УДК 004.42:510.69

Касьянюк В. С., Малютенко Л. М., Шкільняк О. С.

СЕКВЕНЦІЙНІ ЧИСЛЕННЯ КОМПОЗИЦІЙНО-НОМІНАТИВНИХ МОДАЛЬНИХ ЛОГІК НЕМОНОТОННИХ ПРЕДИКАТІВ

У статті розглянуто програмно-орієнтовні логічні формалізми – чисті першопорядкові композиційно-номінативні транзиційні модальні логіки немонотонних часткових предикатів. На основі властивостей відношення логічного наслідку для множин специфікованих станами формул для цих логік побудовано числення секвенційного типу. Описано різновиди таких числень, для них доведено теореми коректності та повноти.

Ключові слова: модальна логіка, предикат, логічний наслідок, секвенційне числення.

Розвиток інформатики і програмування та пов’язана з цим поява нових задач і проблем сприяють виникненню нових розділів математичної логіки, які мають велике практичне значення. Особливе місце серед них посідають модальні логіки [7]. В основі традиційних модальних логік лежить класична логіка предикатів, проте вона має істотні обмеження [1; 2], що зумовлює необхідність побудови *програмно-орієнтованих* логічних формалізмів модального типу. Такими є композиційно-номінативні модальні логіки (КНМЛ), вони поєднують можливості композиційно-номінативних логік квазіарних предикатів [1–3] і традиційних модальних логік. Низку класів КНМЛ побудовано і досліджено, зокрема, в [2; 4–6; 8]. Найважливішим класом КНМЛ є транзиційні модальні логіки (ТМЛ), які відбивають аспект зміни й розвитку предметних областей. У межах ТМЛ можна природним чином розглядати традиційні модальні логіки.

Для успішного розв’язання задач, що виникають в інформаційних і програмних системах, необхідний конструктивний пошук виведень. Ефективним апаратом побудови виведень є числення секвенційного (ґенценівського) типу. Такі числення формалізують поняття логічного слідування, яке належить до центральних понять логіки та уточнюється як відношення логічного наслідку.

Метою цієї роботи є дослідження чистих першопорядкових ТМЛ часткових квазіарних предикатів, не обмежених умовою монотонності, та побудова для них секвенційних числень. Такі логіки запропоновано в [6], вони вивчались в [4; 6; 8]. У цій статті стисло описано семантичні аспекти ТМЛ немонотонних предикатів, зокрема, властивості відношення логічного наслідку для множин специфікованих станами формул. Такі властивості є семантичною основою побудови для ТМЛ числень секвенційного типу. Характерна особливість пропонованих числень – розширені умови замкненості секвенції, нові форми елімінації модальностей та форми елімінації кванторів, що враховують немонотонність предикатів. Описано різновиди цих числень, для них доведено теореми коректності й повноти.

Поняття, які в цій роботі не визначено, тлумачимо в сенсі [1–3].

1. Транзиційні модальні системи та їхні різновиди

Центральним для КНМЛ є поняття композиційно-номінативної модальної системи. Важливим класом цих систем є транзиційні модальні системи (ТМС). ТМС – це об’єкт $\boldsymbol{M} = (Cms, Fm, Im)$. Тут Cms – композиційна модальна система (КМС), Fm – множина формул мови, Im – відображення інтерпретації формул. КМС мають вигляд $Cms = (S, R, Pr, C)$, де S – множина станів світу, R – множина відношень на S вигляду $\mathrm{R} \subseteq S \times S$, трактуємо їх як відношення переходу на станах, Pr – множина предикатів на станах, C – множина композицій на Pr. Для чистих першопорядкових ТМС S – це множина алгебраїчних систем вигляду $\alpha = (A_\alpha, Pr_\alpha)$, C задається базовими загальнологічними композиціями $\neg, \vee, \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x$ (описані в [1–3]) і базовими модальними композиціями, A_α – множина базових даних стану α, Pr_α– множина квазіарних предикатів вигляду ${}^{V}A_\alpha \to \{T, F\}$, це *предикати стану* α. Предикати вигляду ${}^{V}A \to \{T, F\}$, де $A = \bigcup_{\alpha \in S} A_\alpha$, назвемо *глобальними*.

ТМС із $R=\{\triangleright_i \mid i\in I\}$, де кожному $\triangleright_i\in R$ зіставлено базову модальну композицію $К_i$, названо мультимодальними. Загальні ТМС є їхнім окремим випадком, у них $R=\{\triangleright\}$ та єдина базова модальна композиція $\Box$. ТМС із $R=\{\triangleright\}$ та базовими модальними композиціями $\Box\uparrow$ і $\Box\downarrow$, названо темпоральними.

Далі обмежимось розглядом загальних ТМС (ЗМС). Отримані результати природним чином переносяться на темпоральні та мультимодальні ТМС.

Опишемо мову чистих першопорядкових ЗМС. Алфавіт мови: множини V предметних імен (змінних), Ps предикатних символів (сигнатура мови); символи базових композицій: загальнологічних $\neg$, $\vee$, $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}$, $\exists x$ та модальної композиції $\Box$.

