УДК 004.42:510.69

Нікітченко М. С., Шкільняк С. С.

ПЕРШОПОРЯДКОВІ ЛОГІКИ ІЗ КВАЗІАРНИМИ ТА *n*-АРНИМИ ПРЕДИКАТАМИ

Запропоновано новий клас програмно-орієнтованих логічних формалізмів – чисті першопорядкові логіки із квазіарними та n-арними предикатами. Такі формалізми є синтезом класичних першопорядкових логік і композиційно-номінативних логік квазіарних предикатів. Розглянуто семантичні моделі та мови і досліджено семантичні властивості пропонованих логік. Встановлено зв'язок між n-арними та X-арними предикатами, описано нормальні форми. Досліджено відношення логічного наслідку, наведено властивості цих відношень для арних атомарних формул.

Ключові слова: логіка, квазіарний предикат, *n*-арний предикат, логічний наслідок.

Апарат математичної логіки є необхідним інструментом для створення надійних і ефективних програмних систем (див., напр., [6]). Для цього зазвичай використовують класичну логіку предикатів. Проте класична логіка має [3; 4] низку принципових обмежень, які ускладнюють її використання. Тому на перший план висувається проблема побудови нових, програмно-орієнтованих логічних формалізмів. Важливим їхнім класом є композиційно-номінативні логіки часткових предикатів (КНЛ), які будуються на основі спільного для логіки й програмування композиційно-номінативного підходу.

У цій роботі запропоновано новий клас програмно-орієнтованих логічних формалізмів – чисті першопорядкові логіки із квазіарними та базовими *n*-арними предикатами. Вони є синтезом першопорядкових класичних логік [2] та КНЛ квазіарних предикатів, назвемо їх PFLQA (Pure First-order Logics with Quasi-ary and *n*-Ary predicates). Описано семантичні моделі та мови таких логік, особливу увагу приділено вивченню відношень логічного наслідку. Наведено властивості цих відношень, пов'язані з арними атомарними формулами.

Поняття, які в цій статті не визначені, тлумачимо в сенсі [3–5].

1. Квазіарні, *n*-арні, *X*-арні предикати та їхні композиції

У першопорядкових логіках предикати задаються на іменних множинах – множинах пар, перша компонента яких – ім'я, а друга – значення цього імені.

V-*A*-іменна множина (*V*-*A*-ІМ) – це часткова однозначна функція $d : V \to A$. Тут V і A – множини предметних імен і предметних значень. *V*-*A*-ІМ подаємо як $[v_1 \mapsto a_1,...,v_n \mapsto a_n]$, де $v_i \in V$, $a_i \in A$, $v_i \neq v_j$ при $i \neq j$. Клас всіх *V*-*A*-ІМ позначимо ${}^VA$.

Функцію $asn: {}^VA \longrightarrow 2^V$ задамо так: $asn(d) = \{v \in V \mid v \mapsto a \in d$ для деякого $a \in A\}$.

Операції $\|X$, $\|_{-x}$, ∇ визначаємо так (тут $X \subseteq V$, $x \in V$): $d\|X = [v \mapsto a \in d \mid v \in X]$;

$$d\|_{-x} = [v \mapsto a \in d \mid v \neq x];$$

$$d \nabla h = [h \cup v \mapsto a \in d \mid v \notin asn(h)].$$

Задамо параметричну операцію реномінації

$$\mathrm{r}_{x_1,...,x_n}^{v_1,...,v_n} : {}^VA \longrightarrow {}^VA, \text{ де усі } v_i, x_i \in V:$$

$$\mathrm{r}_{x_1,...,x_n}^{v_1,...,v_n}(d) = d \nabla [v_1 \mapsto d(x_1),...,v_n \mapsto d(x_n)].$$

Скорочено пишемо $\overline{y}$ замість $y_1,..., y_n$. Тоді замість $\mathrm{r}_{x_1,...,x_n}^{v_1,...,v_n}$ пишемо $\mathrm{r}_{\overline{x}}^{\overline{v}}$.

Під *квазіарним V-A-предикатом* розуміємо довільну часткову функцію вигляду $P: {}^VA \longrightarrow \{T, F\}$, де $\{T, F\}$ – множина істиннісних значень.

Далі в роботі розглядаємо *однозначні* квазіарні *V*-*A*-предикати. Клас цих предикатів позначимо PrP_A^V. Неоднозначні предикати розглянуто в [4; 5; 7].

Область істинності та *область хибності* предиката $P: {}^VA \longrightarrow \{T, F\}$ – це

$$T(P) = \{d \in {}^VA \mid P(d) = T\}$$

$$\text{та } F(P) = \{d \in {}^VA \mid P(d) = F\}.$$

Далі пишемо: $P(d)\downarrow$, якщо $P(d)$ визначене; $P(d)\uparrow$, якщо $P(d)$ невизначене.

Квазіарний *V*-*A*-предикат P тотальний, якщо $T(P) \cup F(P) = {}^VA$.

Предикат вигляду $P : A^X \longrightarrow \{T, F\}$, де $X \subseteq V$, назвемо *X*-арним.

X-арний предикат назвемо тотальним, якщо $T(P) \cup F(P) = A^X$.

Предикат P *виконуваний*, якщо $T(P) \neq \varnothing$.

Предикат P *неспростовний* (частково істинний), якщо $F(P) = \varnothing$.

Предикат P *еквітонний*, якщо з умови $P(d)\downarrow$ і $d \subseteq d'$ випливає $P(d')\downarrow = P(d)$.

Клас еквітонних квазіарних V-A-предикатів позначимо $PrPE_A^V$.

Предметне ім'я (змінна) $z \in V$ (строго) *неістотне* для предиката P, якщо для всіх $d_1, d_2 \in {}^V\!A$ таких, що $d_1 \|_{-x} = d_2 \|_{-x}$, маємо $P(d_1) = P(d_2)$.

Кожний X-арний предикат можна розширити до еквітонного квазіарного, для якого неістотними є усі $z \in V \backslash X$. Тому надалі *X-арними предикатами* будемо називати еквітонні квазіарні предикати, для яких усі $z \in V \backslash X$ є неістотними.

