают комбинации риска и дохода, которые может получить инвестор, выбирая портфель, состоящий исключительно из первого и второго активов, второго и четвертого, и так далее. Однако этим возможности не ограничиваются. Пусть, скажем, точка А соответствует портфелю на 50% состоящему из инвестиций в 1-й актив и на 50% - во второй. Точка В - портфель, представляющий собой сочетание 50 : 50 из 1-го и 5-го активов. Тогда кривая, проходящая через точки А и В - это значения риска и дохода, соответствующие всем возможным сочетаниям портфеля А и портфеля В. Например, пусть точка О - это точка полученная сочетанием в общем портфеле 25% вложений в портфель А и 75% вложений в портфель В. Это означает, что в общем портфеле содержится

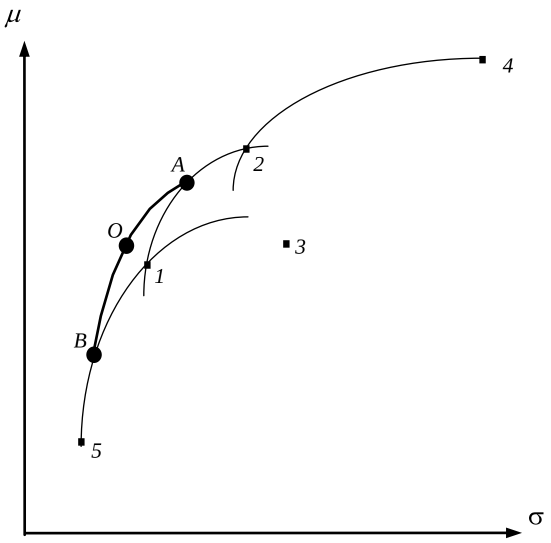

Рисунок 6-3

Параболы, проходящие через точки 1 и 2, 1 и 5, 2 и 4 характеризуют риск и доходность портфелей, образованных из этих активов соответственно. Парабола АОВ - это портфели, составленные из различных комбинаций портфеля А и портфеля В. Так как возможности по формированию разнообразных портфелей не ограничены, эффективное множество является выпуклым

1-го актива $0.5 \times 0.25 = 0.125 = 12.5\%$;

2-го актива $0.5 \times 0.25 + 0.5 \times 0.75 = 0.5 = 50\%$;

3-го актива $0.5 \times 0.75 = 0.375 = 37.5\%$.

Все возможные сочетания инвестиций образуют область допустимых значений риска и дохода (заштрихованная область на рисунке 6-4). Очевидно (см. рисунок 6-3), что область допустимых значений является выпуклой.

Рассмотрим допустимые портфели с точки зрения их привлекательности для несклонного к риску инвестора. Как мы помним, человек, несклонный к риску всегда предпочитает меньший риск при одинаковом ожидаемом доходе, и, соответственно, всегда стремится к большему значению среднего дохода при одинаковом уровне риска. Поэтому, для несклонного к риску инвестора портфель А, например, всегда лучше портфеля В, или портфеля С. Хотя портфели А и В обеспечивают одинаковый ожидаемый доход, портфель В - более рискован. Аналогично, хотя портфели А и С имеют одинаковую степень риска, портфель С менее выгоден с точки зрения его доходности.

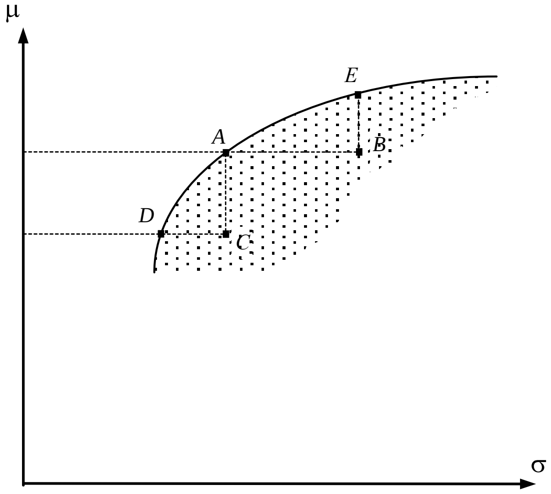

Рисунок 6-4

Эффективное множество и граница эффективности. Точки A, D и E соответствуют эффективным портфелям. C и B – неэффективные портфели.

