ВІСНИК ЛЬВІВ. УН–ТУ
Сер. прикл. матем. та інформ.
2007. Вип. 12. С. 51–61

VISNYK LVIV UNIV
Ser. Appl. Math. Comp. Sci.
2007. No 12. P. 51–61

УДК 519.21

ЕКСТРАПОЛЯЦІЯ ФУНКЦІОНАЛІВ ВІД ОДНОРІДНОГО ВИПАДКОВОГО ПОЛЯ, ЯКЕ СПОСТЕРІГАЮТЬ У ПІВПЛОЩИНІ

Н. Щестюк

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
вул. Володимирська, 64, м. Київ, 252601, e-mail: Natalyshch@gmail.com

Досліджено задачу оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_+\xi$ від невідомих значень однорідного випадкового поля $\xi(k,j)$ за даними спостережень при $(u,v)\in Z^2\setminus Z\times Z_+$. Визначено формули для обчислення середньоквадратичної похибки та спектральної характеристики середньоквадратичної оптимальної лінійної оцінки поля, що має щільність $f(\lambda,\mu)=f_1(\lambda)f_2(\mu)$. Знайдені найменш сприятливі спектральні щільності та мінімаксні (робастні) спектральні характеристики оптимальних оцінок функціонала $A_+\xi$ для деякого класу полів.

Ключові слова: випадкове однорідне поле, екстраполяція, оцінка, мінімаксна (робастна) спектральна характеристика.

1. ВСТУП

За допомогою випадкових полів описують багато моделей як статистичної радіофізики, теорії автоматичного керування, так і фінансової математики.

Серед сучасних напрямів розвитку теорії випадкових полів вагому роль відіграє напрям, що вивчає задачі прогнозування полів. Формулювання задачі екстраполяції та інтерполяції випадкових послідовностей за умови відомої спектральної щільності належить А.М. Колмогорову. Цю задачу для випадку однорідних узагальнених полів дослідили М.А. Мірзахмедов, для полів на циліндрі – М.П. Моклячук, для однорідних за часом ізотропних полів на сфері – М.Й. Ядренко, для полів на площині – А.Г. Міамі та Х. Ніємі, С. Ранганат та К. Джейн. У працях цих учених для задач лінійного прогнозування застосовано підхід, що ґрунтується на канонічній факторизації спектральної щільності та пошуку спектральної характеристики оцінки як границі аналітичної у деякій області функції, що задовольняє певні властивості.

Ми запропонуємо два оригінальні підходи до задач лінійної екстраполяції однорідного випадкового поля та лінійного функціонала від поля, яке простежується у півплощині та має спектральну щільність, що є виродженою, тобто $f(\lambda,\mu)=f_1(\lambda)f_2(\mu)$. Коли ж спектральна щільність поля невідома, а відомі лише деякі його статистичні характеристики, то застосовують мінімаксний підхід, тобто такий, який мінімізує максимальну похибку одночасно для всіх щільностей з цього класу. Цей підхід запропонований У. Гренадером для оцінки стаціонарної послідовності і розвинутий у працях О.М. Куркіна, М. Танігуші, С. Кассама та Г. Пура. Ми мінімаксний підхід застосовуємо до оцінки лінійного функціонала від поля, яке простежується у півплощині та має спектральну щільність $f(\lambda,\mu)=f_1(\lambda)f_2(\mu)$.

2. ЛІНІЙНІ СЕРЕДНЬОКВАДРАТИЧНІ ОПТИМАЛЬНІ ОЦІНКИ

Нехай випадкове поле $\xi(u,v)$, що має спектральну щільність $f(\lambda,\mu)$, простежується в точках $(u,v)\in Z^2\setminus Z\times Z_+$ та задовольняє умову мінімальності:

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f(\lambda,\mu))^{-1}\,d\mu<\infty,\ \forall\lambda\in[-\pi;\pi]. \tag{1}$$

Розглянемо задачу лінійного середньоквадратичного оптимального оцінювання функціонала

$$A_+\xi=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}a(k,j)\xi(k,j)$$

(або, як частковий випадок, $A_{M+}\xi=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=0}^{M}a(k,j)\xi(k,j)$) від невідомих значень однорідного випадкового поля $\xi(k,j),k\in Z,j\in Z_+$. Будемо вважати, що функція $a(k,j)$, яка визначає функціонал $A_+\xi$, задовольняє такі умови:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}|a(k,j)|<\infty,\quad \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)|a(\lambda,j)|^2<\infty,\ \forall\lambda\in[-\pi;\pi], \tag{2}$$

де $a(\lambda,j)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a(k,j)\,e^{ik\lambda}$.

