УДК 519.217.8

Чорней Р. К.

ПРО РІВНОВАГУ ЗА НЕШЕМ У СТОХАСТИЧНИХ ІГРАХ НАКОПИЧЕННЯ КАПІТАЛУ НА ГРАФІ

У роботі розглянуто деякі застосування теорії керованих марковських полів, заданих на деякому скінченному неорієнтованому графі. Граф описує систему «сусідської залежності», еволюція випадкового процесу описується через локальну і синхронну зміну станів вершин графа, що залежать від рішень, що приймаються в них. Основну увагу приділено розв'язанню задачі знаходження рівноваги за Нешем для стохастичних ігор накопичення капіталу з багатьма гравцями.

Ключові слова: марковський процес прийняття рішень, стохастична гра, рівновага за Нешем, накопичення капіталу, випадкові поля, локальна взаємодія.

Вступ

Теорія керування випадковими процесами та полями досить розгалужена і об'ємна. Застосування її теоретичних положень дає змогу описати процеси різної природи. У роботі [1] розглянуто деякі проблеми, які виникають під час розв'язання багатьох прикладних задач економіки, розпізнавання, соціології, біології, моделювання катастроф. Основною метою цієї роботи є дослідження застосування керованих випадкових полів, заданих на скінченному неорієнтованому графі, описаних в [2], до задач знаходження рівноваги за Нешем для стохастичних ігор накопичення капіталу з багатьма гравцями. Такого типу економічні ігри, також відомі як ігри видобутку ресурсів, введені в роботі [3], широко вивчалися в останні роки. Результати включають теореми існування стаціонарної рівноваги для детермінованої версії цієї гри в роботі [4] та два варіанти стохастичних ігор із симетричними гравцями, запропоновані в [5] та [6].

Безпосереднім поштовхом до написання цієї статті була робота [7], що базується на результатах роботи [8]. В ній поширено результати робіт [5; 6] на несиметричний випадок. Це узагальнення було досягнуто за рахунок деяких додаткових структурних припущень (неперервність і опуклість закону руху між станами, обмеженість простору дій гравців). Однак це дозволило автору показати деякі важливі риси стаціонарних рівноважних стратегій, якот неперервність, монотонність і властивість Ліпшиця.

У цій роботі узагальнено результат [7] на багатомірну модель: гравці зосереджені у вершинах деякого скінченного графа, що визначає їх локальну взаємодію. Таке узагальнення дає можливість застосування в реальних економічних моделях, що описують процес накопичення капіталу.

Постановка задачі

Матеріал цього розділу узагальнює та модифікує результати роботи [2].

Нехай задано деякий неорієнтований скінченний граф $\Gamma = (V, B)$ з множиною вершин V і множиною ребер $B \subset V^2 \setminus \mathrm{diag}(V)$. Позначимо $\{k, j\}$ ребро, що з'єднує вершини графа k і j. Околом вершини k називатимемо множину вершин $N(k) = \big\{j \mid \{k, j\} \in B\big\}$. Повним околом вершини k — множину $\widetilde{N}(k) = N(k) \cup \{k\}$, тобто окіл вершини k разом із самою вершиною k. Для будь-якої підмножини $K \subset V$ означимо окіл як $N(K) = \bigcup_{k\in K} N(k) \setminus K$, а повний окіл — як $\widetilde{N}(K) = N(K) \cup K$.

Нехай X — простір станів системи, що всюди в роботі позначатиме доступний для перерозподілу капітал. Тому вважатимемо, що $X = [0; \infty)$.

Випадкова величина ξ, визначена на деякому ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, яка приймає значення в X, називається (дискретним) випадковим процесом на X (або, простіше, випадковим процесом на X).

Всюди вважатимемо, що всі випадкові величини задані на деякому ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$.