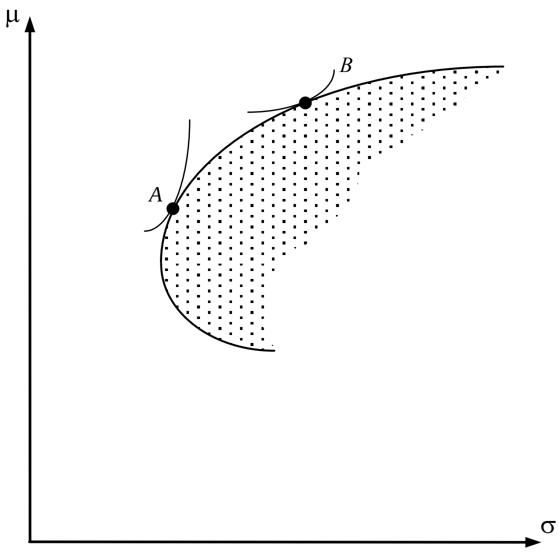

Рисунок 6-5

Оптимальный выбор из допустимого множества рискованных активов. Выбор инвестора среди допустимых значений риска и ожидаемой доходности определяется его индивидуальными отношениями предпочтения. Относительно более несклонный к риску («консервативный») инвестор (точка *A*) будет стремиться к меньшему риску, жертвуя доходом. Менее несклонный к риску («агрессивный») инвестор может пойти на дополнительный риск ради прироста дохода (точка *B*). Общим для всех инвесторов будет лишь стремление сформировать эффективный портфель, ожидаемая доходность и стандартное отклонение которого лежат на

Эффективным портфелем называется портфель, обеспечивающий наивысший уровень ожидаемого дохода при данном уровне риска и наименьший риск при данном уровне дохода. Согласно этому определению, портфели А, Д, Е на рисунке 6-4 являются эффективными, а портфели В и С - нет.

Очевидно, если существует множество альтернатив для инвестирования (множество активов) то существует и множество эффективных портфелей. На рисунке 6-4 множество эффективных портфелей - это портфели лежащие на границе допустимой области. Множество эффективных портфелей называют границей эффективности или эффективным множеством.

Если возможности по инвестированию ограничиваются лишь некоторым набором рискованных активов, то есть достижимые комбинации риска и дохода ограничены областью допустимых значений риска и ожидаемой доходности, выбор инвестора определяется его индивидуальными предпочтениями (рисунок 6-5).

Безрисковая ставка доходности

Предположим, что на рынке помимо рискованных инвестиций, существует возможность финансовых вложений, которые гарантированно обеспечивают получение определенного дохода. Другими словами, положим, что существует безрисковая ставка доходности. В реальности, трудно найти активы, которые свободны от какого бы то ни было риска. Как правило, свободными от риска считают государственные ценные бумаги. Однако даже в этом случае риск есть, хотя, возможно и значительно меньший по сравнению с другими финансовыми инструментами.

В данном случае мы будем считать, что существует актив, характеризующийся определенной ставкой доходности и нулевым риском. На нашей диаграмме в координатах риска и дохода - это точка лежащая на оси среднего дохода - точка О на рисунке 6-6. Ставку μ0 - мы назовем безрисковой ставкой доходности.

Комбинация рискованных и безрисковых инвестиций

Если существует безрисковая ставка доходности, перед инвестором стоит задача распределения инвестиций между некоторым рискованным активом (портфелем активов) с ожидаемым доходом μp и стандартным отклонением σp, и безрисковым вложением средств по ставке μ0, причем μp>μ0 (рисунок 6-6). Пусть xp - доля богатства, вкладываемая в рискованное направление, x0 - доля, инвестируемая по безрисковой ставке.