Еквітонний предикат $Q : {}^V\!A \longrightarrow \{T, F\}$ назвемо *тотальним X-арним*, якщо: для Q неістотними є усі $z \in V \backslash X$, причому $Q(d)\downarrow$ для кожного $d \in A^X$.

Надалі обмежимось розглядом *тотальних X*-арних предикатів.

Множину X назвемо арністю X-арного предиката P та позначаємо $ar(P)$.

Клас тотальних X-арних V-A-предикатів (X фіксована) позначимо Pra_A^X.

Клас $\bigcup_{X \text{ скінченне} \subseteq V} Pra_A^X$ усіх тотальних X-арних предикатів позначимо Pra_A^V.

Традиційні n-арні предикати [1; 3] вигляду $P : A^n \longrightarrow \{T, F\}$ можна трактувати як $\{1,..., n\}$-арні. Тому під *n-арними предикатами* розуміємо тотальні $\{1,..., n\}$-арні з умовою невизначеності на всіх $d \in A^k$, $k<n$. Отже, для n-арного предиката P виконуються такі умови (надалі ІМ $[1 \mapsto a_1,...,n \mapsto a_n]$ позначаємо $(a_1,..., a_n)$):

– $P(d) = P(d \| \{1,..., n\})$ для всіх $d \in {}^V\!A$,

– $P(a_1,..., a_n)\downarrow$ для всіх $a_1,..., a_n \in A$,

– $P(a_1,…, a_n,…, a_m)\downarrow = P(a_1,..., a_n)$ для кожного $(a_1,…, a_n,…, a_m) \in A^m$,

– $P(a_1,..., a_k)\uparrow$ для кожного $(a_1,..., a_k) \in A^k$, де $k<n$.

Опишемо композиції предикатів. За базові *пропозиційні* композиції беремо $\neg$ та $\vee$, задамо їх областями істинності й хибності предикатів $\neg P$ та $P \vee Q$:

$$T(\neg P) = F(P); \qquad F(\neg P) = T(P);$$
$$T(P \vee Q) = T(P) \cup T(Q); \qquad F(P \vee Q) = F(P) \cap F(Q).$$

Композицію *реномінації* $R_{\bar{x}}^{\bar{v}} : PrP_A^V \to PrP_A^V$ задамо так: $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)(d) = P(r_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d))$.

Композицію *квантифікації* $\exists x : PrP_A^V \to PrP_A^V$ беремо за базову, задамо її так:

$T(\exists x P) = \{d \in {}^V\!A \mid P(d \nabla x \mapsto a) = T$ для деякого $a \in A\}$;

$F(\exists x P) = \{d \in {}^V\!A \mid P(d \nabla x \mapsto a) = F$ для всіх $a \in A\}$.

Композиції $\neg, \vee, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x$ – це базові композиції чистих першопорядкових логік квазіарних предикатів та базові композиції PFLQA.

Похідні композиції квазіарних предикатів $\to, \&, \leftrightarrow, \forall x$ описано в [3; 4].

Композиційну алгебру $QP_A^V = (PrP_A^V, CQ)$, де $CQ = \{\neg, \vee, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x\}$, назвемо *чистою першопорядковою алгеброю* (однозначних) квазіарних предикатів.

Клас $PrPE_A^V$ замкнений [3; 4] відносно $\neg, \vee, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$.

Кожний тотальний X-арний предикат Q^X індукує n-арні вигляду $Q^n_{(x_1,...,x_n)}$, де $X = \{x_1,..., x_n\}$. Ці предикати задаються так: $Q^n_{(x_1,...,x_n)} = R^{x_1,...,x_n}_{1,\,...,\,n}(Q^X)$. Справді, маємо:

$$Q^n_{(x_1,...,x_n)}(a_1,...,a_n) = R^{x_1,...,x_n}_{1,\,...,\,n}(Q^X)(a_1,...,a_n) =$$
$$= Q^X(r^{x_1,...,x_n}_{1,\,...,\,n}([1 \mapsto a_1,...,n \mapsto a_n])) =$$
$$= Q^X([1 \mapsto a_1,...,n \mapsto a_n] \nabla [x_1 \mapsto a_1,...,x_n \mapsto a_n]) =$$
$$= Q^X([x_1 \mapsto a_1,...,x_n \mapsto a_n]).$$

Кожний n-арний предикат Q^n індукує тотальні $\{x_1,..., x_n\}$-арні предикати $Q^{\{x_1,...,x_n\}}$ (їхня кількість нескінченна), вони задаються так: $Q^{\{x_1,...,x_n\}} = R^{1,\,...,\,n}_{x_1,...,x_n}(Q^n)$.

Справді,

$$Q^{\{x_1,...,x_n\}}([x_1 \mapsto a_1,...,x_n \mapsto a_n]) =$$
$$= R^{1,\,...,\,n}_{x_1,...,x_n}(Q^n)([x_1 \mapsto a_1,...,x_n \mapsto a_n]) =$$
$$= Q^n(r^{1,\,...,\,n}_{x_1,...,x_n}([x_1 \mapsto a_1,...,x_n \mapsto a_n])) =$$
$$= Q^n([1 \mapsto a_1,...,n_n \mapsto a_n]) = Q^n(a_1,...,a_n).$$

Теорема 1. Клас Pra_A^V замкнений щодо композицій $\neg, \vee, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x$.

Арність предиката, отриманого за допомогою композиції, визначається так:

$$ar(\neg P) = ar(P);\ (P \vee Q) = ar(P) \cup ar(Q);$$
$$ar(\exists x P) = ar(P) \setminus \{x\};$$
$$ar(R^{v_1,...,v_n}_{x_1,...,x_n}(P)) =$$
$$= (ar(P) \setminus \{v_1,...,v_n\}) \cup \{x_i \mid v_i \in ar(P),\ i \in \{1,...,n\}\}$$

Таким чином, можна виділити такі підалгебри алгебри $QP_A^V = (PrP_A^V, CQ)$:

– $QPE_A^V = (PrPE_A^V, CQ)$ – алгебра еквітонних P-предикатів;

– $Ar_A^V = (Pra_A^V, CQ)$ – алгебра X-арних предикатів, це підалгебра QPE_A^V.