Припустимо, що в кожен момент часу гравцями, що перебувають у вершинах графа (у подальшому ототожнюватимемо їх із самими вершинами), приймаються рішення щодо накопичення капіталу, виходячи з доступного в даний момент капіталу всієї системи, і можуть набувати значень із множини $A = \times_{i\in V} A_i(x)$, де $A_i(x) = [0; U_i(x)]$ — множина допустимих дій (рішень) для вершини i, $i \in V$, а $U_i(x)$ — залежна від сукупного капіталу верхня межа для прийняття рішення вершиною i, $i \in V$. У загальному випадку припускатимемо, що A_i (а отже, і $U_i(x)$) залежить від моменту часу t, $t \in \mathbb{N}^+$, в якому приймається це рішення, тобто

$$A_i^t(x) = \big[0; U_i^t(x)\big], \quad i \in V, x \in X.$$

Верхніми індексами позначатимемо належність до моменту часу (наприклад, x^t — стан системи в момент часу t), а нижніми — належність до вершини або підмножини вершин (наприклад, a_i — рішення, що приймається у вершині i, $a_K = (a_i : i \in K \subseteq V)$ — вектор рішень, що приймаються у вершинах підмножини $K \subseteq V$, $a_K \in \times_{i \in K} A_i$).

Для всіх $i \in V$ позначимо через $a_i^t(x)$ рішення, що приймається вершиною i в момент часу t, якщо система перебуває в стані x, $a_i^t(x) \in A_i(x)$. Тоді $a^t = (a_i^t, i \in V)$ — вектор рішень системи в момент часу t. Розглядатимемо тільки керування, локальні [9, p. 100] у розумінні такого означення.

Означення 1. (1) Якщо в моменти часу $t = 0, 1, \ldots$ рішення a_i^t вершини i приймаються тільки на підставі інформації про історію повного околу $\widetilde{N}(i)$ вершини i, тобто залежно від $x^0, a^0_{\widetilde{N}(i)}, \ldots, x^{t-1}, a^{t-1}_{\widetilde{N}(i)}, x^t$, то послідовність імовірнісних мір $\delta_i = \{\delta_i^t, t \in \mathbb{N}^+\}$ називається локальною стратегією для вершини i, якщо $\delta_i^t(\,\cdot \mid h^t_{\widetilde{N}(i)})$ — умовна ймовірність на

$$A_i = \bigcup_{x \in [0;\infty)} \big[0; U_i(x)\big],$$

залежна від історії

$$h^t_{\widetilde{N}(i)} = \big(x^0, a^0_{\widetilde{N}(i)}, \ldots, x^{t-1}, a^{t-1}_{\widetilde{N}(i)}, x^t\big)$$

повного околу вершини i до моменту часу t включно. Локальна стратегія δ_i така, що

$$\delta_i^t\Big(\big[0; U_i(x^t)\big] \;\Big|\; h^t_{\widetilde{N}(i)}\Big) = 1, \quad t \in \mathbb{N}^+.$$

Таким чином, локальна стратегія для вершини i є послідовністю ймовірнісних мір на A_i, які в кожен момент часу t залежать від історії повного околу (вершини i), визначеної в просторі

$$H^t_{\widetilde{N}(i)} = X \times \underbrace{\big(A_{\widetilde{N}(i)} \times X\big) \times \cdots \times \big(A_{\widetilde{N}(i)} \times X\big)}_{t \text{ раз}}.$$

Клас усіх локальних стратегій вершини i позначатимемо Δ_i. Вважатимемо, що рішення у всіх вершинах графа приймаються одночасно в моменти часу $t \in \mathbb{N}^+$, тобто мова йде про синхронну взаємодію гравців.

Сукупність локальних стратегій усіх вершин називатимемо стратегією системи $\delta = \{\delta^t, t \in \mathbb{N}^+\}$, де $\delta^t = \delta_V^t = (\delta_i^t, i \in V)$. Клас усіх стратегій системи позначатимемо Δ.

