

1.4 ОПТИМІЗАЦІЯ ПОРТФЕЛЯ ІНСТРУМЕНТІВ З ФІКСОВАНОЮ ДОХОДНІСТЮ З ЗАДАНИМ ГОРИЗОНТОМ ІНВЕСТИВАННЯ

Пенцак Є.Я.

The problem of optimal immunization of portfolio with fixed income securities is analyzed in this paper. It was shown that taken into account a real structure of shocks of interest rates it is possible to find immunized portfolio without short positions when the term structure of interest rates is modelled via Nelson-Siegel family of functions.

Вступ. Відомо, що інструменти з фіксованою доходністю складають понад 90% інвестиційних портфелів корпоративних та державних пенсійних фондів. З початком глобальної фінансової рецесії у 2008 році доходність інструментів з фіксованою доходністю стрімко впала після запуску ФРС США програм кількісного пом'якшення. Оскільки пенсійні фонди мають фінансові зобов'язання перед своїми вкладниками у вигляді регулярних платежів, індексованих на рівень інфляції, то проблема управління портфелем інструментів з фіксованою доходністю є надзвичайно актуальною у сучасну епоху, що характеризується надзвичайно низькими, а деколи й від'ємними, процентними ставками. Приватні інвестори, що здійснюють інвестиції з фіксованим горизонтом інвестування в нерухомість, освіту дітей чи здійснюють пенсійні приватні заощадження, також зіткнулись з проблемою ефективного управління портфелем інструментів з фіксованою доходністю. Крива процентних ставок зазнає значних коливань від стимулюючої монетарної політики центральних банків багатьох країн. Дуже важливо для інвестора вміти динамічно захищати майбутню вартість свого інвестиційного портфеля в залежності від характеристик ризиковості глобального бізнес-середовища. Потрібно уміло формувати інвестиційний портфель інструментів з різними термінами до погашення, враховуючи власний горизонт інвестування. У даній роботі розглядаються прикладні моделі оптимальної імунізації портфелів інструментів з фіксованою доходністю з врахуванням різноманітних шоків кривої доходності, що виражаються з допомогою поліноміальної структури процентних ставок або описуються сім'єю функцій Нельсона-Сігела.

Аналіз останніх досліджень. Перші дослідження щодо ефективного управління портфелем облігацій починаються з фундаментальної роботи

Маколея [1], де автор вводить поняття дюрації, D , як основного інструменту управління ризиками портфеля облігацій:

$$D = \frac{1}{P} \sum_{t=1}^T \frac{t \cdot CF_t}{(1+k)^t} \quad (1)$$

У формулі (1) CF_t - грошовий потік у момент часу t , P - ринкова вартість бондового портфеля, а k - плоска структура процентних ставок. Головна ідея управління інвестиційним портфелем з інструментів з фіксованою доходністю полягала в тому, щоб знайти такі вагові коефіцієнти портфеля w_i , для яких модифікована дюрація портфеля

$$D_m = \frac{D_p}{1+k}, \quad (2)$$

де $D_p = \sum_{i=1}^n w_i \cdot D_i$, співпадала б з горизонтом інвестування інвестора.

Потім дослідникам вдалось апроксимувати спот-структуру процентних ставок у вигляді кривих, що описувались многочленами та іншими функціональними залежностями (див. [2], [3], [4]). У цьому випадку було використано концепцію дюрації Фішера-Вейла:

$$D_{FW} = \sum_{t=1}^T \frac{t \cdot PV(CF_t)}{P} = \frac{1}{P} \sum_{t=1}^T \frac{CF_t}{(1+R_{0,t})^t} \times t, \quad (3)$$

де $R_{0,t}$ - це спот структура процентних ставок [5]. Згодом поряд з дюрацією для підвищення ефективності управління портфелем бондів було введено поняття конвексності портфеля облігацій

$$C_p = \sum_{i=1}^n w_i \cdot C_i, \quad (4)$$

де конвексність бонду визначається з формули

$$C = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{P} \cdot \frac{1}{(1+k)^2} \sum_{t=1}^T \frac{t \cdot (t+1) \cdot CF_t}{(1+k)^t} \quad (5)$$

У роботі [6] описується ефективна методика управління облігаційним портфелем з допомогою використання узагальненої дюрації та узагальненої конвексності при умові поліноміальної структури процентних ставок. Повний огляд методів управління портфелями інструментів з фіксованою доходністю можна знайти в роботах [7] та [8].