Зауважимо, що застосування композиції $\vee$ до X-арного та квазіарного предиката дає, загалом, квазіарний предикат.

Властивості квазіарних предикатів та їхніх композицій описано в [3–5; 7].

Наведемо основні властивості композицій реномінації.

Ren) $\exists yP = \exists z\mathrm{R}_z^y(P)$, де z неістотне для P.

R) $\mathrm{R}(P) = P$ – тотожна реномінація.

RI) $\mathrm{R}_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(P) = \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$ – згортка пари тотожних імен.

RU) Нехай $z \in V$ неістотне для P, тоді $\mathrm{R}_{y,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(P) = \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$.

RR) $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\mathrm{R}_{\bar{y}}^{\bar{w}}(P)) = \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}} (P)$ – згортка композицій $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}$ і $\mathrm{R}_{\bar{y}}^{\bar{w}}$ (див. [3–5]);

R¬) $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg P) = \neg\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$;

R∨) $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P \vee Q) = \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P) \vee \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(Q)$;

R∃s) $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists yP) = \exists y\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)$, де $y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$;

R∃) $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists yP) = \exists z\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_z^y (P)$, де $z \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$ та z неістотне для P.

Для опису елімінації кванторів використовують [5] спеціальні предикати-індикатори Ez, задаємо їх так:

$T(Ez) = \{d \in {}^V\!A \mid z \in asn(d)\}$;
$F(Ez) = \{d \in {}^V\!A \mid z \notin asn(d)\}$.

Теорема 2.

$$T(\mathrm{R}_y^x(P)) \cap T(Ey) \subseteq T(\exists xP);$$
$$F(\exists xP) \cap T(Ey) \subseteq F(\mathrm{R}_y^x(P));$$
$$T(\mathrm{R}_y^x(P)) \subseteq F(Ey) \cup T(\exists xP);$$
$$F(\exists xP) \subseteq F(Ey) \cup F(\mathrm{R}_y^x(P)).$$

2. Мови та їхні інтерпретації

Семантичними моделями PFLQA є чисті першопорядкові композиційні системи квазіарних предикатів із виділеними X-арними предикатами. Вони мають вигляд (A, Pr, CQ), де $CQ = \{\neg, \vee, \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x\}$. Кожна така композиційна система задає алгебру даних (A, Pr) та композиційну алгебру предикатів (Pr, CQ). Множину предикатів можна подати як $\mathrm{Pr} = PrP_A^V \cup Pn_A$, при цьому $PrP_A^V \supset PrPE_A^V \supset Pra_A^V$. Терми композиційної алгебри трактуємо як формули мови. Алфавіт мови PFLQA:

– множина V предметних імен (змінних);

– множина $Cs = \{\neg, \vee, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x\}$ символів базових композицій;

– множина Psq символів базових квазіарних предикатів;

– множина Psn символів базових n-арних предикатів.

Із кожним $p \in Psn$ пов'язане натуральне число n – його *арність*. Це означає, що задана функція $ar: Psn \to 2^V$. Символ $p \in Psn$ із арністю n також позначаємо p^n.

Індуктивне визначення множини Fr формул (тут префіксна форма запису):

Fq) $Psq \subseteq Fr$; формули $q \in Psq$ назвемо атомарними;

Fn) нехай $p^n \in Psn$, $x_1,...,x_n \in V$; тоді $p^n x_1...x_n \in Fr$; такі формули назвемо арними атомарними, множину цих формул позначимо Fat;

FC) $\Phi, \Psi \in Fr \Rightarrow \neg\Phi, \vee\Phi\Psi, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi, \exists x\Phi \in Fr$.

Позначимо $\sigma(\Phi)$ множину тих $p \in Ps$, які входять до складу формули Φ. Позначимо $nm(\Phi)$ множину тих $x \in V$, що фігурують у символах $R_{\bar{y}}^{\bar{v}}$ та $\exists x$ цієї Φ.

У множині Fr виділимо підмножину *арних* формул $Far = \{\Phi \mid \sigma(\Phi) \subseteq Psn\}$. Формули Far інтерпретуємо як X-арні предикати. Для Far даємо таке визначення:

Fn) нехай $p^n \in Psn$, $x_1,...,x_n \in V$; тоді $p^n x_1...x_n \in Far$;

FC) $\Phi, \Psi \in Far \Rightarrow \neg\Phi, \vee\Phi\Psi, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi, \exists x\Phi \in Far$.

Для запису формул також вживаємо традиційну інфіксну форму (див. [3; 4]).

Розширена сигнатура мови – це $\Sigma = (V, Cs, Ps)$, де $Ps = Psq \cup Psn$.

Інтерпретуємо мову PFLQA на композиційних системах CS = (A, Pr, CQ). Імена $x \in V$ позначають елементи множини A, символи композицій – відповідні композиції. Символи Psn позначають базові n-арні предикати. Для опису цього позначення задамо тотальне однозначне $I_0: Psn \to Pn_A$. Як і в класичній логіці, базові n-арні предикати мають віртуальний характер, вони є цеглинками побудови традиційних X-арних предикатів, або предикатів, які залежать від змінних (предметних імен) множини V. На основі I_0 задаємо відображення $I_a: Fat \to Pra_A^V$, яке визначає базові X-арні предикати: $I_a(p^n x_1...x_n) = \mathrm{R}_{x_1,...,x_n}^{1,...,n}(I_0(p^n))$. Тотальне однозначне $I_q: Psq \to PrP_A^V$ позначає базові квазіарні предикати в множині PrP_A^V. Відображення інтерпретації формул $I: Fr \to PrP_A^V$ задамо як сумісне продовження I_a та I_q згідно з побудовою формул за допомогою символів Cs таким чином:

$I(\neg\Phi) = \neg(I(\Phi))$, $I(\vee\Phi\Psi) = \vee(I(\Phi), I(\Psi))$,

$I(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)) = \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(I(\Phi))$; $I(\exists x\Phi) = \exists x(I(\Phi))$.

Трійку $\boldsymbol{J} = (\mathrm{CS}, \Sigma, I)$ назвемо *інтерпретацією* мови PFLQA сигнатури Σ.