(2) Нехай $F_i = \{f : [0;\infty) \to \mathsf{P}(A_i)\}$ — множина всіх перехідних імовірностей вершини i, $i \in V$, таких, що $f(x)(\,\cdot\,) \in \mathsf{P}([0; U_i(x)])$ для всіх $x \in [0;\infty)$, а $\mathsf{P}(Y)$ — множина всіх імовірнісних мір на Y. Тоді $\delta_i = (f, f, \ldots)$ називатимемо стаціонарною стратегією гравця i, $i \in V$, якщо $f \in F_i$ (у такому разі ототожнюватимемо стаціонарну стратегію δ_i з $f : \delta_i \equiv f$).

Таким чином, множина F_i задає клас усіх стаціонарних стратегій гравця i, $i \in V$, а $F = \times_{i \in V} F_i$ — клас усіх стаціонарних стратегій системи.

(3) Локальна стратегія δ_i називається нерандомізованою (чистою), якщо $\delta_i(\cdot \mid h^t_{\widetilde{N}(i)})$ зосереджена в єдиному атомі, тобто

$$\delta_i : h^t_{\widetilde{N}(i)} \to a_i \in \big[0; U_i(x^t)\big].$$

Визначимо закон переходу станів системи відповідно до означених вище локальних стратегій.

Означення 2. Дискретний випадковий процес $\xi = \{\xi^t, t \in \mathbb{N}^+\}$ на (V, B) є (дискретним) марковським процесом, якщо наступний стан системи ξ^{t+1} визначається перехідним ядром Q:

$$\xi^{t+1} \sim \mathsf{Q}\Big(\,\cdot\; \Big|\; x^t - \sum_{i \in V} a_i^t\Big), \quad t \in \mathbb{N}^+, \qquad (1)$$

якщо $\xi^t = x^t \in X$, $\delta_i^t = a_i^t$, $i \in V$.

Таким чином, перехідне ядро Q разом з локальними стратегіями системи $\delta \in \Delta$ визначають закон руху, в результаті чого отримаємо реалізацію історії системи, яка є елементом простору

$$H = [0;\infty) \times \Big(\mathop{\times}_{i \in V} A_i \times [0;\infty)\Big)^{\infty}.$$

Для довільного початкового стану системи $x_0 \in [0;\infty)$ і довільних δ_i, $i \in V$, визначимо (за допомогою теореми Іонеску — Тулчи) імовірнісну міру $\mathsf{P}^{\delta}_{x_0}$ на H, що містить історію можливих траєкторій руху системи з початком у точці x_0.

Керований процес взагалі не буде марковським, оскільки функції δ_i^t, $i \in V$, залежать не тільки від станів x^t, а й від попередніх станів $x^0, \ldots, x^{t-1}$ і рішень також. Використання стаціонарної стратегії δ як стратегії керування залежним від часу марковським випадковим процесом визначає марковський процес (ξ, δ).

Означення 3. Пара (ξ, δ) називається керованим процесом з локально взаємодіючими синхронними компонентами, заданим на скінченному графі $\Gamma = (V, B)$, якщо $\xi = \{\xi^t, t \in \mathbb{N}^+\}$ — стохастичний процес із простором станів $X = [0;\infty)$, $\delta = (\delta_i, i \in V)$ — локальна стратегія, і переходи ξ (1) разом з мірами δ_i, $i \in V$, визначають за допомогою теореми Іонеску — Тулчи імовірнісну міру $\mathsf{P}^{\delta}_{x_0}$ на H, що містить історію можливих траєкторій руху системи з початком у деякій точці x_0.

Якщо в момент часу $t \in \mathbb{N}^+$ гравцем i прийнято рішення a_i^t, то функція $u_i(a_i^t)$ визначає корисність (однокрокову) для гравця i, $i \in V$. Тоді очікувана корисність на необмеженому горизонті для гравця i, $i \in V$, якщо ξ починає з $\xi^0 = x$ і система використовує стратегію δ, матиме вигляд:

$$R_i(x,\delta) = \mathsf{E}_x^\delta \sum_{t=0}^{\infty} \beta_i^t u_i(a_i^t), \qquad (2)$$

де E_x^δ — математичне сподівання, що відповідає керованому процесу (ξ,δ), якщо $\xi^0 = x$; β_i — дисконт гравця i, $i \in V$.

