УДК 519.17

Олійник Б. В., Лукашова М. В., Лукашова Т. Д.

ДОСКОНАЛІ 1-КОДИ НА ТРИВАЛЕНТНИХ ДИСТАНЦІЙНО-ТРАНЗИТИВНИХ ГРАФАХ

Досліджено існування досконалих 1-кодів на тривалентних дистанційно-транзитивних графах. Спираючись на результати Нормана Біґґса, показано, що серед усіх таких графів необхідну умову існування досконалого 1-коду задовольняють повний граф K_4, гіперкуб, граф Дезарга, граф Коксетера та граф Фостера. Доведено, що графи Дезарга і Фостера не можуть мати досконалих одиничних кодів, а для повного графа K_4, гіперкуба та графа Коксетера знайдено та побудовано досконалі одиничні коди.

Ключові слова: дистанційно-транзитивний граф, кубічний граф, досконалі e-коди.

Вступ

Досконалі коди є окремим видом кодів корекції помилок. Класична проблема існування досконалих кодів, що виправляють e помилок у слові довжиною k над полем Галуа $GF(q)$, розглядається у векторному просторі $V(k,q)$ з метрикою Хемінга. Наприкінці 40-х років минулого сторіччя було встановлено, що існує лише невелика кількість нетривіальних досконалих кодів, що виправляють помилки. Фактично, це двійкові коди з повтореннями непарної довжини, лінійні коди Хемінга та коди Голея.

Приклади досконалих нелінійних двійкових кодів, що виправляють одиничні помилки і мають ті самі параметри, що й коди Хемінга, побудував у 60-х роках XX століття Васильєв. Згодом існування досконалих нелінійних кодів над полями Галуа $GF(q)$ з аналогічними властивостями довели Шонхейм та Ліндстрем. Проблемою побудови досконалих нелінійних кодів займалися також Ван Лінт та Тітвайнен, які довели, що нетривіальний досконалий код над полем Галуа повинен мати ті самі параметри, які мають коди Хемінга та Голея [1].

Природним узагальненням проблеми існування досконалих кодів у лінійних просторах є проблема виявлення таких кодів на графах, у яких вершинам ставляться у відповідність n-вимірні вектори, а відношення суміжності вводиться між вершинами, що відрізняються в точності однією координатою. Однак клас усіх простих графів є занадто широким щодо пошуку на них досконалих кодів. Тому відповідну задачу різні дослідники розв'язували для окремих класів графів, що є тією чи іншою мірою зручними для побудови таких кодів.

Зокрема, у роботах Н. Біґґса [2–4] вивчалися досконалі e-коди на регулярних дистанційно-транзитивних графах. Було встановлено, що на цих графах для досконалих e-кодів мають місце твердження, аналогічні тим, які виконуються для векторних просторів. У роботі [5] досконалі e-коди розглядалися для графів Хемінга та Джонсона. Хаммонд та Сміт у роботі [6] досліджували умови існування досконалих e-кодів на регулярних графах типу O_k та навели приклади побудови таких кодів. У роботах [7; 8] Я. Краточвіл досліджував умови існування досконалих одиничних кодів на прямих добутках графів.

Роботу присвячено вивченню і побудові (якщо це можливо) досконалих 1-кодів на дистанційно-транзитивних графах, кожна вершина яких має степінь 3. Такі графи називаються тривалентними дистанційно-транзитивними. Як добре відомо, існує дванадцять таких графів, степінь кожної вершини яких не перевищує тринадцяти [9]: повний граф K_4, повний дводольний граф $K_{3,3}$, гіперкуб, визначений на множині вершин потужності 8, граф Петерсена, граф Хівуда, граф Паппуса, граф-додекаедр, граф Дезарга, граф Коксетера, граф Татта — Коксетера, граф Фостера, граф Біґса — Сміта. Використовуючи результати Нормана Біґґса, в роботі проаналізовано існування досконалого 1-коду для кожного з дванадцяти тривалентних дистанційно-транзитивних графів. Доведено, що досконалі одиничні коди існують тільки для повного графа K_4, гіперкуба та графа Коксетера. Ці досконалі одиничні коди побудовано.

Коди корекції помилок

Розглянемо множину n-вимірних векторів з нулів і одиниць. Тоді будь-який k-вимірний підпростір C цього простору називається *лінійним* (n,k)-*кодом*. Таким чином, якщо відомі твірні слова коду (що є базисними векторами лінійного простору C), то всі елементи цього коду є алгебраїчними сумами твірних слів (над полем $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$).

Кожному лінійному (n,k)-коду ставляться у відповідність дві матриці — твірна та контрольна. *Твірною матрицею* коду C називають матрицю розміру $k \times n$, рядками якої є базисні вектори простору C. *Контрольною матрицею* коду називають матрицю розміру $(n-k)\times n$, рядками якої є розв'язки системи $G\bar{x}^{tr} = \bar{0}^{tr}$, де G — твірна матриця коду, а $\bar{x}$ — бінарний рядок довжини n. Вказані матриці кодом C визначаються неоднозначно [10].

Під *кодом корекції помилок* розуміють алгоритм запису послідовності символів (чисел), який дозволяє виявити й виправити (через певні обмеження) помилки, що вносяться в запис, на основі запам'ятовування чисел. Прикладами таких кодів є коди Хемінга, Голея, Ріда — Мюллера, Адамара.

Виявлення помилок є більш простою операцією, ніж їх виправлення: для цього використовується одна або кілька «контрольних» цифр, що вбудовують у код.

Як один із методів виявлення помилок використовується біт-контроль парності. Цей метод використовується, наприклад, в ASCII кодах, у яких кожен символ кодується рядочком із 7 символів з нулів або одиниць, а останній — восьмий символ — додається таким чином, щоб число одиниць було парним. Якщо код переданого рядка отримано з однією помилкою, то число одиниць буде непарним, проте наявність двох помилок не дозволяє виявити їх [10].

Іншим способом коректуючого кодування є повторення закодованого рядка задану кількість разів. Наприклад, якщо при кодуванні кожен рядок повторюється n разів, то одержимо код, який дозволяє виявити помилку не більш як $\left[\frac{n}{2}\right]$ разів.