Обозначим доходность общего портфеля через μ'_p:

$$\mu'_p = x_p \mu_p + x_0 \mu_0 \,. \tag{6.18}$$

Риск (стандартное отклонение доходности) общего портфеля будет равен (учитывая, что стандартное отклонение детерминированной величины равняется нулю)

$$\sigma'_p = \sqrt{x_p^2 \sigma_p^2 + x_0^2 \cdot 0} = \left| x_p \sigma_p \right| \,. \tag{6.19}$$

Уравнения (6.18) и (6.19) при $x_p \geq 0$, $x_0 \geq 0$, $x_p + x_0 = 1$ параметрически задают отрезок ОА на рисунке 6-6. Если $xp=0$, тогда $x_0=1$ и параметры портфеля соответствуют точке О. Напротив, при $x_p=1$ и $x_0=0$, - все средства направляются в рискованные вложения, и портфель определяется точкой А. Все возможные промежуточные значения, когда часть инвестиций являются рискованными, а часть - безрисковыми, лежат на отрезке ОА.

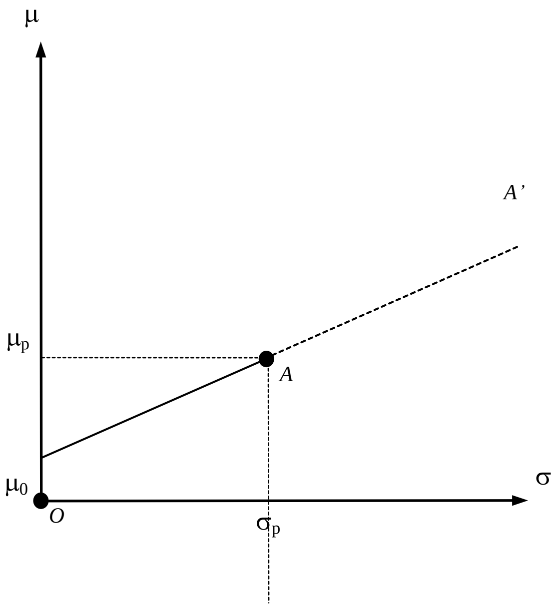

Рисунок 6-6

Сочетание рискованных и безрисковых инвестиций в портфеле. Отрезок *OA* содержит комбинации риска и доходности, достигаемые путем инвестиций в рискованный портфель (точка *A*) и безрисковый актив (точка *O*). Если существуют неограниченные возможности по безрисковому кредитованию, то все достижимые комбинации доходности и риска лежат на луче *OAA'*

Безрисковое заимствование

До этого мы говорили лишь о безрисковых инвестициях. Предположим теперь, что существует возможность не только инвестиций, но и заимствования по ставке μ_0.

Другими словами, инвестор может взять кредит по ставке μ_0 и инвестировать эти средства в рискованный портфель. Согласно введенной выше терминологии безрисковое кредитование аналогично «короткой продаже» безрискового актива. Используя наши обозначения, возможна ситуация, когда $x_0 < 1$ и $x_p > 1$ (естественно, что бюджетное ограничение $xp+x_0=1$ сохраняется). В этом случае возможные комбинации риска и дохода также определяются уравнениями (6.18) и (6.19), но эти возможности не ограничиваются отрезком ОА, а расширяются на весь луч ОАА' (комбинации риска и дохода, достигаемые через кредитование, изображены на рисунке 6-6 пунктирной линией).

Безрисковая ставка и эффективное множество

Попробуем теперь соединить, с одной стороны - возможности рискованных инвестиций, определенные множеством допустимых портфелей и соответствующим ему множеством допустимых сочетаний риска и дохода, и с другой - инвестирование в безрисковые активы. Рассмотрим, каким образом будет себя вести рациональный, не склонный к риску инвестор, когда он может одновременно формировать портфель из рискованных и безрисковых активов. Картина теперь существенно изменится. Рассмотрим рисунок 6-7. Пусть безрисковая ставка доходности равна μ0 и допустимое множество рискованных портфелей ограничено кривой ЕЕ'.