За цих умов функціонал $A_+\xi$ має скінченний другий момент і оператор $A(\lambda)$ у просторі l_2 послідовностей $d=\{d(v):v=0,1,...\}$ зі скінченною сумою квадратів, який задано співвідношенням

$$\big(A(\lambda)d\big)(j)=\sum_{v=0}^{\infty}a(\lambda,j+v)\,d(v), \tag{3}$$

симетричний і компактний для $\forall\lambda\in[-\pi;\pi]$. Лінійна оцінка $\hat{A}_+\xi$ функціонала $A_+\xi$ за даними спостережень поля $\xi(u,v)$ при $(u,v)\in Z^2\setminus Z\times Z_+$ має вигляд

$$\hat{A}_+\xi=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h(\lambda,\mu)Z_\xi(d\lambda,d\mu),$$

де $Z_\xi(\Delta_1,\Delta_2)$ – ортогональна випадкова міра поля $\xi(k,j)$; $h(\lambda,\mu)$ – спектральна характеристика оцінки $\hat{A}_+\xi$. Функція $h(\lambda,\mu)$ належить підпростору $L_2^-(f)$ у просторі $L_2(f)$, породженому функціями $e^{i(u\lambda+v\mu)}$ при $(u,v)\in Z^2\setminus Z\times Z_+$.

Перший підхід до задач екстраполяції ґрунтується на методі А.М. Колмогорова пошуку спектральної характеристики оцінки $\hat{A}_+\xi$ як проекції $A_+\xi$ у гільбертовому просторі $H=L_2(\Omega,F,P)$ випадкових величин другого порядку:

$$A_+\xi-\hat{A}_+\xi\perp\xi(k,j)\quad\forall(k,j)\in Z^2\setminus Z\times Z_+.$$

За цієї умови

$$\left(A_+(\lambda,\mu) - h(\lambda,\mu)\right) f(\lambda,\mu) = C_+(\lambda,\mu),$$

де

$$A_+(\lambda,\mu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a(k,j) e^{i(k\lambda + j\mu)} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(\lambda) e^{ij\mu}, \ a_j(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} a(k,j) e^{ik\lambda};$$

$$C_+(\lambda,\mu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c(k,j) e^{i(k\lambda + j\mu)} = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(\lambda) e^{ij\mu}, \ c_j(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} c(k,j) e^{ik\lambda}$$

і

$$h(\lambda,\mu) = A_+(\lambda,\mu) - \frac{C_+(\lambda,\mu)}{f(\lambda,\mu)}. \tag{4}$$

Функції $c_j(\lambda)$ визначені системою рівнянь

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(\lambda) b_{t-j}(\lambda), \ t \in Z_+, \ b_j(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{f(\lambda,\mu)} e^{-ij\mu} d\mu.$$

Якщо у просторі l_2 розглянути оператор $\mathrm{B}(\lambda)$, що є матрицею з елементами

$$B(\lambda)(k,j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)\mu} \frac{1}{f(\lambda,\mu)} d\mu, \quad k,j = 0,1,\ldots,$$

які визначені коефіцієнтами Фур'є функції $\dfrac{1}{f(\lambda,\mu)}$, то система для знаходження $c_j(\lambda)$ матиме вигляд

$$a(\lambda) = B(\lambda) c(\lambda),$$

звідки

$$c(\lambda) = B^{-1}(\lambda) a(\lambda).$$

Спектральна характеристика $h(\lambda,\mu)$ оптимальної лінійної оцінки функціонала $A_+\xi$ мінімізує середньоквадратичну похибку

$$\Delta(f,g) = \Delta(h(f,g); f,g) = \min_{h \in L_2^-(f,g)} \Delta(h; f,g) = \min_{\hat{A}\xi} M\left|A_+\xi - \hat{A}_+\xi\right|^2 =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left|C_+(\lambda,\mu)\right|^2}{f^2(\lambda,\mu)} f(\lambda,\mu)\, d\lambda\, d\mu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{j=0}^{\infty} (B^{-1}(\lambda) a(\lambda))(j)\, \overline{a}(\lambda,j) \right] d\lambda = \tag{5}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\left\langle B^{-1}(\lambda)\, a(\lambda),\, a(\lambda) \right\rangle \right] d\lambda,$$

де $\left\langle a(\lambda), c(\lambda) \right\rangle = \sum_{j=0}^{\infty} a(\lambda,j)\, \overline{c}(\lambda,j)$ – скалярний добуток у просторі l_2.