Задача полягає у знаходженні рівноваг за Нешем у такому розумінні:

Означення 4. Нехай $\delta_{\delta_i \leftrightarrow \delta_i'}$ позначає стратегію системи, де всі гравці $j \in V \setminus \{i\}$ дотримуються стратегії δ_j, а гравець i — стратегії δ_i'.

Стратегія $\delta = (\delta_i, i \in V) \in \Delta$ називається рівновагою за Нешем тоді і тільки тоді, коли для всіх $\delta' = (\delta_i', i \in V) \in \Delta$, $x \in [0;\infty)$

$$R_i(x,\delta) \geqslant R_i\big(x, \delta_{\delta_i \leftrightarrow \delta_i'}\big) \qquad (3)$$

для кожного гравця $i \in V$. Тобто жодному з гравців i не вигідно самостійно відхилятися від стратегії δ_i.

Якщо стаціонарна стратегія $f = (f_i, i \in V) \in F$ системи задовольняє умову (3), тобто для всіх $\delta' = (\delta_i', i \in V) \in \Delta$, $x \in [0;\infty)$

$$R_i(x,f) \geqslant R_i\big(x, f_{f_i \leftrightarrow \delta_i'}\big) \qquad (4)$$

для кожного гравця $i \in V$, то її називатимемо стаціонарною нешівською рівновагою. У такому разі значення функцій $R_i(x,f)$ називатимемо ціновими функціями для гравців $i \in V$.

Уведемо припущення щодо функцій корисності u_i, перехідних імовірностей Q і функцій споживчих обмежень $U_i(x)$.

Припущення 1. *Функція* $u_i\colon [0;\infty) \to [0;\infty)$ — *неспадна опукла для всіх* $i \in V$.

Припущення 2. Q — *перехідна ймовірність з* $[0;\infty)$ *в себе. Нехай* $G(\,\cdot \mid y)$ — *функція розподілу, що відповідає мірі* $\mathsf{Q}(\,\cdot \mid y)$, *тобто для всіх* $x \geqslant 0$ $G(x \mid y) = \mathsf{Q}([0;x] \mid y)$. *Будемо вважати, що:*

а) для всіх $x \geqslant 0$ $G(x \mid \cdot\,)$ — *незростаюча функція;*

б) для всіх $x \geqslant 0$ $G(x \mid \cdot\,)$ — *неперервна угнута функція;*

в) $G(0 \mid 0) = 1$.

Припущення 3. *Для всіх* $i \in V$ *функції* $U_i(x)$ *неспадні, рівномірно обмежені зверху деякими сталими* $C_i \in [0;\infty)$ *і задовольняють умови* $U_i(0) = 0$,

$$\frac{U_i(x') - U_i(x'')}{x' - x''} \leqslant 1 \text{ для всіх } x', x'' \geqslant 0, x' \neq x'',$$

і $\sum_{i \in V} U_i(x) \leqslant x$ *для всіх* $x \geqslant 0$.

Уведемо позначення для простору ефективних чистих стратегій і простору цінових функцій

$$\begin{aligned} EPS_i = \\ = \Big\{ f\colon [0;\infty) \to [0;\infty) \;\Big|\; f(x) \leqslant U_i(x)\ \forall x \geqslant 0 \wedge \\ \wedge\, 0 \leqslant \frac{f(x') - f(x'')}{x' - x''} \leqslant 1\ \forall x' \neq x'' \in [0;\infty) \Big\}, \\ VF_i = \Big\{ v\colon [0;\infty) \to [0;\infty) \;\Big|\; v \leqslant \frac{u_i(C_i)}{1-\beta_i} \wedge \\ \wedge\ v \text{ неперервна на } (0;\infty) \text{ і неспадна на } [0;\infty) \Big\}. \end{aligned}$$

Дискретний варіант гри

Для представлення основного результату, аналогічно до [7], означимо дискретний аналог гри з накопичення капіталу. Для неї отримаємо умови існування стаціонарної рівноваги, які використаємо для доведення аналогічного факту для основної задачі.