Досконалі коди

Нехай C — код, що виправляє помилки, містить N кодових слів довжини n, у яких кожен символ є однією з q літер алфавіту A, причому кожні два відмінні між собою кодові слова відрізняються принаймні на $d = 2e + 1$ позиціях.

Говорять, що код C — ***досконалий***, якщо для кожного слова s довжини k з літерами з алфавіту A існує єдине кодове слово c із C, в якому не більше e літер відрізняються від відповідних літер слова s.

Інакше кажучи, нехай $c \in C$ — передане кодове слово, а $s \in S_n$ — отримане слово. Позначимо $\sum_e(c)$ — множину слів $s \in S_n$, де c і s відрізняються не більш ніж в e позиціях. Якщо множини $\sum_e(c)$, де $c \in C$ не перетинаються, то говорять, що код C виправляє e помилок. Якщо вказані множини $\sum_e(c)$ утворюють розбиття, то код C називають ***досконалим e-кодом*** [2].

Необхідну умову існування досконалого коду дає відома ***теорема Ллойда***.

Теорема 1. *[1]. Якщо бінарний (n, k)-код C є досконалим e-кодом, то анулюючий многочлен цього коду має e цілих коренів*

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_e,$$

причому $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_e < n$.

Відповідно до роботи [1], над алфавітом, що містить q символів, анулюючий многочлен досконалого e-коду (або многочлен Ллойда) має вигляд

$$L_e(x) = \sum_{i=0}^{e} (-1)^i C_{x-1}^i C_{n-x}^{e-i} (q-1)^{e-1}.$$

Наприклад, для бінарного $(7, 4)$-коду Хемінга вказаний многочлен має вигляд

$$f(x) = (8 - 2x),$$

а його коренем є 4.

Має місце наступне твердження, що дає достатні умови того, чи є код досконалим.

Лема 2. *[2]. Бінарний код C є досконалим e-кодом, якщо*

$$\sum_{i=0}^{e} C_n^i (q-1)^i = \frac{q^n}{N}.$$

Зокрема, у випадку бінарного лінійного коду C, маємо $q = 2$ і $N = 2^k$, де k — кількість твірних слів (розмірність) коду C.

Відповідно до наведених тверджень, код C є досконалим за умови

$$\sum_{i=0}^{e} C_n^i = 2^{n-k}. \qquad (1)$$

Зазначимо, що існує відносно невелика кількість пар (n, e), для яких можна побудувати досконалий e-код. Тривіальними прикладами таких кодів є код, який містить 1 кодове слово і в якому $n = e$ та весь n-вимірний простір. До нетривіальних прикладів досконалих e-кодів відносять *бінарні коди повторень* з $n = 2e + 1$ і $C = 2$, а також *коди Хемінга* з $n = 2^r - 1$, $e = 1$ та *коди Голея* (двійковий код при $n = 23$, $e = 3$ та трійковий код при $n = 11$, $e = 2$). Вказаний перелік вичерпує всі можливі досконалі e-коди [3].

Як приклад покажемо, що коди Хемінга є досконалими. Справді, у цьому разі $n = 2^r - 1$, $k = 2^r - r - 1$, $e = 1$. Тому, відповідно до твердження 2, маємо:

$$\sum_{i=0}^{e} C_n^i = n + 1$$

і $2^{n-k} = 2^r$. Оскільки для цього типу кодів $n = 2^r - 1$, то

$$\sum_{i=0}^{e} C_n^i = 2^r = n + 1.$$

Отже, рівність (1) виконується тривіально і код Хемінга є досконалим.

Досконалі коди на графах

Нехай G — простий зв'язний граф з множиною вершин VG і множиною ребер VE. На множині вершин цього графа визначимо метрику d_G для довільних двох вершин u, v як довжину найкоротшого ланцюга, що їх з'єднує. Для кожного невід'ємного цілого числа e і кожної вершини v графа G визначимо множину

$$\sum_e(v) = \{u \in VG \mid d_G(u,v) \leq e\},$$

що складається з усіх вершин графа, відстань від яких до вершини v не перевищує e.

Досконалим е-кодом на графі G називається підмножина C з VG, така, що множина $\sum_e(c)$, де c належить C, утворює розбиття множини VG [2].

Очевидно, що на графі G завжди існує досконалий 0-код (у цьому випадку $C = VG$) і досконалий d-код ($|C| = 1$), де d — діаметр графа G. Їх називають *тривіальними кодами*.

Для довільного $e \geq 1$ можна побудувати граф G, для якого існує досконалий e-код. Для цього можна взяти множину підграфів-околів $\sum_e(c)$ вершин із множини C і з'єднати їх вільні кінці додатковими ребрами. Більш цікаві приклади можна побудувати на так званих *дистанційно-транзитивних графах*.

Простий зв'язний граф G з функцією відстані d_G називається *дистанційно-транзитивним*, якщо для довільних вершин u, v, x, y графа G, для яких виконується рівність

$$d_G(u,v) = d_G(x,y),$$

існує автоморфізм g в G, такий, що $g(u) = x$ і $g(v) = y$.

Нехай G — дистанційно-транзитивний граф діаметра d валентності k, що має n вершин. Визначимо $(d+1)$ матрицю A_0, A_1, …, A_d, кожна з яких має n рядків і стовпчиків, що позначають вершини графа G, елементи a_{uv} яких визначаються за правилом:

$$(a_{uv})_h = \begin{cases} 1, \text{ якщо } d_G(u,v) = h, \\ 0, \text{ в іншому випадку}, \end{cases} \quad h = 0, \ldots, d.$$

Зокрема, матриця $A_1 = A$ є матрицею суміжності матриці графа G.

У роботі [2] було показано, що якщо C — досконалий e-код на графі G, а c — довільний вектор-стовпчик цього коду, то з означення досконалого e-коду випливає, що для матриці

$$S_e = A_0 + A_1 + \cdots + A_e$$

і вектора $u = [1, 1, \ldots, 1]^{tr}$ має місце рівність

$$S_e c = u.$$

Позначимо через $\mathfrak{A}(G)$ алгебру многочленів, пов'язаних із матрицею суміжності A. У випадку дистанційно-транзитивних графів ця алгебра має розмірність $d+1$, а її базисом є множина A_0, A_1, …, A_d.