Якщо $f(\lambda,\mu) = f_1(\lambda) f_2(\mu)$, то спектральну характеристику $h(f)$ та середньоквадратичну похибку $\Delta(f)$ оптимальної оцінки функціонала $A_+\xi$ від невідомих значень однорідного поля $\xi(k,j)$ за даними спостережень поля $\xi(u,v)$ при $(u,v) \in Z^2 \setminus Z \times Z_+$ можна обчислити за формулами

$$h(f) = A_+(\lambda,\mu) - \widetilde{C}_+(\lambda,\mu)\frac{1}{f_2(\mu)}\,; \tag{6}$$

$$\Delta(f) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|C_+(\lambda,\mu)\right|^2 f_1^{-1}(\lambda)\, f_2^{-1}(\mu)\, d\lambda\, d\mu = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(\lambda)\left\langle B^{-1}a(\lambda), a(\lambda)\right\rangle d\lambda\,, \tag{7}$$

де $\widetilde{C}_+(\lambda,\mu) = \sum_{j=0}^{\infty} (B^{-1}a(\lambda))(j)e^{ij\mu}$. Причому B визначене матрицею з коефіцієнтами Фур'є функції $\frac{1}{f_2(\mu)}$: $B(k,j) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(j-k)\mu}\frac{1}{f_2(\mu)}d\mu$, $k, j = 0,1,...,$.

Отже, справджується теорема.

Теорема 1. Нехай $\xi(k,j)$ – однорідне випадкове поле, що має спектральну щільність $f(\lambda,\mu) = f_1(\lambda)f_2(\mu)$, яка задовольняє умову (1). Спектральну характеристику $h(f)$ та середньоквадратичну похибку $\Delta(f,g)$ оптимальної оцінки функціонала $A_+\xi$ від невідомих значень поля $\xi(k,j)$ за даними спостережень поля $\xi(u,v)$ при $(u,v) \in Z^2 \setminus Z \times Z_+$ можна обчислити за формулами (6), (7).

Другий підхід ґрунтується на методі У. Гренадера, його застосовують, коли спектральна щільність допускає канонічну факторизацію:

$$f(\lambda,\mu) = \left|d(\lambda,\mu)\right|^2 = \left|\sum_{v=0}^{\infty} d(\lambda,v)e^{-iv\mu}\right|^2 = f_1(\lambda)\left|\sum_{v=0}^{\infty} d_2(v)e^{-iv\mu}\right|^2.$$

Тоді мінімальне значення похибки, $\Delta(f)$ за У. Гренадером,

$$\Delta(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(\lambda)\left\|A(\lambda)\, d_2\right\|^2 d\lambda, \tag{8}$$

З формул (7), (8) випливає

$$h(f) = A_+(\lambda,\mu) - r(\lambda,\mu)d_2^{-1}(\mu), \tag{9}$$

де $r(\lambda,\mu) = \sum_{j=0}^{\infty} (A(\lambda)d_2)(j)e^{ij\mu}$, $d_2 = \{d_2(v) : v = 0,1,...\}$ визначає канонічну факторизацію спектральної щільності.

Теорема 2. Нехай $\xi(k,j)$ – однорідне випадкове поле, що має спектральну щільність $f(\lambda,\mu) = f_1(\lambda)f_2(\mu)$, яка задовольняє умови (1), (2). Спектральну характеристику $h(f)$ та середньоквадратичну похибку $\Delta(f)$ оптимальної оцінки функціонала $A_+\xi$ від невідомих значень поля $\xi(k,j)$ за даними спостережень поля $\xi(u,v)$ при $(u,v) \in Z^2 \setminus Z \times Z_+$ можна обчислити за формулами (8), (9).

Приклад 1. Нехай простежується таке випадкове однорідне поле $\xi(k,j)$ зі спектральною щільністю:

$$f(\lambda,\mu) = \frac{\sigma^4}{4\pi^2}\frac{1}{\left|1-\alpha e^{-i\lambda}\right|^2}\frac{1}{\left|1-\beta e^{-i\mu}\right|^2} = f_1(\lambda)f_2(\mu),$$

де

$$f_1(\lambda)=\frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{1}{\left|1-\alpha e^{-i\lambda}\right|^2};\quad f_2(\mu)=\frac{\sigma^2}{2\pi}\frac{1}{\left|1-\beta e^{-i\mu}\right|^2},\quad |\alpha|<1,\ |\beta|<1.$$

Знайдемо оцінку функціонала $A_+\xi=\sum_{k=-1}^{1}\sum_{j=0}^{1}a(k,j)\xi(k,j)$ двома способами.