Постановка задачі. Основним недоліком сучасних методів управління бондовим портфелем є припущення щодо того, що такий ринок є ліквідним, що таких інструментів на ринку є достатньо багато, а також припущення щодо великого обсягу інвестицій у інструменти фіксованої доходності. Було також встановлено, що для широкого класу функцій, що

описують криві процентних ставок, оптимальний інвестиційний портфель повинен містити короткі позиції [6], [9], [10]. Проте на практиці такі припущення не виконуються для маленьких інвесторів, які періодично докуповують інструменти з фіксованою доходністю до свого інвестиційного портфеля, імунізуючи його майбутню вартість від коливань кривої процентних ставок. А тому у даній роботі ми розглянемо проблему формування імунізованого інвестиційного портфеля з інструментів фіксованої доходності з фіксованим горизонтом інвестування, коли потрібно даний інвестиційний портфель доповнити новими інструментами, які доступні інвестору у даний момент на ринку. Дану проблему ми вирішимо методами чисельної оптимізації та симуляцій при заданій структурі портфеля, заданій кривій процентних ставок та різних типах комбінованих шоків, яких може зазнавати ця крива.

Результати досліджень.

1. Моделювання кривої процентних ставок. Для моделювання кривої процентних ставок розглянемо дві найбільш вживані сім'ї функцій.

1) Многочлен третього степеня

$$p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 \times t + \alpha_2 \times t^2 + \alpha_3 \times t^3, \quad (6)$$

де t – змінна, що визначає час (в роках), а $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – параметри, що визначають відповідну криву процентних ставок.

2) Сім'я функцій Нельсона-Сігела, що визначає наступну форвардну часову структуру процентних ставок:

$$f_1(t) = \beta_1 + \beta_2 \times e^{-\lambda t} + \beta_3 \times \lambda \times t \times e^{-\lambda t} \quad (7)$$

де t – час, а $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \lambda$ – параметри, що характеризують форму відповідної кривої форвардних ставок. Відповідну до (7) спот-структуру процентних ставок можна визначити з допомогою формули:

$$F_1(t) = \beta_1 + \beta_2 \times \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda t} + \beta_3 \times \left(\frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda t} - e^{-\lambda t} \right) \quad (8)$$

Нехай непараметрично оцінена з ринку державних облігацій крива процентних ставок задана з допомогою Таблиці 1.

Таблиця 1

t, роки	1/12	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R	0,01	0,02	0,028	0,032	0,0345	0,0345	0,0356	0,0368	0,038	0,039	0,0395

У результаті калібрування з допомогою моделей (6) та (8) методами чисельної оптимізації було отримано наступний результат:

Модель 1): $\alpha_0 = 0,009643$, $\alpha_1 = 0,01181$, $\alpha_2 = -0,001751$, $\alpha_3 = 0,00009$.

Модель 2): $\beta_1 = 0,04239$, $\beta_2 = -0,03393$, $\beta_3 = 0,001199$, $\lambda = 0,9368$.

2. Моделювання шоків кривої процентних ставок.

2.1. Моделювання шоків коливань кривої процентних ставок (6).

Оскільки крива (6) характеризується параметрами α_0 , α_1 , α_2 , α_3 , то задамо наступні допустимі діапазони їх зміни:

$$0,009643 - 0,005 \leq \alpha_0 \leq 0,009643 + 0,005,$$

$$0,01181 - 0,001 \leq \alpha_1 \leq 0,01181 + 0,001,$$

$$-0,001751 - 0,00025 \leq \alpha_2 \leq -0,001751 + 0,00025,$$

$0,00009 - 0,00025 \leq \alpha_3 \leq 0,00009 + 0,00025$. Проілюструємо ці допустимі шоки графічно на Рис. 1-4.