Добуток базисних елементів визначимо за правилом:

$$A_h A_i = \sum_{j=0}^{d} s_{hij} A_j, \quad h, i \in \{0, 1, \ldots, d\},$$

де числа s_{hij} визначаються таким чином: $s_{hij} = \{s \in VG \mid d_G(u,s) = h,\ d_G(v,s) = i,$ якщо $d_G(u,v) = j\}$.

Розглянемо тепер матриці вигляду

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ k & a_1 & c_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b_1 & a_2 & c_3 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & a_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_d \end{pmatrix},$$

де

$$c_j = s_{1,j-1,1}, \qquad a_j = s_{1,j,j}, \qquad b_j = s_{1,j+1,j}.$$

При цьому $a_0 = 0$, $c_1 = 1$, $b_0 = k$. Сума елементів кожного стовпчика цієї матриці дорівнює k, де k — валентність графа.

З кожною з матриць A_0, A_1, …, A_d можна пов'язати матриці перетинів B_0, B_1, …, B_d, елементи $(b_{ij})_h$ яких визначаються за правилом: $(b_{ij})_h$ дорівнює кількості таких вершин $v \in VG$, для яких якщо $d_G(u,s) = j$, то $d_G(u,v) = h$ і $d_G(s,v) = i\}$, де $h = 0, \ldots, d$.

Для довільних вершин u і v, відстань між якими дорівнює j, визначимо множини

$$G_j(u) = \{s \mid d_G(u,s) = j\}, \quad k_j = |G_j(u)|.$$

Тоді

$$\begin{aligned} c_j &= |G_{j-1}(u) \cap G_1(v)|, \\ a_j &= |G_j(u) \cap G_1(v)|, \\ b_j &= |G_{j+1}(u) \cap G_1(v)|. \end{aligned}$$

Зрозуміло, що $B = B_1$ — тридіагональна матриця, в якій головні діагоналі визначаються масивом:

$$i(G) = \left\{ \begin{matrix} * & 1 & c_2 & c_3 & \ldots & c_d \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_d \\ k & b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & * \end{matrix} \right\}$$

Визначимо многочлени $v_0(\lambda)$, $v_1(\lambda)$, …, $v_d(\lambda)$ за формулами:

$$v_0(\lambda) = 1, \quad v_1(\lambda) = \lambda,$$

$$c_i v_i(\lambda) + (a_{i-1} - \lambda) v_{i-1}(\lambda) + b_{i-2} v_{i-2}(\lambda) = 0,$$

$$(i = 2, \ldots, d).$$

Як випливає з результатів [2], якщо λ — власне значення матриці B, то вектор

$$v(\lambda) = [v_0(\lambda), v_1(\lambda), \ldots, v_d(\lambda)]^{tr}$$

є власним вектором матриці B.

Як було показано [2], для таким чином побудованої матриці B характеристичне рівняння

$$Bv(\lambda) = \lambda v(\lambda),$$

де $v(\lambda)$ — власний вектор матриці B, має рівно $d+1$ коренів, причому одним із коренів цього рівняння є $\lambda = k$.

Існування одиничного коду на регулярних графах

Досконалим 1-кодом на графі G називається підмножина вершин графа G, така, що будь-який одиничний окіл будь-якої вершини цієї підмножини утворює розбиття множини вершин VG цього графа.

У роботі [3] для регулярних графів було сформульовано необхідні, проте, як буде показано пізніше, недостатні умови існування досконалого одиничного коду на графі.

Теорема 3. *[3] Якщо регулярний граф G має досконалий одиничний код, то $\lambda+1$ є дільником характеристичного многочлена $f(\lambda)$ матриці суміжності графа G в кільці $Q[\lambda]$.*

Відповідно, з цієї теореми отримаємо необхідну умову існування досконалого одиничного коду на тривалентних графах.

Наслідок 4. *Якщо матриця суміжності регулярного графа G не має власним значенням число $\lambda = -1$, то такий граф не має досконалого 1-коду.*

Використовуючи цей результат, опишемо процедуру пошуку 1-коду на регулярних графах.

Теорема 5. *Якщо для графа G існує досконалий одиничний код, то його характеристичний вектор c визначається за формулою:*

$$c = \frac{1}{k+1}(u - v), \tag{2}$$

де v — власний вектор матриці суміжності A графа G, що відповідає власному числу $\lambda = -1$, а вектор u задається формулою:

$$u = [1, 1, \ldots, 1]^{tr}.$$

Доведення. Нехай C — досконалий 1-код графа G, c — характеристичний вектор C.

Спочатку зауважимо, що оскільки досконалий одиничний код існує, то одне з власних чисел матриці суміжності A графа G дорівнює -1, а тому вектор v — власний вектор матриці суміжності A, що відповідає власному числу $\lambda = -1$, існує.

Якщо $\lambda = -1$ — власне значення матриці суміжності A графа G, то для відповідного власного вектора v виконується рівність

$$Av = \lambda v = -v.$$

Покладемо $u = [1, 1, \ldots, 1]^{tr}$ і $c = \frac{1}{k+1}(u - v)$. Тоді $v = u - (k+1)c$.

З іншого боку,

$$-v = Av = A(u - (k+1)c) = Au - (k+1)Ac.$$

Оскільки граф регулярний, то $Au = ku$. Звідки отримуємо:

$$(k+1)c - u = ku - kAc - Ac.$$

Останню рівність можна переписати в такому вигляді:

$$(k+1)c = ku - (k+1)Ac + u,$$

або це рівносильно

$$(k+1)c = (k+1)u - (k+1)Ac.$$

Поділимо праву і ліву частини рівності на $(k+1)$:

$$Ac = u - c,$$

отже, отримаємо рівність

$$Ac + c = u.$$

Оскільки вектор c є характеристичним вектором 1-коду (а за 1-кодом задається розбиття множини вершин, тобто для довільної вершини v із множини C існує рівно одна вершина $v_1 \in C$ така, що $d(v_1, v) = 1$), то при множенні вектор-стовпчика c на i-тий рядок матриці A отримаємо одиницю, якщо i-тий елемент вектора c дорівнює 0, або нуль, якщо i-тий елемент вектора c дорівнює 1. А тому рівність

$$Ac + c = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

виконуватиметься лише у випадку, коли c є характеристичним вектором 1-коду.