Предикат $\boldsymbol{J}(\Phi)$ – значення формули Φ при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ – позначимо Φ_J.

n-арний предикат $I_0(p^n)$, де $p^n \in Psn$, також позначаємо p_J^n.

Для арних атомарних формул $(p^n x_1...x_n)_J(d)$, де $d \in {}^V A$, обчислюється так:

$$(p^n x_1...x_n)_J(d) = \mathrm{R}_{x_1,...,x_n}^{1,\ ...,\ n}(p_J^n(d)) = p_J^n(\mathrm{r}_{x_1,...,x_n}^{1,\ ...,\ n}(d)) =$$
$$= p_J^n(d\nabla[1 \mapsto d(x_1),...,n \mapsto d(x_n)]) =$$
$$= p_J^n([1 \mapsto d(x_1),...,n \mapsto d(x_n)]) = p$$
$$= p_J^n(d(x_1),...,d(x_n)).$$

Маємо

$(p^n x_1...x_n)_J(d)\downarrow \;\Leftrightarrow\; p_J^n(d(x_1),...,d(x_n))\downarrow \;\Leftrightarrow\; d(x_k)\downarrow$ для всіх x_k, тобто при $x_1,\ldots,x_n \in asn(d)$. Тому $p_J^n(d(x_1),...,d(x_n))\uparrow$, якщо $d(x_k)\uparrow$ для деякого x_k, тобто при $x_k \notin asn(d)$. Звідси

$$(p^n x_1...x_n)_J(d)\downarrow \;\Leftrightarrow\; d \in \bigcap_{1\le k\le n} E(x_k).$$

Таким чином:

Теорема 3.

$$T((p^n x_1...x_n)_J) \cup F((p^n x_1...x_n)_J) = \bigcap_{1\le k\le n} E(x_k),$$
$$T((p^n x_1...x_n)_J) \subseteq \bigcap_{1\le k\le n} E(x_k),$$
$$F((p^n x_1...x_n)_J) \subseteq \bigcap_{1\le k\le n} E(x_k).$$

Формула Φ виконувана при інтерпретації $\boldsymbol{J}$, або $\boldsymbol{J}$*-виконувана*, якщо Φ_J – виконуваний предикат. Φ *виконувана*, якщо Φ є $\boldsymbol{J}$-виконуваною при деякій $\boldsymbol{J}$.

Φ неспростовна при інтерпретації $\boldsymbol{J}$, або $\boldsymbol{J}$*-неспростовна* (позн. $\boldsymbol{J} \models \Phi$), якщо предикат Φ_J – неспростовний. Φ *неспростовна* (позн. $\models \Phi$), якщо $\boldsymbol{J} \models \Phi$ для всіх $\boldsymbol{J}$.

Для кожного $q \in Psq$ множину гарантовано неістотних імен задамо за допомогою тотальної $\nu : Psq \longrightarrow 2^V$, яка продовжується до $\nu : Fr \longrightarrow 2^V$:

$$\nu(\neg\Phi) = \nu(\Phi);\ \nu(\vee\Phi\Psi) = \nu(\Phi) \cap \nu(\Psi);$$
$$\nu(\exists x\Phi) = \nu(\Phi) \cup \{x\};$$
$$\nu(R_{x_1,...,x_n}^{v_1,...,v_n}\Phi) =$$
$$= (\nu(\Phi) \cup \{v_1,...,v_n\}) \setminus \{x_i \mid v_i \notin \nu(\Phi),\ i \in \{1,...,n\}\}.$$

Кожне $u \in \nu(\Phi)$ неістотне [4] для формули Φ. Водночас $V \setminus \nu(\Phi)$ може бути нескінченною. Можливість для формули залежати від наперед необмеженої множини змінних – це *визначальна властивість* логіки квазіарних предикатів.

Ми постулюємо нескінченність множини $V_T = \bigcap_{p\in Ps} \nu(p)$ тотально неістотних імен, що необхідне для виконання еквівалентних перетворень формул.

Задамо множину «нових» для Φ неістотних імен: $fu(\Phi) = V_T \setminus nm(\Phi)$.

Для довільної $\Gamma \subseteq Fr$ задаємо $\nu(\Gamma) = \bigcap_{\Phi\in\Gamma} \nu(\Phi)$ та $fu(\Gamma) = V_T \setminus nm(\Gamma)$.

Для формул, які задають X-арні предикати, функцію арності $ar : Far \longrightarrow 2^V$ задаємо як продовження функції $ar : Psn \longrightarrow 2^V$ таким чином:

$$ar(\neg\Phi) = ar(\Phi);\ ar(\vee\Phi\Psi) = ar(\Phi) \cup ar(\Psi);$$
$$ar(\exists x\Phi) = ar(\Phi) \setminus \{x\};$$
$$ar(R_{x_1,...,x_n}^{v_1,...,v_n}(\Phi)) = (ar(\Phi) \setminus \{v_1,...,v_n\}) \cup \{x_i \mid v_i \in ar(\Phi),$$
$$i \in \{1,...,n\}\}.$$

Для формул $\Phi \in Far$ функцію ν можна задати через функцію арності ar:

Теорема 4. $\Phi \in Far \Rightarrow \nu(\Phi) = V \setminus ar(\Phi)$.

3. Відношення логічного наслідку. Нормальні форми

Для формалізації фундаментального поняття логічного наслідку введено і досліджено [4; 5; 7] низку відношень на множині формул. Дамо їх визначення для загального випадку пари множин формул. Нехай $\Gamma \subseteq Fr$, $\Delta \subseteq Fr$. Будемо позначати:

$\bigcap_{\Phi\in\Gamma} T(\Phi_J)$ як $T^\wedge(\Gamma_J)$, $\bigcap_{\Psi\in\Delta} F(\Psi_J)$ як $F^\wedge(\Delta_J)$,

$\bigcup_{\Psi\in\Delta} T(\Psi_J)$ як $T^\vee(\Delta_J)$, $\bigcup_{\Phi\in\Gamma} F(\Phi_J)$ як $F^\vee(\Gamma_J)$.