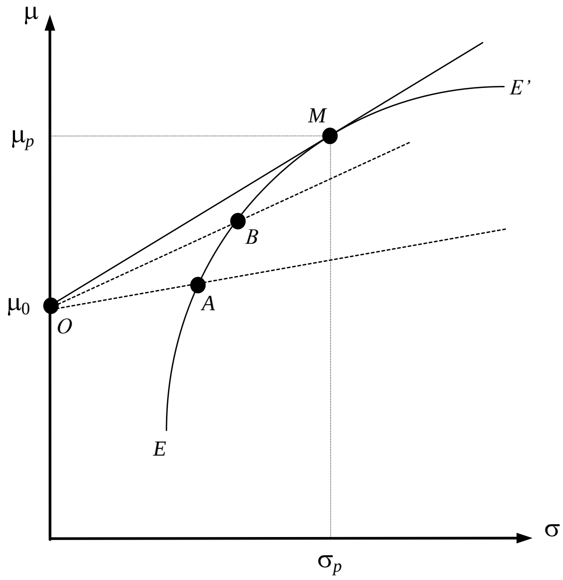

Рисунок 6-7

Точка М, лежащая на касательной, опущенной из точки О к границе эффективности ЕЕ', соответствует рыночному портфелю. Если существует безрисковая ставка доходности, то инвестиции в любой другой рискованный портфель, отличный от рыночного (например, А или В) неэффективны.

Задачу инвестора теперь можно раделить на две подзадачи: во-первых, необходимо выбрать рискованный портфель из множества возможных, во-вторых, распределить средства между безрисковыми вложениями и рискованным портфелем. Какой из доступных рискованных портфелей будет выбран? Мы уже установили, что рациональный инвестор всегда стремится выбрать эффективный портфель, то есть такой, средняя доходность и риск которого лежат на границе допустимого множества ЕЕ'. Сравним два портфеля, например, А и В на рисунке 6-7. Допустимые сочетания риска и дохода при различных сочетаниях безрисковых и рискованных инвестиций в случае выбора портфеля А отражаются лучом ОА, при выборе портфеля В - лучом ОВ. Очевидно, что в случае портфеля В мы при любом решении получаем больший средний доход при одинаковой степени риска. Сравнивая аналогично портфели М и В, мы видим, что, в свою очередь, портфель М лучше портфеля В.

Вывод очевиден: если существует возможность безрискового инвестирования, то наилучшим для любого несклонного к риску инвестора будет тот портфель рискованных активов, который соответствует точке касания луча, проведенного из точки О ($\mu=\mu_0$, $\sigma=0$) к границе эффективности.

Таким образом, все инвесторы будут стремиться инвестировать средства в портфель М. Различными будут лишь пропорции, в которых инвесторы распределяют свое богатство между рискованным и безрисковыми инвестициями (то есть между портфелем М и безрисковым активом). Относительно более консервативный инвестор (с большей степенью несклонности к риску) выберет решение ближе к точке О. Агрессивный инвестор (менее несклонный к риску) может решить инвестировать средства в портфель М не только за счет собственных средств, но и за счет кредитования по ставке μ_0 (рисунок 6-8).