Отже, розглянемо керований процес з локально взаємодіючими координатами $\big(\xi(N,n), \delta(N,n)\big)$ згідно з означенням 3, де $N = |V|$ — кількість гравців, $n \in \mathbb{N}$.

Для процесу $\big(\xi(N,n), \delta(N,n)\big)$ визначимо:

- множину станів системи

$$X(N,n) = \Big\{ \frac{k}{N^n} \;\Big|\; k \in \mathbb{N}^+ \Big\};$$

- множини керуючих впливів (дій) вершини i, $i \in V$, в стані $x \in X(N,n)$

$$A_i(N,n)(x) = \Big\{ \frac{k}{N^n} \;\Big|\; k \in \mathbb{N}^+ \wedge k \leqslant N^n U_i(x) \Big\};$$

- функції корисності $u_i(N,n)$ для гравців i, $i \in V$:

$$u_i(N,n)(x) = u_i\Big(\frac{\lfloor N^n x \rfloor}{N^n}\Big)$$

для всіх $x \in X(N,n)$;

- закон руху між станами описується тим самим ядром Q, але з іншою функцією розподілу

$$G(N,n)(x \mid y) = G\Big(\frac{\lfloor N^n x \rfloor}{N^n} \;\Big|\; \frac{\lfloor N^n y \rfloor}{N^n}\Big)$$

для всіх $x \in [0;\infty)$, $y \in X(N,n)$.

Простір ефективних стратегій гравця i, $i \in V$, є простором стратегій, що в кожному стані системи зосереджений у двох сусідніх точках множини керуючих впливів, що задовольняють умову

Ліпшиця, і їх очікувані значення неспадні:

$$EPS_i(N,n) = \\ = \Big\{ f\colon X(N,n) \to \mathsf{P}\Big(\Big\{ \frac{k}{N^n} \;\Big|\; k \in \mathbb{N}^+ \wedge \\ \wedge\, k \leqslant N^n C_i \Big\}\Big) \;\Big|\; \forall x \in X(N,n) \\ f(x) = \alpha_x \sigma[a_x] + (1-\alpha_x)\sigma\Big[a_x + \frac{1}{N^n}\Big] \\ \text{для деяких } 0 \leqslant \alpha_x \leqslant 1 \text{ і} \\ a_x \in A_i(N,n)(x) \setminus \Big\{ \frac{\lfloor N^n U_i(x) \rfloor}{N^n} \Big\} \text{ і} \\ 0 \leqslant \frac{\mathsf{E}\tilde f(x') - \mathsf{E}\tilde f(x'')}{x'-x''} \leqslant 1 \;\forall x' \neq x'' \in X(N,n) \Big\},$$

де $\sigma[a]$ — імовірнісна міра, сконцентрована в єдиному атомі a, якщо для $x \in \mathbb{N}$ і для всіх f $\tilde f(x)$ визначає випадкову величину з розподілом, що описується функцією $f(x)$.

Відповідний простір цінових функцій визначимо так:

$$VF_i = \Big\{ v\colon X(N,n) \to [0;\infty) \;\Big| \\ 0 \leqslant v \leqslant \frac{u_i\big(C_i(N,n)\big)}{1-\beta_i} \;\wedge\; v \text{ неспадна} \Big\},$$

де $C_i(N,n) = \frac{\lfloor N^n C_i \rfloor}{N^n}$.

Аналогічно з [10] можемо довести існування стаціонарної рівноваги для дискретної гри, визначеної вище.