Таким чином, для того, щоб знайти 1-код у регулярному графі G, ми будемо виконувати такі кроки:

1. Для матриці суміжності A графа G будуємо характеристичний многочлен і шукаємо власні значення.

2. Якщо $\lambda = -1$ є власним значенням матриці A, то шукаємо власний вектор v, що відповідає власному значенню $\lambda = -1$.
3. Проводимо додаткові дослідження, переконуємось, що досконалий 1-код існує.
4. За допомогою формули (2) обчислюємо характеристичний вектор досконалого 1-коду.

Досконалі одиничні коди на регулярних дистанційно-транзитивних графах

Дистанційно-транзитивні графи є регулярними, проте не навпаки. На рис. 1 зображено регулярний граф, що не є дистанційно-транзитивним.

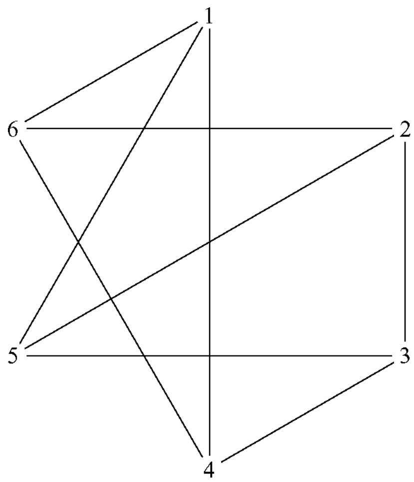

Рис. 1

Тривалентними (альтернативні назви — кубічними, 3-регулярними) дистанційно-транзитивними графами називаються дистанційно-транзитивні графи, у яких кожна вершина має степінь 3. Як добре відомо, таких графів є дванадцять: повний граф K_4, повний дводольний граф $K_{3,3}$, гіперкуб, визначений на множині вершин потужності 8, граф Петерсена, граф Хівуда, граф Паппуса, граф-додекаедр, граф Дезарга, граф Коксетера, граф Татта — Коксетера, граф Фостера, граф Бігса — Сміта. Використовуючи результати теорем 2 і 5 для всіх дванадцяти графів, дослідимо існування досконалого 1-коду і, якщо він існує, побудуємо його.

Пошук власних значень тривалентних дистанційно-транзитивних графів. Для того щоб побудувати досконалий код на графі, спочатку перевіримо існування досконалого одиничного коду на ньому. Тобто для матриці суміжності кожного з дванадцяти графів побудуємо характеристичний многочлен і перевіримо, чи число $\lambda = -1$ є власним значенням матриці суміжності. Для спрощення задачі ми використовували онлайн-ресурс Wolfram.

1. ***Повний граф*** K_4

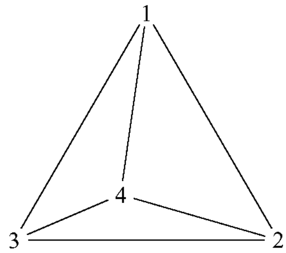

Рис. 2

Діаграму повного графа K_4 зображено на рис. 2. Матрицею суміжності цього графа буде така матриця:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристичний многочлен цієї матриці дорівнює

$$f(x) = x^4 - 6x^2 - 8x - 3.$$

Відповідно, власними значеннями буде множина чисел $\{-1, 3\}$. За теоремою 2 для заданого графа може існувати досконалий одиничний код.

2. ***Повний дводольний граф*** $K_{3,3}$

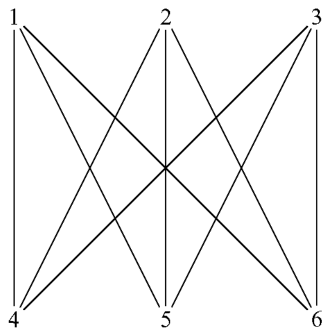

Рис. 3

Діаграму графа $K_{3,3}$ зображено на рис. 3. Матрицею суміжності цього графа є така матриця:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Відповідний характеристичний многочлен цієї матриці:

$$f(x) = x^6 - 9x^4,$$

а множина власних значень

$$\{-3, 0, 3\}.$$

Отже, для цього графа не може існувати досконалого 1-коду.

3. ***Граф гіперкуб, визначений на множині вершин потужності 8***

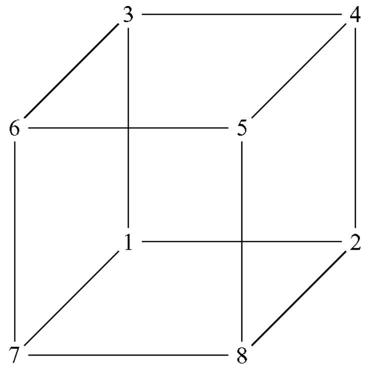

Рис. 4

Діаграму цього графа зображено на рис. 4. Матрицею суміжності цього графа є така матриця:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристичний многочлен цієї матриці:

$$f(x) = x^8 - 12x^6 + 30x^4 - 28x^2 + 9,$$

множина власних значень, відповідно, така: $\{-3, -1, 1, 3\}$.

Отже, для гіперкуба може існувати досконалий одиничний код.

4. ***Граф Петерсена***

Діаграму графа Петерсена зображено на рис. 5.