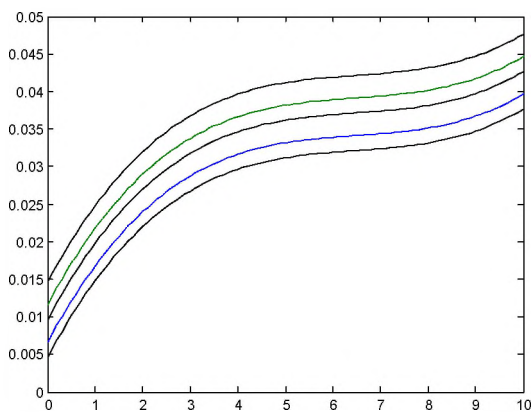


Рисунок 1 – Моделювання шоку кривої процентних ставок за допомогою параметра α_0

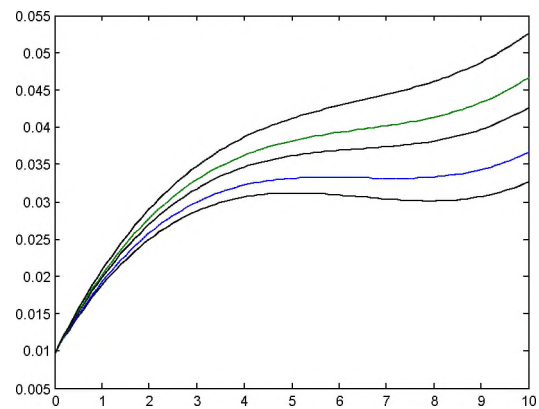


Рисунок 2 – Моделювання шоку кривої процентних ставок за допомогою параметра α_1

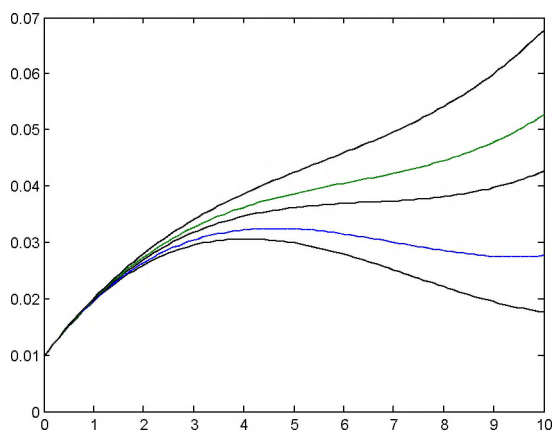


Рисунок 3 – Моделювання шоку кривої процентних ставок за допомогою параметра α_2

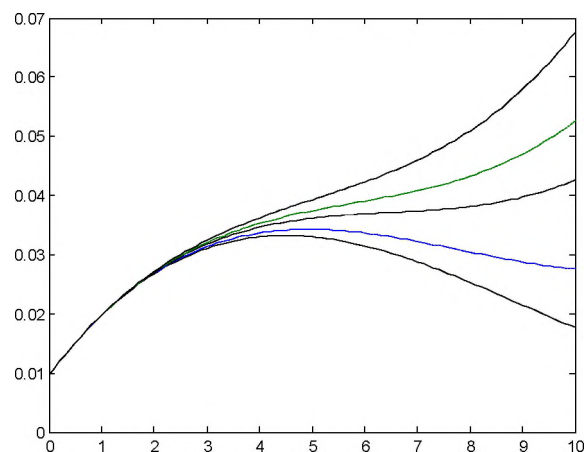


Рисунок 4 – Моделювання шоку кривої процентних ставок за допомогою параметра α_3

2.2 Моделювання шоків коливань кривої процентних ставок (8).

Оскільки крива (8) характеризується параметрами $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \lambda$, то задамо допустимі діапазони їх зміни: $0,04239 - 0,005 \leq \beta_1 \leq 0,04239 + 0,005$,
 $-0,03393 - 0,01 \leq \beta_2 \leq -0,03393 + 0,01$,
 $0,001199 - 0,01 \leq \beta_3 \leq 0,001199 + 0,01$, $0,9368 - 0,5 \leq \lambda \leq 0,9368 + 0,5$.
 Проілюструємо ці допустимі шоки графічно на Рис. 5-8.