Перший спосіб (на підставі теореми 1).

Легко побачити, що

$$\frac{1}{f(\lambda,\mu)}=\frac{4\pi^2}{\sigma^4}\left|1-\alpha e^{-i\lambda}\right|^2\cdot(1+\beta^2-\beta e^{-i\mu}-\beta e^{i\mu})=r(\lambda,0)+r(\lambda,-1)e^{-i\mu}+r(\lambda,1)e^{i\mu},$$

де $r(\lambda,0)=\frac{4\pi^2}{\sigma^4}\left|1-\alpha e^{-i\lambda}\right|^2\cdot(1+\beta^2)$; $r(\lambda,1)=r(\lambda,-1)=-\frac{4\pi^2}{\sigma^4}\left|1-\alpha e^{-i\lambda}\right|^2\beta$;

$r(\lambda,k)=0$; $k\in Z, k\neq 0,1,-1$ – коефіцієнти Фур'є функції $\frac{1}{f(\lambda,\mu)}=\sum_{j=-\infty}^{\infty}r(\lambda,j)e^{ij\mu}$. Тому оптимальну лінійну оцінку невідомого значення функціонала

$$A_+(\lambda,\mu)=a(\lambda,0)+a(\lambda,1)e^{i\mu},$$

де

$$a(\lambda,0)=a(-1,0)e^{-i\lambda}+a(0,0)+a(1,0)e^{i\lambda};\quad a(\lambda,1)=a(-1,1)e^{-i\lambda}+a(0,1)+a(1,1)e^{i\lambda},$$

можна обчислити за формулою (6). З урахуванням того, що

$$a(\lambda,0)=r(\lambda,0)c(\lambda,0)+r(\lambda,-1)c(\lambda,1);$$

$$a(\lambda,1)=r(\lambda,0)c(\lambda,1)+r(\lambda,1)c(\lambda,0)+r(\lambda,-1)c(\lambda,2);$$

$$0=r(\lambda,0)c(\lambda,2)+r(\lambda,1)c(\lambda,1)+r(\lambda,-1)c(\lambda,3);$$

$$0=r(\lambda,0)c(\lambda,k)+r(\lambda,1)c(\lambda,k-1)+r(\lambda,-1)c(\lambda,k+1),\ k\in Z_+, k\neq 0,1;$$

маємо

$$\begin{aligned}h(f)=&-(r(\lambda,-1)c(\lambda,0)e^{-i\mu}+r(\lambda,-1)c(\lambda,1)+r(\lambda,-1)c(\lambda,2)e^{-i\mu}+r(\lambda,-1)c(\lambda,3)e^{-2i\mu}+\dots\\&+r(\lambda,0)c(\lambda,0)+r(\lambda,0)c(\lambda,1)e^{i\mu}+r(\lambda,0)c(\lambda,2)e^{2i\mu}+r(\lambda,0)c(\lambda,3)e^{3i\mu}+\dots\\&+r(\lambda,1)c(\lambda,0)e^{i\mu}+r(\lambda,1)c(\lambda,1)e^{2i\mu}+r(\lambda,1)c(\lambda,2)e^{2i\mu}+r(\lambda,1)c(\lambda,3)e^{3i\mu}+\dots)=-r(\lambda,-1)c(\lambda,0)e^{-i\mu},\end{aligned}$$

де

$$c(\lambda,0)=\sum_{j=0}^{\infty}(B^{-1}(\lambda)a(\lambda))(j),$$

причому матриця

$$B(\lambda)=K_0(\lambda)\begin{pmatrix}1+\beta^2 & -\beta & 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ -\beta & 1+\beta^2 & -\beta & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & -\beta & 1+\beta^2 & -\beta & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & -\beta & 1+\beta^2 & -\beta & \dots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\beta^2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta & 1+\beta^2\end{pmatrix}_{N\times N},$$

$$K_0(\lambda)=\frac{4\pi^2}{\sigma^4}\left|1-\alpha e^{-i\lambda}\right|^2=\frac{2\pi}{\sigma^2}f_1^{-1}(\lambda),\ N\to\infty .$$

Тоді визначник n-го порядку $\Delta_B=K_0{}^N(\lambda)\dfrac{1-\beta^{2(N+1)}}{1-\beta}$, бо $\Delta_n=\Delta_{n-1}(1+\beta^2)-\beta^2\Delta_{n-2}$.