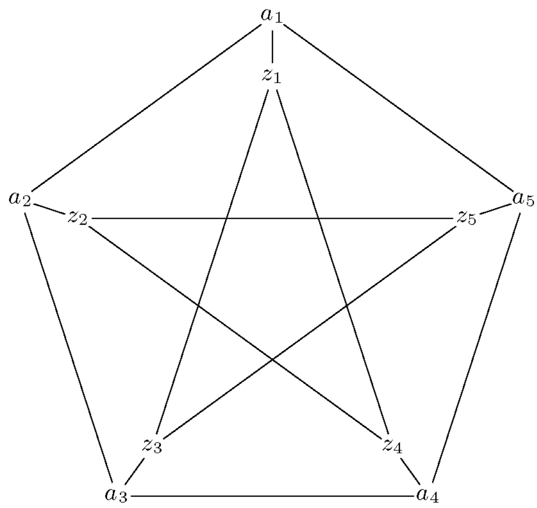

Рис. 5

Характеристичний многочлен матриці суміжності цього графа:

$$f(x) = x^{10} - 15x^8 + 75x^6 - 24x^5 - 165x^4 + \\ + 120x^3 + 120x^2 - 160x + 48,$$

а множина власних значень: $\{-2, 1, 3\}$. Отже, для цього графа не може існувати досконалого одиничного коду.

5. ***Граф Хівуда***

Граф Хівуда є кубічним графом із чотирнадцятьма вершинами, двадцять одним ребром, кожен цикл якого містить шість і більше ребер (див. рис. 6).

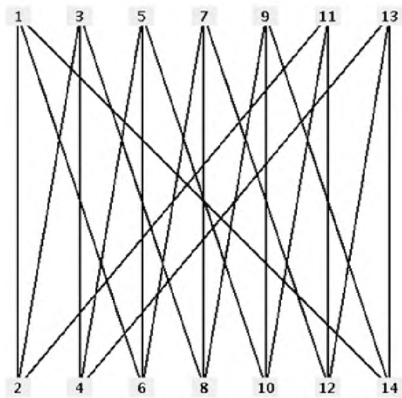

Рис. 6

Характеристичний многочлен цього графа

$$f(x) = x^{14} - 21x^{12} + 168x^{10} - 800x^8 + \\ + 1680x^6 - 2352x^4 + 1792x^2 - 576,$$

а множина власних значень: $\{-3, 3, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.

Отже, на цьому графі побудова досконалого 1-коду неможлива.

6. ***Граф Паппуса***

Граф Паппуса — дводольний кубічний граф із вісімнадцятьма вершинами і двадцятьма сімома ребрами (див. рис. 7).

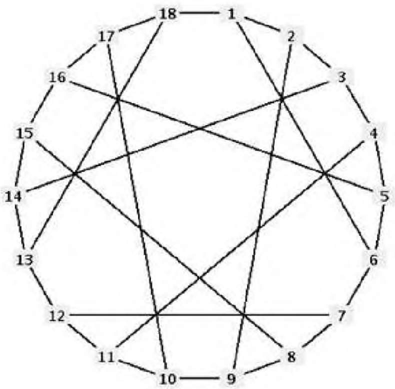

Рис. 7

Характеристичний многочлен цього графа:

$$f(x) = x^{18} - 27x^{16} + 297x^{14} - 1755x^{12} + \\ + 6075x^{10} - 12393x^{8} + 13851x^{6} - 6561x^{4},$$

а відповідна множина власних значень: $\{-3, -\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}, 3\}$.

Отже, досконалого 1-коду не може існувати.

7. ***Граф додекаедр***

Граф додекаедр задається на множині з 20 вершин і має діаметр 5. Цей граф часто називають узагальненням графа Петерсена (див. рис. 8).

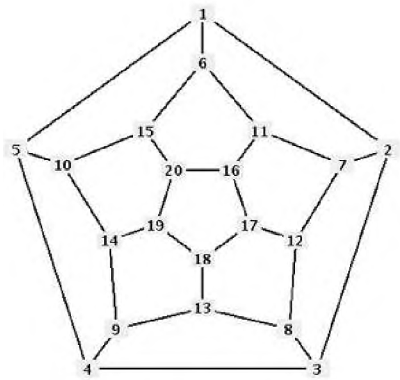

Рис. 8

Характеристичний многочлен матриці суміжності графа додекаедра визначається як:

$$f(x) = x^{20} - 30x^{18} + 375x^{16} - 24x^{15} - 2540x^{14} + \\ + 480x^{13} + 10095x^{12} - 3760x^{11} - 23502x^{10} + \\ + 14400x^{9} + +28905x^{8} - 27000x^{7} - 11400x^{6} + \\ + 20000x^{5} - 6000x^{4}.$$

Відповідною множиною власних значень є множина:

$$\{-2, -\sqrt{5}, 0, 1, \sqrt{5}, 3\}.$$

Отже, для цього графа існування досконалого одиничного коду неможливе.

8. ***Граф Дезарга***

Граф Дезарга є дводольним графом, має 20 вершин і 30 ребер. Цей граф також є узагальненням графа Петерсена (див. рис. 9).

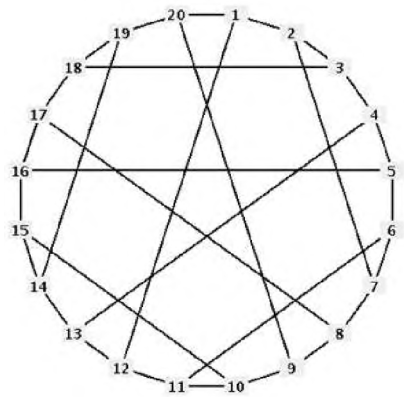

Рис. 9

Характеристичний многочлен матриці суміжності цього графа має вигляд:

$$f(x) = x^{20} - 30x^{18} + 375x^{16} - 2580x^{14} + \\ + 10815x^{12} - 28830x^{10} + 49545x^{8} - \\ - 54480x^{6} + 36960x^{4} - 14080x^{2} + 2304,$$

а відповідна множина власних значень:

$$\{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}.$$

Отже, на цьому графі може існувати досконалий одиничний код.

9. ***Граф Коксетера***

Граф Коксетера є графом із 28 вершинами і 42 ребрами, його діаметр дорівнює 4. Граф Коксетера є гіпогамільтоновим: сам граф гамільтоновим не є, але видалення довільної його вершини приводить до появи гамільтонового циклу (див. рис. 10).