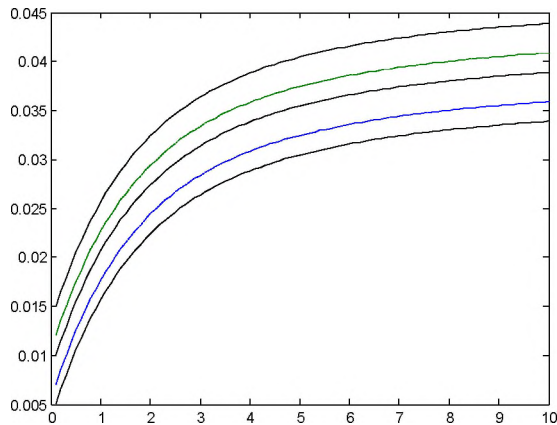


Рисунок 5 – Моделювання шоку кривої процентних ставок за допомогою параметра β_1

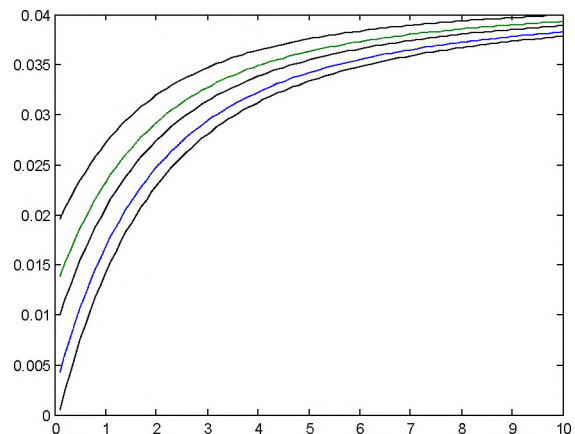


Рисунок 6 – Моделювання шоку кривої процентних ставок за допомогою параметра β_2

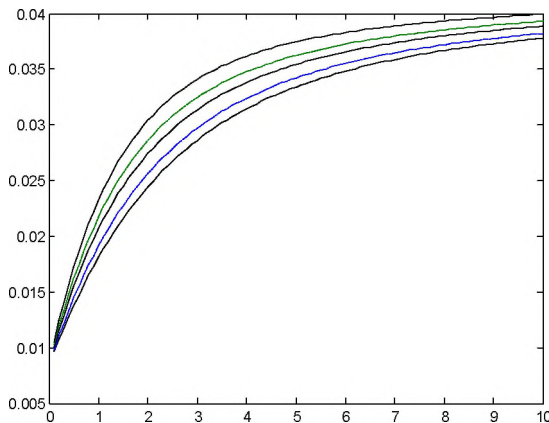


Рисунок 7 – Моделювання шоку кривої процентних ставок за допомогою параметра β_3

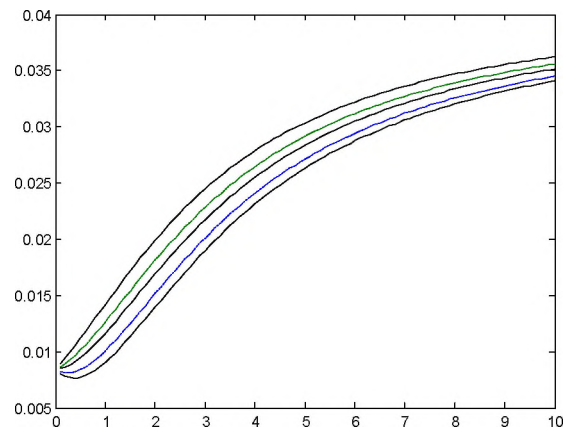


Рисунок 8 – Моделювання шоку кривої процентних ставок за допомогою параметра λ_1

3. Припущення щодо композиції портфеля з інструментів з фіксованою доходністю та інвестиційних можливостей.

Припустимо, що інвестор володіє правом отримання грошових потоків $CF = (CF_1, CF_2, \dots, CF_{10}) = (100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000)$.

На даний момент $t = 0$ структура процентних ставок визначається з допомогою значень, наведених у Таблиці 1. Припустимо, що на ринку доступні три інструменти з фіксованою доходністю, а саме облігації з такими структурами грошових потоків:

$$B_1 = (10, 10, 110), B_2 = (10, 10, 10, 10, 10, 110),$$

$$B_3 = (10, 10, 10, 10, 10, 10, 110).$$

Нехай горизонт інвестування інвестора складає $H = 6,5$ років. Припустимо, що ін-вестор має на даний момент доступними для інвестування додатково $I = 500$ у.о. Інвестор приймає рішення щодо того, як розмістити 500 у.о. серед трьох інвестиційних альтернатив B_1, B_2, B_3 , захистивши майбутню вартість портфеля інструментів з фіксованою доходністю на горизонті інвестування $H=6,5$ років. Нехай w_0, w_1, w_2, w_3 – ваги інвестицій у існуючий портфель інструментів з фіксованою доходністю та в бонди B_1, B_2, B_3 , відповідно.