За формулами Крамера

$$c(\lambda,0)_N=\frac{a(\lambda,0)(1-\beta^{2N})+a(\lambda,1)\beta(1-\beta^{2(N-1)})}{K_0(\lambda)(1-\beta^{2(N+1)})};$$

$$c(\lambda,0)=\lim_{N\to\infty}c(\lambda,0)_N=(a(\lambda,0)+a(\lambda,1)\beta\ )/K_0(\lambda).$$

Спектральна характеристика оптимальної оцінки

$$h(\lambda,\mu)=e^{-i\mu}\beta(a(\lambda,0)+a(\lambda,1)\beta\ )=$$

$$=e^{-i\mu-i\lambda}\beta a(-1,0)+e^{-i\mu}\beta a(0,0)+e^{-i\mu+i\lambda}\beta a(1,0)+e^{-i\lambda-i\mu}\beta^2a(-1,1)+e^{-i\mu}\beta^2a(0,1)+e^{i\lambda-i\mu}\beta^2a(1,1).$$

Шукана оцінка функціонала

$$\hat{A}_+\xi=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}h(\lambda,\mu)Z_\xi(d\lambda,d\mu)=$$

$$=\xi(-1,-1)(\beta a(-1,0)+\beta^2a(-1,1))+\xi(0,-1)(\beta a(0,0)+\beta^2a(0,1))+\xi(1,-1)(\beta a(1,0)+\beta^2a(1,1)).$$

Отже, оцінка залежить не від усіх значень поля в нижній півплощині, а лише від $\xi(-1,-1),\xi(0,-1),\xi(1,-1)$.

Другий спосіб (на підставі теореми 2).

Якщо

$$f(\lambda,\mu)=\frac{\sigma^4}{4\pi^2}\frac{1}{\left|1-\alpha e^{-i\lambda}\right|^2}\frac{1}{\left|\ 1-\beta e^{-i\mu}\ \right|^2},\ |\alpha|<1,|\beta|<1,$$

то

$$d(\lambda,\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sigma}{1-\alpha e^{-i\lambda}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sigma}{1-\beta e^{-i\mu}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sigma}{1-\alpha e^{-i\lambda}}\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}(\beta e^{-i\mu})^k=\sqrt{f_1(\lambda)}d_2(\mu),$$

і оператор $A(\lambda)d$, заданий співвідношенням (3), має вигляд

$$A(\lambda)d=\begin{pmatrix}a(\lambda,0) & a(\lambda,1)\\ a(\lambda,1) & 0\end{pmatrix}\frac{\sigma^2}{2\pi(1-\alpha e^{-i\lambda})}\begin{pmatrix}1\\ \beta\end{pmatrix}=\frac{\sigma^2}{2\pi(1-\alpha e^{-i\lambda})}\begin{pmatrix}a(\lambda,0)+\beta a(\lambda,1)\\ a(\lambda,1)\end{pmatrix}.$$

Звідси

$$r(\lambda,\mu)=\sqrt{f_1(\lambda)}\sum_{j=0}^{\infty}\ (A(\lambda)d_2)(j)e^{ij\mu}=\frac{1}{2\pi}\frac{\sigma}{1-\alpha e^{-i\lambda}}(a(\lambda,0)+\beta a(\lambda,1)+a(\lambda,1)e^{i\mu}).$$

Тоді

$$h(f)=A_+(\lambda,\mu)-r(\lambda,\mu)d_2^{-1}(\mu)=\ a(\lambda,0)+a(\lambda,1)e^{i\mu}-$$

$$-(a(\lambda,0)+\beta a(\lambda,1)+a(\lambda,1)e^{i\mu})(1-\beta e^{-i\mu})=\beta e^{-i\mu}(a(\lambda,0)+\beta a(\lambda,1)).$$

Шукана оцінка функціонала

$$A_+\xi=\xi(-1,-1)(\beta a(-1,0)+\beta^2a(-1,1))+\xi(0,-1)(\beta a(0,0)+\beta^2a(0,1))+\xi(1,-1)(\beta a(1,0)+\beta^2a(1,1)).$$

Отже, результати, отримані цими двома способами, збігаються й узгоджуються з результатами Ю.А. Розанова [1, с. 92, приклад 5.1], А.М. Яглома [3, с. 88-89], які грунтуються на властивостях аналітичних функцій і пошуку спектральної характеристики як функції, що задовольняє певні властивості.