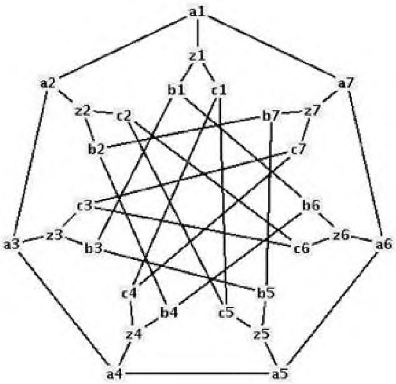

Рис. 10

Характеристичний многочлен цього графа має такий вигляд:

$$\begin{aligned} f(x) = {} & x^{28} - 42x^{26} + 777x^{24} - 8344x^{22} - \\ & - 48x^{21} + 57666x^{20} + 1232x^{19} - 268716x^{18} - \\ & - 13104x^{17} + 860314x^{16} + 74256x^{15} - \\ & - 1893960x^{14} - 239568x^{13} + 2827965x^{12} + \\ & + 433776x^{11} - 2790970x^{10} - 396816x^{9} + \\ & + 1772925x^{8} + 118192x^{7} - 719376x^{6} + \\ & + 44352x^{5} + 170464x^{4} - 37632x^{3} - 16128x^{2} + \\ & + 7168x - 768. \end{aligned}$$

Множиною власних значень є множина:

$$\{-1, 2, -1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}, 3\}.$$

Оскільки -1 є власним значенням, 1-код для цього графа також може існувати.

10. ***Граф Татта — Коксетера (Tutte eight-cage)***

Граф Татта — Коксетера є дводольним графом із 30 вершинами і 45 ребрами, що, як і граф Коксетера, має діаметр 4 (див. рис. 11).

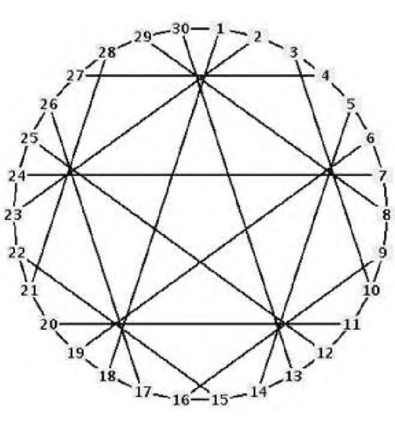

Рис. 11

Характеристичний многочлен цього графа задається такою формулою:

$$\begin{aligned} f(x) = {} & x^{30} - 45x^{28} + 900x^{26} - 10560x^{24} + \\ & + 80640x^{22} - 419328x^{20} + 1505280x^{18} - \\ & - 3686400x^{16} + 5898240x^{14} - 5570560x^{12} + \\ & + 2359296x^{10}, \end{aligned}$$

а множиною власних значень є: $\{-3, -2, 0, 2, 3\}$.

Отже, для цього графа не може існувати одиничного досконалого коду.

11. ***Граф Фостера***

Граф Фостера є дводольним графом з 90 вершинами і 135 ребрами. Граф Фостера є гамільтоновим графом (див. рис. 12).

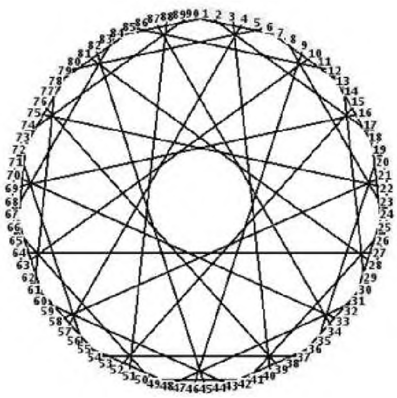

Рис. 12

Характеристичний многочлен цього графа — многочлен 90-го степеня

$$(x-3)(x-2)^9(x-1)^{18}x^{10}(x+1)^{18}(x+2)^9 \times \\ \times (x+3)(x^2-6)^{12}$$

з дійсними коренями

$$\{-3, -2, -1, -\sqrt{6}, 0, 1, 2, \sqrt{6}, 3\},$$

які є власними значеннями матриці суміжності.

Отже, на цьому графі існування досконалого 1-коду є можливим.

12. ***Граф Бігса — Сміта***

Граф Бігса — Сміта має 102 вершини, 153 ребра і діаметр 7. Діаграму цього графа зображено на рис. 13.

Характеристичний многочлен, що відповідає матриці суміжності цього графа:

$$f(x) = x^{17}(x-3)(x-2)^{18}(x^2-x-4)^9 \times \\ \times (x^3+3x^2-3)^{16}.$$

Очевидно, що число -1 не є коренем даного многочлена, тому для цього графа не існує досконалого 1-коду.

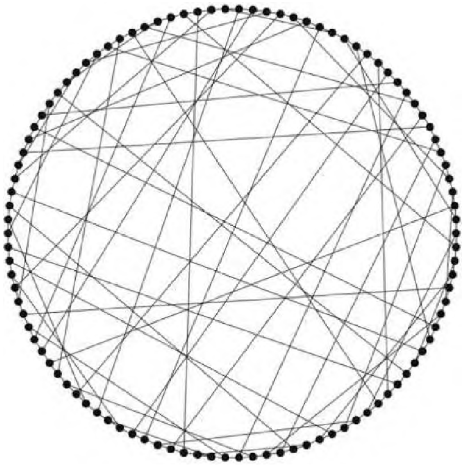

Рис. 13

Таким чином, серед дванадцяти кубічних дистанційно-транзитивних графів досконалий 1-код можуть мати лише такі графи:

1. повний граф K_4,
2. гіперкуб,
3. граф Дезарга,
4. граф Коксетера,
5. граф Фостера.

Перевірка тривалентних дистанційно-транзитивних графів на наявність 1***-кодів та побудова цих кодів.*** Перевіримо, для яких із зазначених вище п'яти тривалентних дистанційно-транзитивних графів існує досконалий 1-код, та побудуємо такі коди.

Теорема 6. *На графі Дезарга не можна побудувати жодного досконалого одиничного коду.*

Доведення. Припустимо, що на графі Дезарга (рис. 14) досконалий 1-код C існує, і спробуємо побудувати його. Зазначимо, що кожен клас розбиття, що утворюється кодовими вершинами (тобто вершинами з множини C), містить по чотири вершини графа.