3.1 Знаходження ринкової вартості інвестиційного портфеля та його дюрації Фішера-Вейла у припущенні поліноміальної структури процентних ставок.

Знайдемо ринкову вартість грошових потоків інвестора та облігацій B_1, B_2, B_3 у відповідності до заданої структури процентних ставок (6):

$$PV(CF) = \sum_{t=1}^{10} CF_t \times \exp(-R(t) \times t) = 4217,5;$$

$$PV(B_1) = \sum_{t=1}^{10} B_{1t} \times \exp(-R(t) \times t) = 119,29;$$

$$PV(B_2) = \sum_{t=1}^{10} B_{2t} \times \exp(-R(t) \times t) = 133,57;$$

$$PV(B_3) = \sum_{t=1}^{10} B_{3t} \times \exp(-R(t) \times t) = 142,21.$$

Знайдемо дюрацію Фішера-Вейла для існуючого грошового потоку інвестора:

$$D(CF) = \frac{1}{PV(CF)} \times \sum_{t=1}^{10} CF_t \times \exp(-R(t) \times t) \times t = 6,72;$$

а також дюрації наявних інвестиційних альтернатив

$$D(B_1) = \frac{1}{PV(B_1)} \times \sum_{t=1}^{10} B_{1t} \times \exp(-R(t) \times t) \times t = 2,76;$$

$$D(B_2) = \frac{1}{PV(B_2)} \times \sum_{t=1}^{10} B_{2t} \times \exp(-R(t) \times t) \times t = 4,95;$$

$$D(B_3) = \frac{1}{PV(B_3)} \times \sum_{t=1}^{10} B_{3t} \times \exp(-R(t) \times t) \times t = 6,21.$$

Отже, разом приведена вартість капіталу інвестора складає $4217,5 + 500 = 4717,5$ у.о. Оскільки $w_0 = \frac{4217,5}{4717,5} = 0,894$, то $w_1 + w_2 + w_3 = 0,106$.

Знайдемо дюрацію Фішера-Вейла інвестиційного портфеля і порівняємо її до горизонту інвестування:

$$w_0 \times D_0 + w_1 \times D_1 + w_2 \times D_2 + w_3 \times D_3 = H$$

або $0,894 \times 6,72 + w_1 \times 2,76 + w_2 \times 4,95 + w_3 \times 6,21 = 6,5$, тобто

$$w_1 \times 2,76 + w_2 \times 4,95 + w_3 \times 6,21 = 0,492.$$

Розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} w_1 + w_2 + w_3 = 0,106 \\ w_1 \times 2,76 + w_2 \times 4,95 + w_3 \times 6,21 = 0,492 \end{cases}$$

відносно w_1 , ми отримаємо: $w_2 = 0,132 - 2,738 \times w_1$,
 $w_3 = -0,026 + 1,738 \times w_1$. Якщо $0,015 \leq w_1 \leq 0,048$, то $w_2 \geq 0$ і $w_3 \geq 0$.

3.2 Знаходження ринкової вартості інвестиційного портфеля та його дюрації Фішера-Вейла у припущенні структури процентних ставок Нельсона-Сігела.

Знайдемо ринкову вартість грошових потоків інвестора та облігацій B_1, B_2, B_3 у відповідності до заданої структури процентних ставок (8):

$$PV(CF) = \sum_{t=1}^{10} CF_t \times \exp(-R(t) \times t) = 4253,3;$$

$$PV(B_1) = \sum_{t=1}^{10} B_{1t} \times \exp(-R(t) \times t) = 119,38;$$

$$PV(B_2) = \sum_{t=1}^{10} B_{2t} \times \exp(-R(t) \times t) = 133,79;$$

$$PV(B_3) = \sum_{t=1}^{10} B_{3t} \times \exp(-R(t) \times t) = 142,35.$$

Знайдемо дюрацію Фішера-Вейла для існуючого грошового потоку інвестора:

$$D(CF) = \frac{1}{PV(CF)} \times \sum_{t=1}^{10} CF_t \times \exp(-R(t) \times t) \times t = 6,742;$$