Задамо відношення наслідку для $\Gamma, \Delta \subseteq Fr$ при фіксованій інтерпретації $\boldsymbol{J}$:

Δ є *IR*-наслідком Γ при $\boldsymbol{J}$ (позн. $\Gamma\ {}_J\!\models_{ID} \Delta$), якщо $T^\wedge(\Gamma_J) \cap F^\wedge(\Delta_J) = \varnothing$;

Δ є *T*-наслідком Γ при $\boldsymbol{J}$ (позн. $\Gamma\ {}_J\!\models_T \Delta$), якщо $T^\wedge(\Gamma_J) \subseteq T^\vee(\Delta_J)$;

Δ є *F*-наслідком Γ при $\boldsymbol{J}$ (позн. $\Gamma\ {}_J\!\models_F \Delta$), якщо $F^\wedge(\Delta_J) \subseteq F^\vee(\Gamma_J)$;

Δ є *TF*-наслідком Γ при $\boldsymbol{J}$ (позн. $\Gamma\ {}_J\!\models_{TF} \Delta$), якщо $\Gamma\ {}_J\!\models_T \Delta$ та $\Gamma\ {}_J\!\models_F \Delta$.

Відповідні відношення логічного наслідку визначаємо за схемою:

$\Gamma \models_* \Delta$, якщо $\Gamma\ {}_J\!\models_* \Delta$ для кожної інтерпретації $\boldsymbol{J}$.

Зокрема, отримуємо відношення наслідку при фіксованій інтерпретації $\boldsymbol{J}$ для двох формул та відношення логічного наслідку для двох формул.

Між відношеннями логічного наслідку маємо [5] такі співвідношення:

$$\models_{TF} \subset \models_T,\ \models_{TF} \subset \models_F;\ \models_T \not\subset \models_F,$$
$$\models_F \not\subset \models_T;\ \models_T \subset \models_{IR},\ \models_F \subset \models_{IR}.$$

Введені відношення логічного наслідку для множин формул рефлексивні, проте нетранзитивні. Водночас такі відношення для двох формул рефлексивні й транзитивні, вони індукують відповідні відношення логічної еквівалентності.

Відношення еквівалентності при інтерпретації $\boldsymbol{J}$ задаємо за такою схемою:

$$\Phi\ {}_J{\sim_*}\ \Psi,\ \text{якщо}\ \Phi\ {}_J{|\!=_*}\ \Psi\ \text{та}\ \Psi\ {}_J{|\!=_*}\ \Phi.$$

Відношення логічної еквівалентності $\sim_{IR}$, $\sim_T$, $\sim_F$, $\sim_{TF}$ визначаємо за схемою:

$$\Phi \sim_* \Psi,\ \text{якщо}\ \Phi \mid\!=_* \Psi\ \text{та}\ \Psi \mid\!=_* \Phi.$$

Для відношення ${}_J{\sim_{TF}}$ маємо:

$\Phi\ {}_J{\sim_{TF}}\ \Psi \Leftrightarrow T(\Phi_J) = T(\Psi_J)$ та $F(\Phi_J) = F(\Psi_J)$.

Отже, $\Phi\ {}_J{\sim_{TF}}\ \Psi \Leftrightarrow \Phi_J = \Psi_J$, тобто Φ_J та Ψ_J – один і той самий предикат.

Використовуючи $\sim_{TF}$, опишемо властивості формул, пов'язані з кванторами та реномінаціями. Вони індуковані відповідними властивостями предикатів.

Ren) $\exists y\Phi \sim_{TF} \exists z R_z^y(\Phi)$ за умови $z\in\nu(\Phi)$;

R) $R(\Phi) \sim_{TF} \Phi$;

RI) $R_{z,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi) \sim_{TF} R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$;

RU) $R_{y,\bar{x}}^{z,\bar{v}}(\Phi) \sim_{TF} R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$ за умови $z\in\nu(\Phi)$;

RR) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)) \sim_{TF} R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_{\bar{y}}^{\bar{w}} (\Phi)$;

R¬) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi) \sim_{TF} \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)$;

R∨) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi) \sim_{TF} R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)$;

R∃s) $R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\exists x\Phi) \sim_{TF} \exists x R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\Phi)$ за умови $x \notin \{\bar{v}, \bar{u}\}$;

R∃) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi) \sim_{TF} \exists z R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_z^y (\Phi)$ за умови $z \in fu(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists x\Phi))$.

Для арних атомарних формул додатково маємо (тут $p^n \in Psn$):

Rar) $R_{y_1,\dots,y_m}^{v_1,\dots,v_m}(p^n x_1,\dots,x_n) \sim_{TF} p^n z_1,\dots,z_n$,

$$\text{де}\ z_i = \begin{cases} x_i,\ \text{якщо}\ x_i \notin \{v_1,\dots,v_m\}, \\ y_j,\ \text{якщо}\ x_i = v_j\ \text{для деякого}\ v_j. \end{cases}$$

Основою еквівалентних перетворень формул є теорема еквівалентності. Вона формулюється [4; 5] для $\sim_{TF}$ та $\sim_{IR}$, а для $\sim_T$ та $\sim_F$ теорема невірна.

Теорема 5. Нехай Φ' отримано з формули Φ заміною деяких входжень $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ на $\Psi_1, \dots, \Psi_n$. Якщо $\Phi_1 \sim_* \Psi_1$, ..., $\Phi_n \sim_* \Psi_n$, то $\Phi \sim_* \Phi'$.

Кожна формула PFLQA зводиться до класичноподібної нормальної форми.

Формула Ψ *нормальна*, якщо всі символи реномінації формули Ψ (якщо вони є) застосовані тільки до предикатних символів, і всі входження кванторних префіксів у Ψ (якщо вони є) – по різних тотально неістотних іменах.

Теорема 6. Для кожної формули Φ можна збудувати нормальну Ψ: $\Phi \sim_{TF} \Psi$.