Теорема 1. *Для довільного $n \in \mathbb{N}$ керований процес з локально взаємодіючими координатами $(\xi(N,n), \delta(N,n))$ має стаціонарну рівновагу, яка є елементом простору $\times_{i\in V} EPS_i(N,n)$. Окрім того, їй відповідатиме цінова функція*

$$(R_i, i \in V) \in \underset{i\in V}{\times} VF_i(N,n).$$

Аналогічно з [7] зробимо подальше узагальнення дискретної гри та сформулюємо аналоги теоретичних результатів. Для цього розглянемо керований процес з локально взаємодіючими координатами $(\xi(n), \delta(n))$ згідно з означенням 3, де $n \in \mathbb{N}$.

Для процесу $(\xi(n), \delta(n))$ визначимо:

- множину станів системи і множини керуючих впливів (дій) вершини i, $i \in V$, такі самі, як і для керованого процесу (ξ, δ);
- функції корисності $u_i(n)$ для гравців i, $i \in V$, такі самі, як і для керованого процесу $(\xi(N,n), \delta(N,n))$:

$$u_i(n)(x) = u_i\Big(\frac{\lfloor N^n x \rfloor}{N^n}\Big)$$

для всіх $x \in X$, $N = |V|$;

- закон руху між станами описується тим самим ядром Q, але з іншою функцією розподілу

$$G(N,n)(x \mid y) = G\Big(\frac{\lfloor N^n x \rfloor}{N^n} \;\Big|\; \frac{\lfloor N^n y \rfloor}{N^n}\Big)$$

для всіх $x, y \in [0;\infty)$.

Лема 2 (див. лему 4.1 в [7]). *Для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ керований процес $(\xi(n), \delta(n))$ має стаціонарну рівновагу $(f_i(n), i \in V)$ таку, що для всіх $i \in V$ і $x \in X$ $f_i(n)$ повністю сконцентровані у двох сусідніх точках множини $[0; U_i(x)] \cap X(N,n)$ і задовольняють нерівність*

$$0 \leqslant \mathsf{E}\tilde f_i(n)\Big(x + \frac{1}{N^n}\Big) - \mathsf{E}\tilde f_i(n)(x) \leqslant \frac{1}{N^n} \tag{5}$$

для всіх $x \geqslant 0$. Відповідні цінові функції $(R_i(n)(\,\cdot\,, f(n)), i \in V)$ для $f(n) = (f_i(n), i \in V)$ неперервні справа, рівномірно обмежені зверху (відносно n) величинами $u_i(C_i)/(1-\beta_i)$, $i \in V$, і неспадні.

Лема 3 (див. лему 4.2 в [7]). *Нехай $f_i(n)$, $R_i(n)$ для всіх $i \in V$ задовольняють умови леми 2. Якщо для деякого $i \in V$ u_i розривна в точці 0, то для всіх $x > 0$ $\tilde f_i(n)(x) \neq 0$ з імовірністю одиниця для достатньо великих n.*

Лема 4 (див. лему 4.3 в [7]). *Нехай $f_i(n)$, $R_i(n)$ для всіх $i \in V$ задовольняють умови леми 2. Тоді для всіх $i \in V$*

$$\sup_{x\in(0;\infty)} \Big[R_i(n)\Big(x + \frac{1}{N^n}, f(n)\Big) - \\ - R_i(n)\big(x, f(n)\big)\Big] \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Лема 5 (див. лему 4.4 в [7]). *Нехай $x \in \mathbb{R}$ і $\{r_n\}$ та $\{s_n\}$ — дві послідовності дійсних чисел такі, що для довільного n.*

Основний результат і висновок

На підставі зазначених вище теоретичних фактів можна довести факт, аналогічний до гри з двома гравцями.

Теорема 6. *Керований процес з локально взаємодіючими компонентами (ξ, δ) має стаціонарну рівновагу за Нешем, яка є елементом добутку просторів $\times_{i\in V} EPS_i$. Окрім того, їй відповідатиме цінова функція*

$$(R_i, i \in V) \in \underset{i\in V}{\times} VF_i.$$

Доведення цього факту цілком аналогічне до доведення теореми 2.1 роботи [7], тому його опускаємо.