а також дюрації наявних інвестиційних альтернатив

$$D(B_1) = \frac{1}{PV(B_1)} \times \sum_{t=1}^{10} B_{1t} \times \exp(-R(t) \times t) \times t = 2,757;$$

$$D(B_2) = \frac{1}{PV(B_2)} \times \sum_{t=1}^{10} B_{2t} \times \exp(-R(t) \times t) \times t = 4,954;$$

$$D(B_3) = \frac{1}{PV(B_3)} \times \sum_{t=1}^{10} B_{3t} \times \exp(-R(t) \times t) \times t = 6,211.$$

Отже, разом приведена вартість капіталу інвестора складає $4253,3 + 500 = 4753,3$ у.о. Оскільки $w_0 = \frac{4253,3}{4753,3} = 0,895$, то $w_1 + w_2 + w_3 = 0,105$.

Знайдемо дюрацію Фішера-Вейла інвестиційного портфеля і порівняємо її до горизонту інвестування:

$$w_0 \times D_0 + w_1 \times D_1 + w_2 \times D_2 + w_3 \times D_3 = H$$

або $0,895 \times 6,742 + w_1 \times 2,757 + w_2 \times 4,954 + w_3 \times 6,211 = 6,5$, тобто

$$w_1 \times 2,757 + w_2 \times 4,954 + w_3 \times 6,211 = 0,473.$$

Розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} w_1 + w_2 + w_3 = 0,105 \\ w_1 \times 2,757 + w_2 \times 4,954 + w_3 \times 6,211 = 0,473 \end{cases}$$

відносно w_1 , ми отримаємо: $w_2 = 0,1475 - 2,748 \times w_1$,
 $w_3 = -0,0415 + 1,748 \times w_1$. Якщо $0,024 \leq w_1 \leq 0,054$, то $w_2 \geq 0$ і $w_3 \geq 0$.

4. Знаходження оптимізованого імунізованого портфеля.

Нам потрібно знайти такі значення вагового коефіцієнта w_1 , щоб майбутнє значення інвестиційного портфеля $FV = (PV(CF) + I) \times \exp(R(H) \times H)$ було захищене від коливань кривої процентних ставок, заданих з допомогою моделі (6) та (8). Проілюструємо графічно, як впливає ваговий коефіцієнт w_1 (0.02, 0.03, 0.04, 0.05) на майбутню вартість інвестиційного портфеля в залежності від вертикальних шоків кривої процентних ставок.

4.1 Імунізація портфеля з фіксованою доходністю від паралельних вертикальних коливань кривої процентних ставок (6).

Нехай $w_1 = 0,02:0,01:0,05$, і розглянемо значення майбутньої вартості інвестиційного портфеля в залежності від коливань кривої процентних ставок, описаних у пункті 2.1 з допомогою коефіцієнта α_0 .

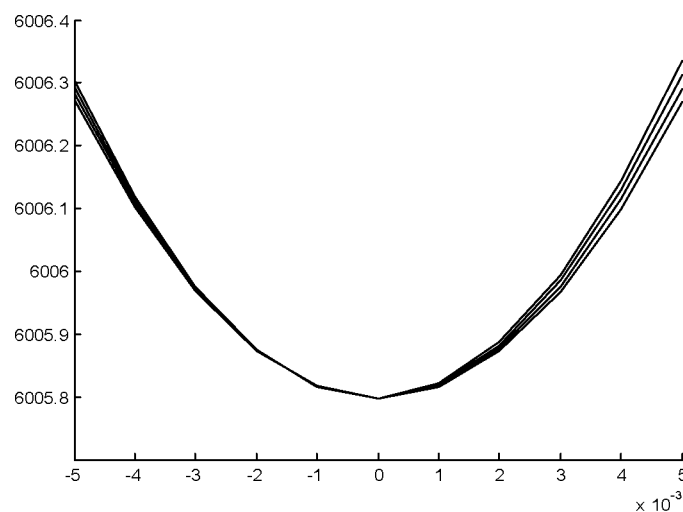


Рисунок 9 – Майбутня вартість інвестиційного портфеля в залежності від зміни коефіцієнта $0,009643 - 0,005 \leq \alpha_0 \leq 0,009643 + 0,005$ та різних значень

$$w_1 = 0,02:0,01:0,05.$$

Ми бачимо, що побудований інвестиційний портфель має добре імунізовану майбутню вартість портфеля при паралельних коливаннях кривої процентних ставок, описаних з допомогою моделі (6). Можна також показати, що побудовані інвестиційні портфелі не захищають інвестора від зміни процентних ставок, що описуються з допомогою коефіцієнтів $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Цей факт підтверджує теоретичні дослідження щодо того, що оптимально імунізований портфель повинен містити короткі позиції, коли

структура процентних ставок виражається з допомогою поліноміальної структури (див. [6]).