3. МІНІМАКСНІ ОЦІНКИ

Якщо точне значення щільності $f(\lambda,\mu)$ поля $\xi(k,j)$ невідоме, то доцільно знаходити оцінки, які дають найменшу похибку одночасно для всіх щільностей з деякого класу можливих спектральних щільностей D. Такі оцінки називають мінімаксними (робастними). Будемо інтерпретувати задачу знаходження мінімаксної оцінки прогнозування для поля як антагоністичну гру, у якій функціоналом виграшу є середньоквадратичне відхилення $\Delta(f)$, простором стратегій першого гравця, який намагається максимізувати $\Delta(f)$, – множина допустимих спектральних щільностей D, а простором стратегій другого гравця, який намагається мінімізувати $\Delta(f)$, – множина спектральних характеристик H_D оптимальної оцінки функціонала $A\xi$.

Означення 1. Щільність $f_0(\lambda,\mu)\in D_f$ назвемо найменш сприятливою для заданого класу спектральних щільностей D за оптимального лінійного оцінювання функціонала $A\xi$, якщо саме для цих значень класична оптимальна оцінка дає найбільшу похибку

$$\Delta(f_0,g_0)=\Delta(h(f_0,g_0);f_0,g_0)=\max_{f\in D_f}\Delta(h(f,g);f,g).$$

Означення 2. Спектральну характеристику $h^0(\lambda,\mu)$ оптимальної оцінки функціонала $A\xi$ назвемо мінімаксною (робастною), якщо вона мінімізує максимальну похибку для заданої множини спектральних щільностей $D=D_f\times D_g$, тобто якщо виконуються умови

$$h^0(\lambda,\mu)\in H_D=\bigcap_{(f,g)\in D_f\times D_g} L_2^{N-}(f+g),\ \min_{h\in H_D}\max_{(f,g)\in D}\Delta(h;f,g)=\max_{(f,g)\in D}\Delta(h^0;f,g).$$

Назвемо пару функцій (стратегій гравців) сідловою точкою функції гри $\Delta(h;f)$ на множині $H_D\times D$, якщо

$$\Delta(h^0;f_0)\le\Delta(h^0;f_0)\le\Delta(h;f_0),\ \forall h\in H_D,\qquad \forall f\in D_f.$$

Тоді якщо у функції $\Delta(h;f)$ існує сідлова точка $(h^0;f_0)$, то це є необхідною та достатньою умовою, щоби максимін збігався з мінімаксом, тобто

$$\min_{h\in H_D}\max_{f\in D}\Delta(h;f)=\max_{f\in D}\min_{h\in H_D}\Delta(h;f)=\Delta(h^0;f_0).$$

У цьому разі $h^0=h(f_0)$ – це шукана мінімаксна спектральна характеристика, а найменш сприятлива щільність – це $f_0(\lambda,\mu)$. З огляду на це, якщо сідлова точка існує, то нерівності сідлової точки виконуються, коли $h^0=h(f_0),\ h(f_0)\in H_D$, і (h^0,f_0) є розв'язком задачі на умовний екстремум

$$\sup_{f\in D_f\times D_g}\Delta(h(f_0);f,g)=\Delta(h(f_0);f_0),$$

де

$$\Delta(h(f_0);f)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\left|A_+(\lambda,\mu)-h(\lambda,\mu)\right|^2 f(\lambda,\mu))d\lambda d\mu=$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|C(\lambda,\mu)|^2}{f^2{}_0(\lambda,\mu)}f(\lambda,\mu)\,d\lambda\,d\mu\,.$$

Отже, задача про пошук мінімаксу для функції $\Delta(h(f);f)$ зводиться до задачі на умовний супремум функції $\Delta(h(f_0);f)$ на опуклій множині D_f.

Лема 1. Спектральна щільність $f^0(\lambda,\mu)=f_1(\lambda)f_2(\mu)$ найменш сприятлива в D_f за оптимальної лінійної екстраполяції функціонала $A_+\xi$, якщо коефіцієнти Фур'є функції $(f_2^0(\mu))^{-1}$ задають оператор $B^0(\lambda)$, який визначає розв'язок екстремальної задачі:

$$\max_{f\in D_f}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_1(\lambda)\left\langle B^{-1}a(\lambda),\,a(\lambda)\right\rangle d\lambda\,.$$

Мінімаксну спектральну характеристику $h^0=h(f_0)$ можна обчислити за формулою (6), якщо $h(f_0)\in H_D$.