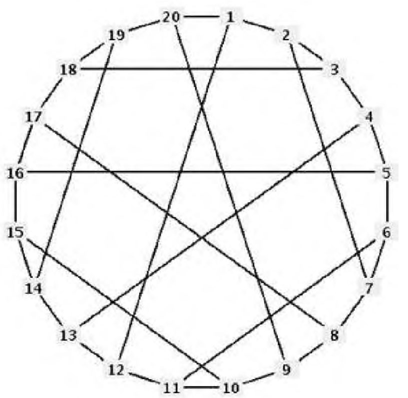

Рис. 14

Нехай вершина $1 \in C$. Тоді відповідний клас складається з вершин $\{\underline{1}, 2, 12, 20\}$ (відстань від яких до вершини 1 не перевищує 1). При цьому вершини 3, 7, 9, 11, 13, 19 суміжні хоча б з однією з вказаних вершин, тому не можуть належати множині C. Враховуючи, що вершини 3 і 19 є суміжними з вершиною 18, робимо висновок, що саме вершина 18 належить множині C. Відповідний клас розбиття — $\{\underline{18}, 19, 17, 3\}$. При цьому кодовими не можуть бути вершини 4, 8, 14, 16 як суміжні з вершинами $\{\underline{18}, 19, 17, 3\}$. Проте у такому випадку маємо три послідовні вершини 7, 8, 9, жодна з яких не може бути кодовою. При цьому вершина 8 не може бути включеною до жодного з класів розбиття (бо жодна суміжна з нею вершина не може бути кодовою). Отже, вершина 1 не може належати множині C.

Аналогічні міркування можна провести й стосовно вершин 4, 5, 8, 9, 12, 13, 16, 17 і 20, які, так само, як і вершина 1, належать простим циклам довжини 10 у цьому графі.

Розглянемо тепер іншу групу вершин, що включені в прості цикли довжини 6, а саме вершини 2, 7, 3, 18, 6, 11, 10, 15, 14 і 19.

Без порушення загальності можемо вважати, що якась із заданих вершин належить множині C. Нехай для визначеності це буде вершина 2. Тоді в перший клас розбиття потрапляють вершини $\{\underline{2}, 1, 3, 7\}$. Відповідно, кодовими не можуть бути вершини 4, 6, 8, 12, 18, 20, що суміжні з ними. Враховуючи, що вершини 4 і 12, які не є кодовими, суміжні з вершиною 13, робимо висновок, що $13 \in C$. Відповідний клас розбиття $\{\underline{13}, 14, 12, 4\}$.

Аналогічно, множині C не можуть належати вершини 5, 11, 15, 19.

Але тоді вершина 19 не може належати жодному класу розбиття, бо жодна суміжна з нею вершина не є кодовою.

Отже, на цьому графі ми не можемо побудувати жодного досконалого одиничного коду.

Лема 7. *На графі Фостера не існує досконалих* 1*-кодів.*

Доведення. Припустимо, що цей граф має досконалий 1-код. Тоді існує розбиття його вершин на класи, що не перетинаються. Оскільки вказаний граф має 90 вершин, кожна з яких має валентність 3, то кожен клас повинен містити по 4 вершини (а отже, кількість вершин графа має бути кратною 4). Проте 90 не ділиться націло на 4. Отже, на графі Фостера досконалих 1-кодів не існує.

Таким чином, проведені дослідження можна підсумувати в такому твердженні.

Теорема 8. *Серед дванадцяти тривалентних дистанційно-транзитивних графів досконалий* 1*-код існує лише на таких графах:*

1. повному графі K_4*;*

2. гіперкубі;

3. графі Коксетера.

Доведення. Як зазначалося вище, досконалий 1-код можуть мати лише 5 графів: повний граф K_4, гіперкуб, граф Дезарга, граф Коксетера і граф Фостера. З теореми 6 і леми 7 випливає, що на графах Дезарга і Фостера досконалих одиничних кодів не існує.

Покажемо, що повний граф K_4, гіперкуб, визначений на множині вершин потужності 8, і граф Коксетера мають досконалі 1-коди, та побудуємо їх, вказавши відповідні класи розбиття вершин.

1. ***Граф*** K_4

Якщо ми візьмемо на графі K_4 (див. рис. 2) будь-яку вершину, то всі інші вершини складатимуть клас розбиття, а це значить, що ми можемо побудувати досконалий 1-код, що складається лише з однієї вершини, причому за кодову вершину ми можемо взяти будь-яку з вершин цього графа. А тому код можна записати чотирма способами, залежно від того, яку вершину обрати кодовою. Якщо записувати наш код не масивом, а вказувати лише кодову вершину (або множину кодових вершин), то для нашого прикладу кодом буде $C = \{\mathbf{1}\}$. Відповідно, якщо обрати кодовою іншу вершину, то для вершин 2, 3, 4 отримаємо відповідно $C = \{\mathbf{2}\}$, $C = \{\mathbf{3}\}$, $C = \{\mathbf{4}\}$, а відповідні розбиття вершин задаються таким чином:

a) $\{\mathbf{1}, 2, 3, 4\}$,
b) $\{\mathbf{2}, 1, 3, 4\}$,
c) $\{\mathbf{3}, 1, 2, 4\}$,
d) $\{\mathbf{4}, 1, 2, 3\}$.

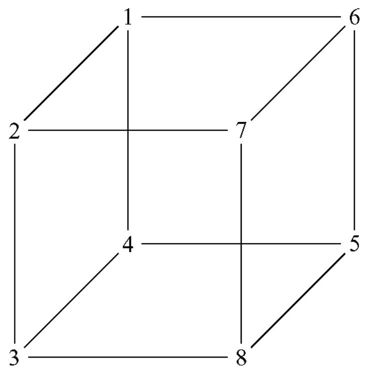

Рис. 15

2. ***Гіперкуб***

На графі, що зображує гіперкуб, можна побудувати дві підмножини, які не перетинаються, а їх одиничні околи містять усі вершини графа G, тобто утворюють розбиття. А саме: якщо одна підмножина визначатиметься вершиною i, то друга — діагонально їй протилежною. Скажімо, якщо перша підмножина визначається вершиною 1, то друга, відповідно, вершиною 8 (див. рис. 15), тобто в такому випадку шуканий одиничний досконалий код $C = \{1, 8\}$.