Кожному входженню кванторного префікса $\exists x$ у Φ зіставимо $y \in fu(\Phi)$, причому різним таким входженням зіставимо різні імена. Просуваючись по Φ зліва направо, замінюємо кожну підформулу вигляду $\exists x$A на формулу $\exists y R_y^x(\mathrm{A})$, кожен раз беручи нове $y \in fu(\Phi)$. За Ren тоді $\exists x\mathrm{A} \sim_{TF} \exists y R_y^x(\mathrm{A})$. Для так отриманої формули Ξ маємо $\Phi \sim_{TF} \Xi$ за теоремою еквівалентності.

Далі за Ξ будуємо нормальну формулу Ψ. Згідно з R, RI, RU, RR, R¬, R∨, R∃s проносимо символи реномінації вглиб формули до рівня предикатних символів. У випадку $\sigma(\Phi) \cap Psn \neq \varnothing$ на останньому етапі згідно з Rar спрощуємо арні атомарні формули: кожну таку $R_{y_1,\dots,y_m}^{v_1,\dots,v_m}(p^n x_1,\dots,x_n)$ замінюємо на $p^n z_1,\dots,z_n$. Отримуємо формулу Ψ, яка нормальна, причому $\Psi \sim_{TF} \Xi$. Враховуючи $\Phi \sim_{TF} \Xi$, звідси $\Phi \sim_{TF} \Psi$.

4. Властивості відношень логічного наслідку для множин формул

Теорема 7. Нехай $\Phi \sim_* \Psi$ (тут $\sim_*$ та $|\!=_*$ – це $\sim_{TF}$, $\sim_{IR}$ та $|\!=\sim_{TF}$, $|\!=\sim_{IR}$), тоді:

$\Phi, \Gamma \mid\!=_* \Delta \Leftrightarrow \Psi, \Gamma \mid\!=_* \Delta$; $\Gamma \mid\!=_* \Delta, \Phi \Leftrightarrow \Gamma \mid\!=_* \mid\!= \Delta, \Psi$.

Надалі, якщо інше не зазначене окремо, $|\!=$ – одне з $|\!=_{IR}$, $|\!=_T$, $|\!=_F$, $|\!=_{TF}$.

Для всіх введених відношень маємо монотонність:

M) Нехай $\Gamma \subseteq \Lambda$ та $\Delta \subseteq \Sigma$, тоді $\Gamma \mid\!= \Delta \Rightarrow \Lambda \mid\!= \Sigma$.

Для $|\!=_{IR}$ можна (див. [4; 5]) переносити формулу з лівої частини логічного наслідку в праву і навпаки, знімаючи чи навішуючи заперечення, проте для $|\!=_T$, $|\!=_F$, $|\!=_{TF}$ таке робити не можна. Така сама ситуація і для арних атомарних формул.

Теорема 8. Для арних атомарних формул можливі такі ситуації:

1) $\neg p\bar{z}, \Gamma \mid\!=_{TF} \Delta$ та $\Gamma \mid\!\neq_T \Delta, p\bar{z}$; $p\bar{z}, \Gamma \mid\!=_{TF} \Delta$ та $\Gamma \mid\!\neq_T \Delta, \neg p\bar{z}$;

2) $\Gamma \mid\!=_{TF} \Delta, p\bar{z}$ та $\neg p\bar{z}, \Gamma \mid\!\neq_F \Delta$; $\Gamma \mid\!=_{TF} \Delta, \neg p\bar{z}$ та $p\bar{z}, \Gamma \mid\!\neq_F \Delta$.

Доводимо п. 1. Нехай

$p\bar{u}(d) = T$, $\bar{u} \subseteq asn(d)$ та невірно $\bar{z} \subseteq asn(d)$, звідки $p\bar{z}(d)\uparrow$; тоді

$$d \in T(p\bar{u})\ \text{та}\ d \notin T(\neg p\bar{z}) \cup T(p\bar{z});$$

звідси отримуємо:

$$\neg p\bar{z}, p\bar{u} \mid\!=_{TF} \neg p\bar{z}\ \text{та}\ p\bar{u} \mid\!\neq_T \neg p\bar{z}, p\bar{z},$$

$$p\bar{z}, p\bar{u} \mid\!=_{TF} p\bar{z}\ \text{та}\ p\bar{u} \mid\!\neq_T \neg p\bar{z}, p\bar{z}.$$

Доводимо п. 2. Нехай

$p\bar{u}(d) = F$, $\bar{u} \subseteq asn(d)$ та невірно $\bar{z} \subseteq asn(d)$, звідки $p\bar{z}(d)\uparrow$; тоді

$d \in F(p\bar{u})$ та $d \notin F(\neg p\bar{z}) \cup F(p\bar{z})$;

звідси отримуємо:

$$p\bar{z} \models_{TF} p\bar{u}, p\bar{z} \text{ та } \neg p\bar{z}, p\bar{z} \not\models_F p\bar{u},$$

$$\neg p\bar{z} \models_{TF} p\bar{u}, \neg p\bar{z} \text{ та } p\bar{z}, \neg p\bar{z} \not\models_F p\bar{u}.$$

Наявність певного відношення логічного наслідку гарантують властивості:

C) $\Phi, \Gamma \models \Phi, \Delta$;

CL) $\neg\Phi, \Phi, \Gamma \models_T \Delta$; водночас $\Gamma \not\models_T \Delta, \neg\Psi, \Psi$;

CR) $\Gamma \models_F \Delta, \neg\Psi, \Psi$; водночас $\neg\Phi, \Phi, \Gamma \not\models_F \Delta$;

CLR) $\neg\Phi, \Phi, \Gamma \models_{TF} \Delta, \neg\Psi, \Psi$.

Властивості декомпозиції формул:

$\neg\neg_L$) $\neg\neg\Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models \Delta$;

$\neg\neg_R$) $\Gamma \models \Delta, \neg\neg\Phi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Phi$;

$\vee_L$) $\Phi\vee\Psi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models \Delta$ та $\Psi, \Gamma \models \Delta$;

$\vee_R$) $\Gamma \models \Delta, \Phi\vee\Psi \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Phi, \Psi$;

$\neg\vee_L$) $\neg(\Phi\vee\Psi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg\Phi, \neg\Psi, \Gamma \models \Delta$;

$\neg\vee_R$) $\Gamma \models \Delta, \neg(\Phi\vee\Psi) \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \neg\Phi$ та $\Gamma \models \Delta, \neg\Psi$.