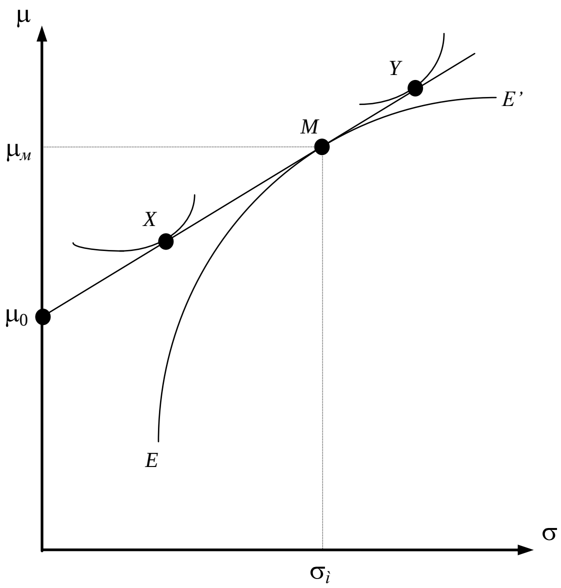

Рисунок 6-8

В зависимости от собственных предпочтений, инвесторы выбирают различные комбинации рискованных и безрисковых инвестиций. Точка *X* соответствует относительно более консервативному подходу. Точка *Y* характеризует агрессивного инвестора, который вкладывает средства, полученные за счет кредитования, в рискованный портфель *M*. Независимо от предпочтений, оптимальный портфель рискованных активов одинаков для всех участников

Границей эффективности при существовании безрисковой ставки будет уже не кривая EE', характеризующая возможности рискованных инвестиций, а прямая (точнее - луч) - касательная к допустимому множеству, проведенная из точки O (линия OM на рисунке 6-8).

Различие безрисковых ставок кредитования и инвестирования

Рассмотрим теперь - как изменятся наши выводы, если мы ослабим некоторые из принятых нами предположений, приблизив тем самым нашу модели к реальности. Предположение о существовании единой безрисковой ставки как по кредитам, так и по инвестициям является, естественно, сильным упрощением. В реальности мы, как правило, наблюдаем, что ставки доходности, по которым мы можем инвестировать средства, отличаются от ставок кредитования. Причем, часто ставки доходности инвестиций для отдельного инвестора меньше ставок, по которым он может взять средства в долг. Обозначим μ0c - безрисковая ставка по займам, μ0i - безрисковая ставка доходности по инвестициям, причем μ0c > μ0i .

Эффективное множество при этом существенно изменится. Пусть, как и прежде EE' - граница допустимого множества комбинаций риска и доходности для рискованных активов. В случае сочетания рискованных и безрисковых инвестиций, достижимые комбинации риска и доходности лежат на отрезке O1M1, где M1 - это точка касания луча опущенного из точки O1 (значение μ_{0i}) к кривой EE'. Если же инвестор стремится к большему доходу, чем обеспечивает портфель M1 и, соответственно, готов идти на больший риск, его выбором может стать инвестирование исключительно в один из рискованных портфелей, риск и доходность которых лежит на участке M1M2 кривой EE'. Наконец, еще более агрессивный инвестор выберет решение, при котором инвестиции будут производится в портфель M2 за счет кредитования по ставке μ0c. Возможные сочетания риска и дохода в последнем случае лежат на участке касательной, проведенной из точки O к кривой EE', начиная с точки M2 (рисунок 6-9).

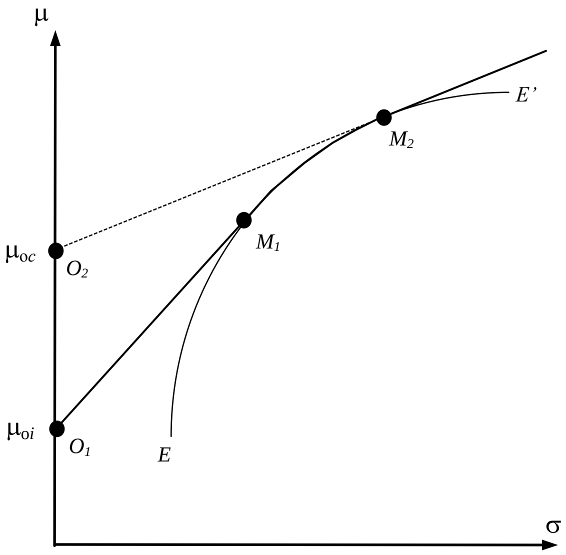

Рисунок 6-9

Если ставки по безрисковому кредитованию и инвестированию различны, вид границы эффективности меняется, и существует не единственный оптимальный портфель для всех инвесторов. Множество рыночных портфелей характеризуется участком M_1M_2 границы EE'.