4.2 Імунізація портфеля з фіксованою доходністю від паралельних вертикальних коливань кривої процентних ставок (8).

Нехай $w_1 = 0,02:0,01:0,06$, і розглянемо значення майбутньої вартості інвестиційного портфеля в залежності від коливань кривої процентних ставок, описаних у пункті 2.2 з допомогою коефіцієнта β_1 .

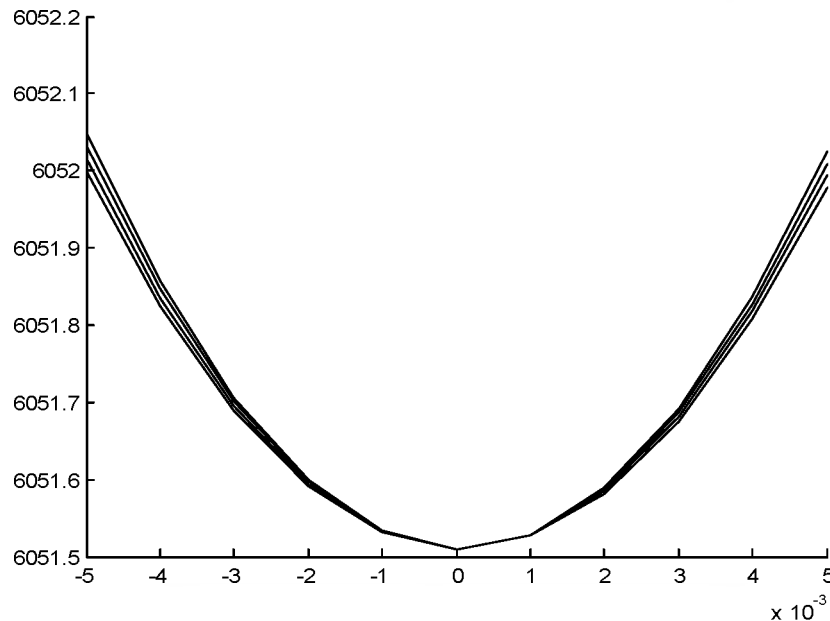


Рисунок 10 – Майбутня вартість інвестиційного портфеля в залежності від зміни коефіцієнта $0,04239 - 0,005 \leq \beta_1 \leq 0,04239 + 0,005$ та різних значень $w_1 = 0,02:0,01:0,06$.

Ми бачимо, що побудований інвестиційний портфель має добре імунізовану майбутню вартість портфеля при паралельних коливаннях кривої процентних ставок, описаних з допомогою моделі (6). Можна також показати, що побудовані інвестиційні портфелі не захищають інвестора від зміни процентних ставок, що описуються з допомогою коефіцієнтів $\beta_2, \beta_3, \lambda$. Цей факт підтверджує теоретичні дослідження щодо того, що оптимально імунізований портфель повинен містити короткі позиції, коли структура процентних ставок виражається з допомогою структури процентних ставок Нельсона-Сігела (див. [9, 10]).

5. Оцінювання ризиків імунізованого портфеля з допомогою симулятивного аналізу.

У роботі [2] було встановлено, що здебільшого коливання кривої процентних ставок можна пояснити з допомогою трьох-чотирьох факторів. Фа-

ктор зміни рівня пояснює приблизно 89,5% коливань цієї кривої, що пояснює важливість концепції дюрації Маколея. Інші ж фактори дозволяють вдосконалити аналіз і зробити хеджування більш ефективним. Ці фактори здебільшого відповідають основним макроекономічним показникам (рівень інфляції, безробіття, ціни на нафту тощо). На статистичному рівні відшукування факторів проводиться з допомогою факторного аналізу. Інтерпретація ж факторів є окремим складним завданням, що стоїть перед фінансовими аналітиками і зараз. Факторний аналіз не тільки дозволяє встановити некорельовані фактори, але й оцінює чутливість до них кривої процентних ставок.