Лема 2. Спектральна щільність однорідного випадкового поля $\xi(k,j)$, яке допускає канонічний розклад рухомого середнього

$$\xi(k,j)=\sum_{u=-\infty}^{\infty}\sum_{v=-\infty}^{j}d^0(k-u,j-v)\gamma(u,v),$$

де $\gamma(u,v)$ – стандартне поле з некорельованими значеннями, буде найменш сприятливою в класі D_f за оптимального лінійного оцінювання функціонала $A_+\xi$, якщо

$$f^0(\lambda,\mu)=\left|d^0(\lambda,\mu)\right|^2,\ d^0(\lambda,\mu)=\sum_{v=0}^{\infty}d^0(\lambda,v)e^{-iv\mu},$$

де $d^0(\lambda)=\{d^0(\lambda,v):v=0,1,...\}$ – розв'язок задачі на умовний екстремум

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\|A_+(\lambda)d(\lambda)\|^2 d\lambda\to\max,\ \ f(\lambda,\mu)=\left|\sum_{v=0}^{\infty}d(\lambda,v)e^{-iv\mu}\right|^2\in D_f.$$

Мінімаксну спектральну характеристику можна обчислити за формулою (4), якщо $h(f_0)\in H_{D_f}$.

Наведена нижче теорема відображає застосування мінімаксного методу до конкретного класу спектральних щільностей D_f^0.

Теорема 3. Нехай $\xi(k,j)$ – однорідне випадкове поле, що має спектральну щільність $f(\lambda,\mu)=f_1(\lambda)f_2(\mu)$, де $f_1(\lambda)$ – фіксована, $\int_{-\pi}^{\pi}f_1(\lambda)d\lambda=P_1^2$, $f_2(\mu)$ задовольняє умову

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{f_2(\mu)}d\mu<\infty$$

та

$$f_2(\mu)\in D_f^0=\left\{f(\mu)\,|\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\mu)\,d\mu\le P_2^{\;2}\right\}.$$

Нехай виконуються умови (2). Тоді найменш сприятливою щільністю в класі D_f^0 за оптимального лінійного оцінювання функціонала $A_+\xi$ за даними спостережень поля $\xi(u,v)$ при $(u,v)\in Z^2\setminus Z_+^2$ буде

$$f(\lambda,\mu)=f_1(\lambda)\left|\sum_{v=0}^{\infty}d^0(v)e^{-iv\mu}\right|^2,$$

де $\vec{d}^{\,0}=\{d^0(v):v=0,1,...\}$; $\sqrt{f_1(\lambda)}\,\vec{d}^{\,0}$ – власний елемент оператора $A(\lambda)$, що відповідає найбільшому власному значенню $v(\lambda)$ і задовольняє умову $\sum_{v=0}^{\infty}\left|d^0(v)\right|^2=P_2^{\;2}$. Спектральну характеристику $h(f)$ оптимальної оцінки функціонала $A_+\xi$ від невідомих значень однорідного поля $\xi(k,j)$ за даними спостережень поля $\xi(u,v)$ при $(u,v)\in Z^2\setminus Z\times Z_+$ можна обчислити за формулою (6), середньоквадратичну похибку $\Delta(f)$ – за формулами (7) або (8).

Приклад 2. Нехай простежується випадкове однорідне поле зі спектральною щільністю $f(\lambda,\mu)=f_1(\lambda)f_2(\mu)$, $f_1(\lambda)$ – фіксована, $\int_{-\pi}^{\pi}f_1(\lambda)d\lambda=P_1^{\;2}$, точне значення щільності $f_2(\mu)$ невідоме, але відомо, що вона належить до класу D_f^0. Тоді для знаходження оптимальної лінійної оцінки невідомого значення функціонала $A\,\xi=\sum_{k=-N}^{N}\sum_{j=0}^{1}a(k,j)\xi(k,j)$ за спостереженнями $\xi(u,v)$, $(u,v)\in Z_2\setminus Z_+$, знайдемо власні значення оператора A_+, розв'язавши систему рівнянь $A(\lambda)\vec{d}=\nu\vec{d}$, де оператор $A(\lambda)$ заданий співвідношенням (2). Систему записують у вигляді

$$\begin{pmatrix}a(\lambda,0) & a(\lambda,1)\\ a(\lambda,1) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d(0)\\ d(1)\end{pmatrix}=\nu\begin{pmatrix}d(0)\\ d(1)\end{pmatrix},$$