Таким образом, если ставки доходности безрисковых инвестиций и кредитов различаются, множество эффективности состоит из 3-х участков, и портфель рискованных активов не будет для всех одинаковым. В зависимости от степени несклонности к риску, инвесторы будут выбирать различные портфеиь рискованных активов, риск и доходность которых лежат на участке M_1M_2 кривой EE'.

Модель Марковица

Модель поведения инвестора, согласно которой инвестиции оцениваются исключительно по двум параметрам - ожидаемой доходности и риску, измеряемому как величина стандартного отклонения доходности, позволяет сформулировать единое правило формирования портфеля, которому следуют все без исключения инвесторы: независимо от индивидуальных предпочтений, все инвесторы стремятся сформировать эффективный портфель - такой, который обеспечивает минимальную степень риска для выбранного уровня дохода, либо, что то же самое, максимальный ожидаемый доход при заданной степени риска. Этот подход, и сама задача, выбора эффективного портфеля носит название модели Марковица.

Пусть, как и прежде, существует n активов, каждый из которых обеспечивает случайную величину доходности ξi (i=1,...,n), μi - ожидаемая (средняя) доходность i-го актива (математическое ожидание случайной величины ξi):

$$\mu_i = E\xi_i,$$

- стандартное отклонение доходности i-го актива:

$$\sigma_i = \sqrt{D\xi_i},$$

- ковариация между доходностями i-го и j-го активов:

$$\sigma_{ij} = \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j) = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij},$$

(ρij - коэффициент корреляции случайных величин ξi и ξj).

Модель Марковица можно сформулировать следующим образом: необходимо найти такие пропорции распределения средств между доступными активами: x1,x2,...,xn (где xi - доля средств, инвестируемых в i-й актив), чтобы риск портфеля при заданном уровне доходности был бы минимальным. Математически модель можно сформулировать так: найти

$$\min_{x_1,x_2,\dots,x_n}\{\sigma_p\} = \min_{x_1,x_2,\dots,x_n}\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij}\right\}, \qquad (6.20)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i = \bar{\mu}_p. \qquad (6.21)$$

В приведенной формулировке модели, $\bar{\mu}_p$ - заданный уровень средней доходности,

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} \sigma_i^2, i = j \\ \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j), i \neq j \end{cases}$$

(согласно принятым обозначениям).

Модель можно записать в матричной форме, обозначив: x - вектор распределения средств между рискованными активами: x={xi}i=1,...,n; - вектор доходности активов, V - ковариационная матрица (квадратная матрица, состоящая из значений σij, i=1,...,n; j=1,...,n). Тогда необходимо найти

$$\min_x\{x^T V x\}, \qquad (6.22)$$

при ограничениях

$$x^T e = 1,$$

$$x^T \mu = \bar{\mu}_p, \qquad (6.23)$$

где e - единичный вектор:

$$e = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix},$$

T - знак транспонирования вектора.

Для модели (6.22), (6.23) легко найти аналитическое решение

$$x^* = \frac{1}{2} V^{-1}[\varphi\mu + \psi e],$$

где и - множители Лагранжа ограничений (6.23).