Ми ж згенеруємо шоки кривої процентних ставок, в основі яких на 90% буде її паралельний зсув, а решта незалежних шоків, що виражаються іншими коефіцієнтами кривої процентних ставок, будуть мати меншу амплітуду. Здійснивши симулятивний аналіз майбутньої вартості портфеля при різних симуляціях кривої процентних ставок, ми можемо оцінити ефективність імунізації портфеля на основі дюрації.

Оцінимо майбутню вартість імунізованого портфеля з допомогою симулятивного аналізу при використанні моделі процентних ставок (8). У результаті непараметричної оцінки отримаємо функцію щільності розподілу, зображену на рис. 11.

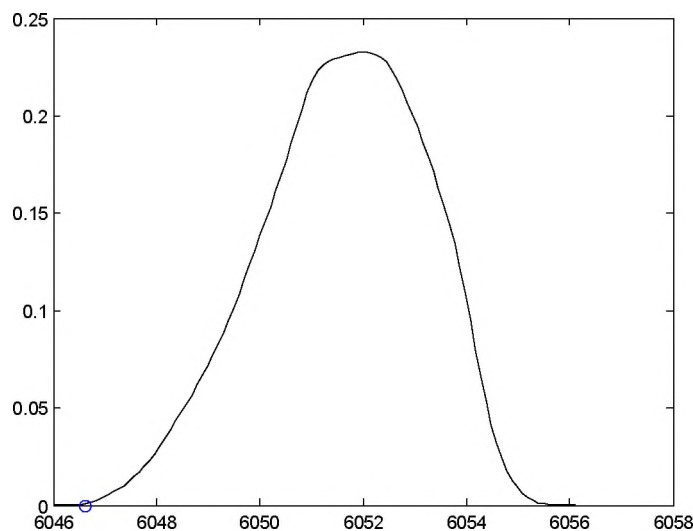


Рисунок 11 – Функція щільності майбутньої вартості портфеля при моделюванні шоків кривої процентних ставок з допомогою функцій Нельсона-Сігела

На рис. 11 кружечком позначено майбутню вартість портфеля при заданій структурі процентних ставок. Отже, побудований інвестиційний

портфель з інструментів з фіксованою доходністю є добре імунізованим від шоків кривої процентних ставок, коли основою для таких шоків є її паралельний зсув. Більше того, побудований інвестиційний портфель не містить коротких позицій, як у випадку використання концепції узагальненої дюрації (див. [6], [9], [10]).

Висновок. У даній роботі показано практичний алгоритм побудови імунізованого портфеля інструментів з фіксованою доходністю, що не містить коротких позицій і добре захищає його майбутню вартість у достатньо широкому діапазоні коливань кривої процентних ставок, коли основу таких коливань складають паралельні зсуви.

Література

1. Macaulay F. Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields, and Stock Prices in the U.S. since 1856 // New York, National Bureau of Economic Research. – 1938.
2. Bliss R. Movements in the term structure of interest rates / Federal Reserve Bank of Atlanta, Economic Review, 1997, p. 16 – 33.
3. Diebold F.X., Li C. Forecasting the term structure of government bond yields / Journal of Econometrics, Vol. 130, 2006, p. 337 – 364.
4. Deaves R., Parlar M. A generalized bootstrap method to determine the yield curve / Applied Mathematical Finance, Vol. 7, 2000, p. 257 – 270.
5. Fisher L., Weil R. 1971, Coping With the Risk of Market-Rate Fluctuations: Returns to Bondholders from naïve and Optimal Strategies, Journal of Business, October. – 1971, pp. 408-431.
6. De La Grandville O. Immunization of bond portfolios: some new results / FAME Reasearch Paper N^o40, 2002, p. 1 – 70.
7. Bierwag G. Duration Analysis: Managing Interest Rate Risk, Cambridge, Mass., Harper & Row. – 1987.
8. Fabozzi F., Martinelli L., Priaulet P. Advanced Bond Portfolio Management. Best practices in Modelling and Strategies. John Willey & Sons, Inc. – 2006, 558 p.
9. Pentsak Y. Bond portfolio management with Nielson-Sigel family of functions. Doctoral workshop, FAME program, Switzerland, 2004.
10. В. І. Єлейко, Є. Я. Пенцак Використання узагальненої дюрації та конвексності для управління портфелем облігацій // Соц.-екон. дослідж. в перехід. період. – 2007. – Вип. 2. – с. 492-496.