Для $\models_{IR}$ додатково маємо властивості (для $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$ вони невірні):

$\neg_L$) $\neg\Phi, \Gamma \models_{IR} \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models_{IR} \Delta, \Phi$;

$\neg_R$) $\Gamma \models_{IR} \Delta, \neg\Phi \Leftrightarrow \Phi, \Gamma \models_{IR} \Delta$.

Специфічним для PFLQA є продукування арних атомарних формул:

$\mathrm{Ra_L}$) $R_{\bar{y}}^{\bar{v}}(p\bar{x}), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow p\bar{z}, \Gamma \models \Delta$, де $p \in Psn$;

$\mathrm{R\neg a_L}$) $\neg R_{\bar{y}}^{\bar{v}}(p\bar{x}), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \neg p\bar{z}, \Gamma \models \Delta$, де $p \in Psn$;

$\mathrm{Ra_R}$) $\Gamma \models R_{\bar{y}}^{\bar{v}}(p\bar{x}), \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models p\bar{z}, \Delta$, де $p \in Psn$;

$\mathrm{R\neg a_R}$) $\Gamma \models \neg R_{\bar{y}}^{\bar{v}}(p\bar{x}), \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models \neg p\bar{z}, \Delta$, де $p \in Psn$.

Для $\mathrm{Ra_L}$, $\mathrm{R\neg a_L}$, $\mathrm{Ra_R}$, $\mathrm{R\neg a_R}$ $\bar{z}$ визначається так, як описано в Rar.

Властивості еквівалентних перетворень отримуємо на основі властивостей R, RI, RU, RR, R¬, R∨, R∃s, R∃. Кожна така R* продукує 4 відповідні властивості $\mathrm{R*_L}$, $\mathrm{R*_R}$, $\neg\mathrm{R*_L}$, $\neg\mathrm{R*_R}$, коли виділена формула чи її заперечення знаходиться у лівій чи правій частині відношення $\models$. Наприклад, R∨ індукує такі властивості:

$\mathrm{R\vee_L}$) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi), \Gamma \models \Delta$;

$\neg\mathrm{R\vee_L}$) $\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi), \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow$
$\neg(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)), \Gamma \models \Delta$;

$\mathrm{R\vee_R}$) $\Gamma \models \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi) \Leftrightarrow$
$\Gamma \models \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi)$;

$\neg\mathrm{R\vee_R}$) $\Gamma \models \Delta, \neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi) \Leftrightarrow$
$\Gamma \models \Delta, \neg(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \vee R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi))$.

На основі теореми 2 отримуємо властивості елімінації кванторів:

$\exists_L$) $\exists x\Phi, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R_z^x(\Phi), Ez, \Gamma \models \Delta$ за умови $z \in fu(\Gamma, \Delta, \exists x\Phi)$);

$\neg\exists_R$) $\Gamma \models \neg\exists x\Phi, \Delta \Leftrightarrow Ez, \Gamma \models \neg R_z^x(\Phi), \Delta$ за умови $z \in fu(\Gamma, \Delta, \exists x\Phi)$);

$\exists\mathrm{v_R}$) $Ey, \Gamma \models \exists x\Phi, \Delta \Leftrightarrow Ey, \Gamma \models \exists x\Phi, R_y^x(\Phi), \Delta$;

$\neg\exists\mathrm{v_L}$) $\neg\exists x\Phi, Ey, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow$
$\neg\exists x\Phi, \neg R_y^x(\Phi), Ey, \Gamma \models \Delta$.

Властивості *E*-розподілу та первісного означення:

Ed) $\Gamma \models \Delta \Leftrightarrow Ey, \Gamma \models \Delta$ та $\Gamma \models \Delta, Ey$;

Ev) $\Gamma \models \Delta \Leftrightarrow Ez, \Gamma \models \Delta$ за умови $z \in fu(\Gamma, \Delta)$.

Наведемо специфічні для PFLQA властивості відношень логічного наслідку, пов'язані з арними атомарними формулами; вони опираються на теорему 3.

Для $\models_{IR}$ маємо властивості означення для арних атомарних формул:

$\mathrm{Da_L}$) $p^n x_1 \ldots x_n, \Gamma \models_{IR} \Delta \Leftrightarrow p^n x_1 \ldots x_n, Ex_1, \ldots, Ex_n, \Gamma \models_{IR} \Delta$;

$\mathrm{Da_R}$) $\Gamma \models_{IR} \Delta, p^n x_1 \ldots x_n \Leftrightarrow Ex_1, \ldots, Ex_n, \Gamma \models_{IR} \Delta, p^n x_1 \ldots x_n$.

$\mathrm{Da_L}$ та $\mathrm{Da_R}$ індукують пов'язані з арними атомарними формулами похідні властивості, які гарантують наявність відношення $\models_{IR}$:

$\mathrm{Ca_L}$) $p\bar{x}, \Gamma \models_{IR} \Delta, Ez$ за умови $z \in \{\bar{x}\}$;

$\mathrm{Ca_R}$) $\Gamma \models_{IR} \Delta, p\bar{x}, Ez$ за умови $z \in \{\bar{x}\}$.

Для $\models_T$, $\models_F$, $\models_{TF}$ властивості $\mathrm{Da_L}$ та $\mathrm{Da_R}$ вже невірні. Для $\models_T$ та $\models_F$ маємо:

$\mathrm{DTa_L}$) $p^n x_1 \ldots x_n, \Gamma \models_T \Delta \Leftrightarrow p^n x_1 \ldots x_n, Ex_1, \ldots, Ex_n, \Gamma \models_T \Delta$;

$\mathrm{DT\neg a_L}$) $\neg p^n x_1 \ldots x_n, \Gamma \models_T \Delta \Leftrightarrow \neg p^n x_1 \ldots x_n, Ex_1, \ldots, Ex_n, \Gamma \models_T \Delta$;

$\mathrm{DFa_R}$) $\Gamma \models_F \Delta, p^n x_1 \ldots x_n \Leftrightarrow Ex_1, \ldots, Ex_n, \Gamma \models_F \Delta, p^n x_1 \ldots x_n$;

$\mathrm{DF\neg a_R}$) $\Gamma \models_F \Delta, \neg p^n x_1 \ldots x_n \Leftrightarrow Ex_1, \ldots, Ex_n, \Gamma \models_F \Delta, \neg p^n x_1 \ldots x_n$.