де

$$a(\lambda,0)=\sum_{k=-N}^{N}a(-k,0)e^{i\lambda k},a(\lambda,1)=\sum_{k=-N}^{N}a(-k,1)e^{i\lambda k}.$$

Нехай $N=1$, $a(-k,0)=a(-k,1)=1$ для $k=-1,0,1$. Отже,

$$a(\lambda,0)=e^{-i\lambda}+1+e^{i\lambda}=\alpha(\lambda),\;a(\lambda,1)=e^{-i\lambda}+1+e^{i\lambda}=\alpha(\lambda).$$

Тоді характеристичне рівняння має вигляд

$$\begin{vmatrix}a(\lambda)-\nu & a(\lambda)\\ a(\lambda) & -\nu\end{vmatrix}=0.$$

Звідки $\nu^2-a(\lambda)\nu-a(\lambda)^2=0$. Отже, найбільше власне значення

$$\nu_{\max}(\lambda)=\frac{\alpha(\lambda)+\alpha(\lambda)\sqrt{5}}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\alpha(\lambda).$$

Власний елемент, що відповідає найбільшому власному значенню,

$$\vec{d}^{\,0}(\lambda)=\sqrt{f_1(\lambda)}\left\{S;\,S\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right\}.$$

Константу S знайдемо з умови нормування $\|\vec{d}^{\,0}\|^2=\frac{S^2(10+2\sqrt{5})}{4}=P^2$, $S=P\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}$. Звідси

$$\vec{d}^{\,0}(\lambda,\nu)=\sqrt{f_1(\lambda)}P\left\{\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}};\ \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\right\}.$$

Найменш сприятлива щільність

$$f(\lambda,\mu)=\left|\sum_{\nu=0}^{\infty}d^0(\lambda,\nu)e^{-i\nu\mu}\right|^2.$$

Для обчислення мінімаксної спектральної характеристики застосуємо формулу (9).

4. ВИСНОВКИ

Отже, знайдено формули для обчислення середньоквадратичної похибки та спектральної характеристики середньоквадратичної оптимальної лінійної оцінки поля, що має щільність $f(\lambda,\mu)=f_1(\lambda)f_2(\mu)$. Відшукано найменш сприятливі спектральні щільності та мінімаксні (робастні) спектральні характеристики оптимальних оцінок функціонала $A_+\xi$ для деякого класу полів. Надалі доцільно знайти залежність вигляду оптимальної лінійної оцінки поля від геометрії області та застосувати мінімаксний метод до інших множин спектральної невизначеності.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Розанов Ю.А.* Стационарные случайные процессы. М.: Наука, 1990.
2. *Grenander U.* A prediction problem in game theory // Ark. Mat. 1957. Vol. 3. P. 371–379.
3. *Moklyachuk M.P., Shchestyuk N.Yu.* Robust estimates of functionals of homogeneous random fields // Theory of Stochastic Processes. 2004. Vol. 10 (26). No. 1–2. P. 196–209.
4. *Yaglom A.M.* Corelation theory of stationary and related random functions. 1987. Vol. 1: Basic results. SpringerVerlag. 526 p.

EXTRAPOLATION PROBLEM FOR HOMOGENIOUSE RANDOM FIELDS FROM OBSERVATIONS IN HALF – PLANE

N. Shchestuk

Taras Shevchenko National University of Kyiv
Volodymyrska str, 64,. Kiev, 252601, e-mail: Natalyshch@gmail.com

Problem of estimation of a functional $A_+\xi$ on the unknown values of a homogeneous random field $\xi(k,j)$ from observations of the field for $(u,v)\in Z^2\setminus Z\times Z_+$ is investigated. Formulas are proposed for calculation the mean square errors and spectral characteristics of the optimal linear estimate of the field with $f(\lambda,\mu)=f_1(\lambda)f_2(\mu)$. The least favourable spectral densities and the minimax-robust spectral characteristics of the optimal linear estimates of the linear functional $A_+\xi$ are found for same classes of random fields.

Key words: random homogeneous fields, estimate, minimax-robust spectral characteristics.

Стаття надійшла до редколегії 12.09.2006
Прийнята до друку 06.06.2007