Оскільки за першу кодову вершину ми можемо взяти будь-яку з множини вершин, а інша визначається автоматично, то на графі-кубі з вісьмома вершинами можна побудувати 4 різних досконалих одиничних коди. Отже, маємо такі коди і відповідні їм розбиття:

a) $\{\{\mathbf{1}, 2, 4, 6\}, \{\mathbf{8}, 3, 5, 7\}\}$,
b) $\{\{\mathbf{2}, 1, 3, 7\}, \{\mathbf{5}, 4, 6, 8\}\}$,
c) $\{\{\mathbf{3}, 2, 4, 8\}, \{\mathbf{6}, 1, 5, 7\}\}$,
d) $\{\{\mathbf{4}, 1, 3, 5\}, \{\mathbf{7}, 2, 6, 8\}\}$.

3. ***Граф Коксетера***

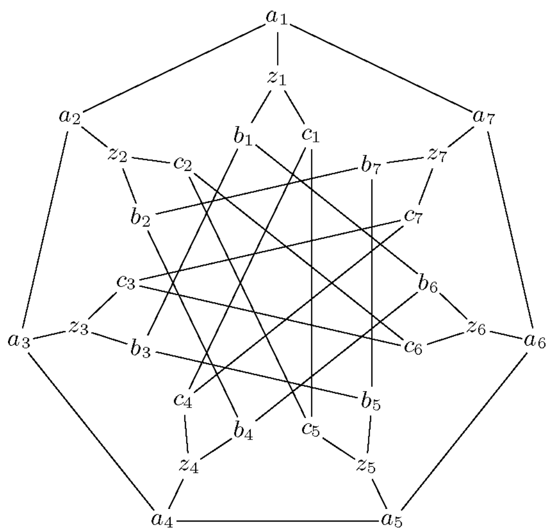

Рис. 16

Для графа Коксетера можна побудувати розбиття множини вершин одиничними околами вершин із певної підмножини. А саме: прикладом такого розбиття є (див. діаграму графа на рис. 16):

$$C = \{\mathbf{z_1}, \mathbf{z_2}, \mathbf{z_3}, \mathbf{z_4}, \mathbf{z_5}, \mathbf{z_6}, \mathbf{z_7}\}.$$

Відповідними одиничними околами будуть такі множини:

$$m_1 = \{\mathbf{z_1}, a_1, b_1, c_1\}$$
$$m_2 = \{\mathbf{z_2}, a_2, b_2, c_2\}$$
$$m_3 = \{\mathbf{z_3}, a_3, b_3, c_3\}$$
$$m_4 = \{\mathbf{z_4}, a_4, b_4, c_4\}$$
$$m_5 = \{\mathbf{z_5}, a_5, b_5, c_5\}$$
$$m_6 = \{\mathbf{z_6}, a_6, b_6, c_6\}$$
$$m_7 = \{\mathbf{z_7}, a_7, b_7, c_7\}$$

Таким чином, для графа Коксетера існує досконалий 1-код, множина вершин

$$C = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7\}.$$

Список літератури

1. Маквильям Ф. Д. Теория кодов, исправляющих ошибки / Ф. Дж. Маквильям, Н. Дж. А. Слоен. — М. : Связь, 1979. — 744 с.
2. Biggs N. Perfect codes in graphs / Norman Biggs // Journal of combinatorial theory (B). — 1973. — Vol. 15. — P. 289–296.
3. Biggs N. Perfect codes and distant-transitive graphs / Norman Biggs // Combinatorics / ed. by T. P. McDonough, V. C. Mavron. — Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1974. — Vol. 13 of London Mathematical Society Lecture Notes. — P. 1–8.
4. Biggs N. Designs, factors and codes in graphs / Norman Biggs // Quart. J. Math. Oxford. — 1975. — Vol. 26. — P. 113–119.
5. Ahlswede R. On perfect codes and related concepts / R. Ahlswede, H. K. Aydinian, L. H. Khachatrian // Designs, Codes and Cryptography. — 2001. — Vol. 22. — P. 221–237.
6. Hammond P. Perfect codes in the graphs O_k / P. Hammond, D. H. Smith // Journal of combinatorial theory (B). — 1975. — Vol. 19. — P. 239–255.
7. Kratochvil J. Perfect codes over graphs / Jan Kratochvil // Journal of combinatorial theory (B). — 1973. — Vol. 15. — P. 289–296.
8. Kratochvil J. 1-perfect codes over self-complementary graphs / Jan Kratochvil // Comment. Math. Univ. Carolin. — 1985. — Vol. 26. — P. 589–595.
9. Brouwer A. E. Distance-Regular Graphs / A. E. Brouwer, A. M. Cohen, A. Neumaier. — Berlin : Springer-Verlag, 1989. — 485 p.
10. Андерсон Д. А. Дискретная математика и комбинаторика / Джеймс А. Андерсон. — М. : Изд. дом «Вильямс», 2004. — 960 с.
11. Андрійчук В. І. Вступ до дискретної математики / В. І. Андрійчук, М. Я. Комарницький, Ю. Б. Іщук. — Львів : ВЦЛНУ ім. І. Франка, 2003. — 255 с.

B. Oliynyk, M. Lukashova, T. Lukashova

PERFECT 1-CODES ON CUBIC DISTANCE-TRANSITIVE GRAPHS

The existence of perfect 1*-codes on cubic distance-transitive graphs is investigated. Based on the results of Norman Biggs, it has been shown that among all of such graphs, the perfect* 1*-codes may exist on the complete graph* K_4*, on the graph of the cube, on the Desargues graph, Coxeter graph, and Foster graph. It is proved that there are no perfect* 1*-codes on the Desargues graph and Foster graph. Perfect* 1*-codes are constructed for the complete graph* K_4*, the graph of the cube, and the Coxeter graph.*

Keywords: distance-transitive graph, cubic graph, perfect 1-codes.

Матеріал надійшов 06.11.2017