Если существует безрисковый актив, модель можно записать

$$\min_x \left\{ x^T V x \right\}, \qquad (6.24)$$

$$x^T \mu + x_0 \mu_0 = \overline{\mu}_p, \qquad (6.25)$$

$$x^T e + x_0 = 1, \qquad (6.26)$$

где μ0 - безрисковая ставка, x0 - доля богатства, инвестируемая в безрисковый актив. От ограничения (6.26) можно избавиться, сделав замену:

$$x_0 = 1 - x^T e. \qquad (6.27)$$

Тогда ограничение (6.25) будет выглядеть как

$$x^T (\mu - \mu_0 e) = \overline{\mu}_p - \mu_0, \qquad (6.28)$$

и решение задачи (6.24)-(6.26) можно записать

$$x^* = \frac{1}{2} V^{-1} (\mu - \mu_0 e) \varphi,$$

где φ - множитель Лагранжа ограничения (6.28).

Портфель, максимизирующий ожидаемую полезность

Модели (6.22)-(6.23) и (6.24)-(6.26) позволяют выбрать эффективный портфель. Но эффективных портфелей существует множество. Выбор оптимального для данного инвестора портфеля определяется его степенью несклонности к риску (то есть - формой функции полезности). Если сделать предположение о постоянной абсолютной несклонности к риску (см. главу 3) и о нормальном распределении доходности финансовых активов, то портфель, максимизирующий ожидаемую полезность инвестора, выбирается как решение задачи

$$\max_{x, x_0} \left\{ \mu_0 x_0 + x^T \mu - \frac{1}{2} k \left(x^T V x \right) \right\},$$
$$x_0 + x^T e = 1. \qquad (6.29)$$

где k - степень несклонности к риску инвестора.

Используя (6.27), задачу (6.29) можно свести к безусловной

$$\max_x \left\{ \mu_0 \left(1 - x^T e \right) + x^T \mu - \frac{1}{2} k \left(x^T V x \right) \right\}.$$

Запишем условие первого порядка

$$\mu - \mu_0 e - k V x = 0,$$

откуда получим решение

$$x^* = \frac{1}{k} V^{-1} (\mu - \mu_0 e).$$

Естественно, рассмотренные модели упрощены. В реальности существует множество не учтенных здесь дополнительных ограничений: невозможность или ограниченность коротких продаж, отсутствие делимости активов, и другие.

Выводы

1. Современная портфельная теория основывается на допущении, что инвесторы имеют возможность распределять богатство среди множества доступных направлений инвестирования, - то есть формировать инвестиционный портфель. Причем критериями оценки эффективности инвестиционных решений являются только два параметра - ожидаемая доходность и стандартное отклонение доходности.
2. Эффект диверсификации состоит в возможности снижения риска инвестирования (без ущерба для доходности) путем распределения инвестиций среди доступных направлений. Чем больше степень диверсификации и чем меньше корреляция между доходностью выбранных финансовых активов - тем большими являются возможности по снижению риска.
3. Предоставляемые рынком возможности по выбору желаемой комбинации ожидаемой доходности и риска инвестиций ограничены. Эффективным портфелем называется портфель с максимальной для данной величины риска ожидаемой доходностью, либо, что то же самое - с минимальным для данной величины доходности риском. Совокупность всех возможных эффективных портфелей образует границу эффективности. Рациональные инвесторы всегда стремятся к формированию эффективного портфеля. Какой именно эффективный портфель выберет инвестор - зависит от его индивидуальных отношений предпочтения между риском и ожидаемым доходом. Если на рынке существует безрисковая ставка доходности, задача инвестора сводится к выбору комбинации рискованных и безрисковых инвестиций.
4. Модель Марковица представляет собой задачу выбора эффективного портфеля - то есть формирования портфеля, обеспечивающего минимальный риск при заданном уровне ожидаемой доходности. В общем случае, модель Марковица представляет собой задачу квадратичного программирования и может быть решена стандартными методами. Наиболее сложная проблема, связанная с практическим использованием модели Марковица - подготовка исходной информации об ожидаемой доходности, стандартном отклонении и коэффициентах ковариации финансовых активов.

Ключевые понятия

Портфель финансовых активов

Ожидаемая доходность портфеля

Стандартное отклонение портфеля

Диверсификация

Эффективный портфель

Граница эффективности

Безрисковая ставка доходности

Модель Марковица