Загалом, застосування теорії марковських полів на практиці має широкі перспективи. Розглянута задача стосується економічних застосувань, однак може легко переноситися на інші системи: фізичні, біологічні, хімічні тощо. Основна увага прикута до знаходження несиметричних рівноваг за Нешем у грі з багатьма гравцями. На відміну від матеріалу цієї роботи, у разі нескінченної кількості гравців задача знаходження нешівських рівноваг досі не вирішена. Результати цієї роботи можна узагальнити на випадок, коли стан системи описується вектором значень (фазові стани гравців), або складнішої (нелінійної) залежності перехідних імовірностей від керуючих впливів.

Список літератури

1. Knopov P. S. On Markov stochastic processes with local interaction for solving some applied problems / P. S. Knopov, A. S. Samosonok // Cybernetics and Systems Analysis. — 2015. — Vol. 47, no. 3. — P. 346–363.
2. Chornei R. K. Control of Spatially Structured Random Processes and Random Fields with Applications / R. K. Chornei, H. Daduna, P. S. Knopov. — New York : Springer Science + Business Media, Inc., 2006. — 262 p.
3. Levhari D. The great fish war: An example using a dynamic Cournot—Nash solution / D. Levhari, L. Mirman // Bell. J. Econ. — 1980. — Vol. 11. — P. 322–334.
4. Sundaram R. K. Perfect equilibrium in non-randomized strategies in a class of symmetric dynamic games / R. K. Sundaram // J. Econ. Theory. — 1989. — Vol. 47. — P. 153–177.
5. Majumdar M. Symmetric stochastic games of resource extraction: Existence of nonrandomized stationary equilibrium / M. Majumdar, R. K. Sundaram // Stochastic Games and Related Topics / ed. by T. E. S. Raghavan, T. S. Ferguson, T. Parthasarathy, O. J. Vrieze. — Dordrecht : Springer, 1991. — Vol. 7 of Theory and Decision Library (Game Theory, Mathematical Programming and Operations Research). — P. 175–190.
6. Dutta P. K. Markovian equilibrium in a class of stochastic games: Existence theorems for discounted and undiscounted models / P. K. Dutta, R. K. Sundaram // Econ. Theory. — 1992. — Vol. 2. — P. 197–214.
7. Wieçek P. Continuous convex stochastic games of capital accumulation / P. Wieçek // Advances in Dynamic Games / ed. by A. S. Nowak, K. Szajowski. — Boston : Birkhäuser, 2005. — Vol. 7 of Annals of the International Society of Dynamic Games. — P. 111–125.
8. Amir R. Continuous stochastic games of capital accumulation with convex transitions / R. Amir // Games Econ. Behavior. — 1996. — Vol. 15. — P. 111–131.
9. Vasilyev N. B. Bernoulli and Markov stationary measures in discrete local interactions / N. B. Vasilyev // Locally Interacting Systems and Their Application in Biology / ed. by R. L. Dobrushin, V. I. Kryukov, A. L. Toom. — Berlin : Springer, 1978. — Vol. 653 of Lecture Notes in Mathematics. — P. 99–112.
10. Wieçek P. Continuous convex stochastic games of capital accumulation with nondivisible money unit / P. Wieçek // Scientiae Mathematicae Japonicae. — 2003. — Vol. 57, no. 2. — P. 397–411.

R. Chornei

ON THE NASH EQUILIBRIUM IN STOCHASTIC GAMES OF CAPITAL ACCUMULATION ON A GRAPH

This paper discusses some applications of the theory of controlled Markov fields defined on some finite undirected graph. This graph describes a system of "neighborhood dependence" of the evolution of a random process described by local and synchronous change of state of vertices, depending on the decisions made in them. The main attention is paid to solving the problem of finding the Nash equilibrium for stochastic games of capital accumulation with many players.

Keywords: Markov decision process, stochastic game, Nash equilibrium, capital accumulation, random fields, local interaction.

Матеріал надійшов 17.10.2017