Приклад. Маємо $Ex, p^1x \vee \neg Ex \models_T p^1x$, водночас $p^1x \vee \neg Ex \not\models_T p^1x$.

Маємо p^1x, $Ex \models_F p^1x \,\&\, Ex$, водночас $p^1x \not\models_F p^1x \,\&\, Ex$.

Таким чином, для $\models_T$ немає аналога властивості $\mathrm{Da_R}$, для $\models_F$ немає аналога властивості $\mathrm{Da_L}$, а для $\models_{TF}$ немає аналогів властивостей $\mathrm{Da_L}$ і $\mathrm{Da_R}$.

$\mathrm{DTa_L}$, $\mathrm{DT\neg a_L}$ та $\mathrm{DFa_R}$, $\mathrm{DF\neg a_R}$ індукують пов'язані з арними атомарними формулами похідні властивості, які гарантують наявність $\models_T$ та $\models_F$:

$\mathrm{CTa_L}$) $p\bar{x}, \Gamma \models_T \Delta, Ez$ за умови $z \in \{\bar{x}\}$;

$\mathrm{CT\neg a_L}$) $\neg p\bar{x}, \Gamma \models_T \Delta, Ez$ за умови $z \in \{\bar{x}\}$;

$\mathrm{CFa_R}$) $\Gamma \models_F \Delta, Ez, p\bar{x}$ за умови $z \in \{\bar{x}\}$;

$\mathrm{CF\neg a_R}$) $\Gamma \models_F \Delta, Ez, \neg p\bar{x}$ за умови $z \in \{\bar{x}\}$.

$\mathrm{CTa_L}$ та $\mathrm{CT\neg a_L}$ гарантують наявність $\models_T$, $\mathrm{CFa_R}$ та $\mathrm{CF\neg a_R}$ – наявність $\models_F$.

Висновки

У роботі запропоновано новий клас програмно-орієнтованих логічних формалізмів – чисті першопорядкові логіки із квазіарними та базовими *n*-арними предикатами. Вони є природним синтезом класичних першопорядкових логік і композиційно-номінативних логік квазіарних предикатів.

Розглянуто семантичні моделі та мови, досліджено семантичні властивості пропонованих логік. Встановлено зв'язок між *n*-арними та тотальними *X*-арними предикатами, описано класичноподібні нормальні форми формул мови. Описано відношення логічного наслідку, наведено властивості, пов'язані з арними атомарними формулами. Властивості відношень логічного наслідку для множин формул є семантичною основою побудови для пропонованих логік відповідних секвенційних числень.

Список літератури

1. Басараб И. А. Композиционные базы данных / И. А. Басараб, Н. С. Никитченко, В. Н. Редько. – К. : Либідь, 1992. – 192 с.
2. Клини С. Математическая логика / С. Клини. – М. : Мир, 1973.— 480 с.
3. Нікітченко М. С. Математична логіка та теорія алгоритмів / М. С. Нікітченко, С. С. Шкільняк. – К. : ВПЦ Київський університет, 2008. – 528 с.
4. Нікітченко М. С. Прикладна логіка / М. С. Нікітченко, С. С. Шкільняк. – К. : ВПЦ Київський університет, 2013. – 278 с.
5. Нікітченко М. С. Чисті першопорядкові логіки квазіарних предикатів / М. С. Нікітченко, О. С. Шкільняк, С. С. Шкільняк // Пробл. програмування. – 2016. – № 2–3. – С. 73–86.
6. Handbook of Logic in Computer Science: In 5 vol. / [eds. Abramsky S., Gabbay D. and Maibaum T. S. E.]. – Oxford : Clarendon Press, 1994–2000.
7. Nikitchenko M. Properties of Logics of Quasiary Predicates / M. Nikitchenko, S. Shkilniak // Workshop on Foundations of Informatics: Proceedings FOI-2015. August 24–29, 2015, Chisinau, Moldova. – P. 180–197.

M. Nikitchenko, S. Shkilniak

FIRST-ORDER LOGICS WITH QUASI-ARY AND *N*-ARY PREDICATES

Verification is one of the important methods of improving the reliability of software. It should be based on logics that adequately reflect the main properties of programs. Among such properties are partiality and non-determinism of programs, usage of complex data structures, etc. In particular, programs use mapping of fixed arity (n-ary mappings) and of flexible arity (quasiary mappings). These properties imply the necessity of construction of program-oriented logics that are based on n-ary and quasiary mapping. This paper considers one of these logics – pure first-order logic of quasiary and n-ary predicates. This logic is a synthesis of first-order classical logic and first-order composition-nominative logics of quasiary predicates. As semantic models, quasiary predicate algebras and their subalgebras of various types are considered, in particular, subalgebras of equitone and X-ary predicates. The class of compositions consists of compositions of disjunction, negation, renomination, and existential quantification. Semantic properties of algebras with these compositions are studied. The connection between n-ary and X-ary predicates is described. Based on algebras with these compositions, a logic language is defined as the set of terms of corresponding algebras. This language being restricted by the class of n-ary predicate symbols coincides with the first-order language of classical logic; and being restricted by the class of quasiary predicate symbols it coincides with the language of first-order quasiary logic. The paper describes the following types of logical consequences: irrefutability consequence $|=_{IR}$, *consequence on truth* $|=_{T}$, *consequence on falsity* $|=_{F}$, *and a strong consequence on truth and falsity* $|=_{TF}$. *Semantic properties of these consequences are investigated. In particular, logical equivalence relations are studied for the introduced consequences. Transformations based on such equivalence relations permit to transform formulas to various normal forms. The formulated semantic properties form the basis for sequent rules and corresponding sequent calculi for the defined logics.*

Keywords: logic, quasiary predicate, *n*-ary predicate, logical consequence.

Матеріал надійшов 26.09.2016