Множину Fm формул визначимо індуктивно. Маємо $Ps\subseteq Fm$, а далі задамо:

$$\Phi,\Psi\in Fm \Rightarrow \neg\Phi, \vee\Phi\Psi, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi, \exists x\Phi, \Box\Phi\in Fm.$$

Задамо відображення інтерпретації формул на станах. Спочатку задаємо $Im : Ps\times S\to Pr$, при цьому має бути $Im(p,\alpha)\in Pr_\alpha$ (тобто базові предикати є предикатами станів). Продовжимо Im до відображення $Im : Fm\times S\to Pr$ так:

$$Im(\neg\Phi,\alpha) = \neg(Im(\Phi,\alpha));$$

$$Im(\vee\Phi\Psi,\alpha) = \vee(Im(\Phi,\alpha), Im(\Psi,\alpha));$$

$$Im(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}\Phi,\alpha) = \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(Im(\Phi,\alpha));$$

$$Im(\exists x\Phi,\alpha)=\begin{cases} T, \text{ якщо існує } a\in A_\alpha : Im(\Phi,\alpha)(d\nabla x\mapsto a)=T,\\ F, \text{ якщо } Im(\Phi,\alpha)(d\nabla x\mapsto a)=F \text{ для всіх } a\in A_\alpha,\\ \text{невизначене в усіх інших випадках;}\end{cases}$$

$$Im(\Box\Phi,\alpha)(d)=\begin{cases} T, \text{ якщо } Im(\Phi,\delta)(d)=T \text{ для всіх } \delta\in S :\ \alpha\triangleright\delta,\\ F, \text{ якщо існує } \delta\in S : \alpha\triangleright\delta \text{ та } Im(\Phi,\delta)(d)=F,\\ \text{невизначене в усіх інших випадках.}\end{cases}$$

Якщо для $\alpha\in S$ не існує β: $\alpha\triangleright\beta$, то

$$Im(\Box\Phi,\alpha)(d)\uparrow \text{ для кожного } d\in {}^VA.$$

Предикати, які є значеннями немодалізованих формул (при їх побудові не використовують символи $\Box$), належать до предикатів станів.

Предикат $Im(\Phi,\alpha)$, який є значенням формули Φ у стані α, позначаємо Φ_α.

Формула Φ *неспростовна* (частково істинна) *в ЗМС* $\boldsymbol{M}$, що позначимо $\boldsymbol{M}\models\Phi$, якщо Φ_α неспростовний для всіх $\alpha\in S$. Формула Φ *неспростовна* (частково істинна), що позначимо $\models\Phi$, якщо $\boldsymbol{M}\models\Phi$ для всіх ТМС $\boldsymbol{M}$ одного типу.

Тип ЗМС визначається сигнатурою мови та сигнатурою неістотності [2].

ЗМС будемо також подавати у вигляді $\boldsymbol{M} = (S, R, A, Im)$.

Залежно від умов, накладених на відношення переходу $\triangleright$, можна визначати різні класи ТМС. Традиційними є випадки, коли $\triangleright$ рефлексивне, симетричне чи транзитивне, тоді до назви ЗМС додаємо R, T чи S. Отримуємо такі типи ЗМС:

R-ЗМС, *T*-ЗМС, *S*-ЗМС, *RT*-ЗМС, *RS*-ЗМС, *TS*-ЗМС, *RTS*-ЗМС.

Властивості композицій реномінації R, RI, RU, RR, R$\neg$, R$\vee$, R$\exists$s, R$\exists$, в яких мовиться про рівність предикатів (див. [3]), справджуються для предикатів ЗМС.

Символи модальних композицій можна проносити [6] через реномінації.

Це означає: кожна формула вигляду

$$R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Box\Phi) \leftrightarrow \Box R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi) \text{ неспростовна.}$$

Для ТМЛ еквітонних предикатів формули $\Box\forall x\Phi\to\forall x\Box\Phi$ та $\exists x\Box\Phi\to\Box\exists x\Phi$ неспростовні, проте в загальному випадку ТМЛ немонотонних предикатів для них побудовано [6] контрмоделі – ТМС, в яких ці формули спростовні. Водночас [6] $\Box\exists x\Phi\to\exists x\Box\Phi$ та $\forall x\Box\Phi\to\Box\forall x\Phi$ спростовні вже в ТМЛ еквітонних предикатів.

2. Відношення логічного наслідку для множин формул

Нехай $\boldsymbol{M} = (S, R, A, Im)$ – ЗМС, S – множина імен станів із S. *Специфіковані станом* формули подаємо як Φ^α, де Φ – формула мови, $\alpha\in$S – її специфікація. Множина специфікованих формул Γ *узгоджена* із $\boldsymbol{M}$, якщо задана ін'єкція S у S.

Нехай Δ та Γ – множини специфікованих станами формул.

Δ є *наслідком* Γ в узгодженій із ними ТМС M, якщо для всіх $d\in {}^VA$ маємо:

$\Phi_\alpha(d)=T$ для всіх $\Phi^\alpha\in\Gamma$ $\Rightarrow$ неможливо $\Psi_\beta(d)=F$ для всіх $\Psi^\beta\in\Delta$.

Це позначимо $\Gamma\,{}_M\!\models\Delta$. Такий запис завжди означає узгодженість M із Γ та Δ.

Δ є *логічним наслідком* Γ (відносно ТМС певного типу), якщо $\Gamma\,{}_M\!\models\Delta$ для всіх ТМС $\boldsymbol{M}$ (які належать до цього типу). Цей факт позначаємо $\Gamma\models\Delta$.

Введене відношення $\models$ відповідає відношенню $\models_{IR}$ неспростовнісного логічного наслідку в логіках часткових однозначних квазіарних предикатів [3].

Із визначення випливає, що $\Gamma\not\models\Delta \Leftrightarrow$ існують ЗМС $\boldsymbol{M} = (S, R, A, Im)$ та $d\in {}^VA$:

для всіх $\Phi^\alpha\in\Gamma$ маємо $\Phi_\alpha(d)=T$ та для всіх $\Psi^\beta\in\Delta$ маємо $\Psi_\beta(d)=F$.

Немодальні властивості відношення $\models$ повторюють відповідні властивості відношення $\models_{IR}$ (див. [3]). Найперше це такі властивості:

M) Якщо $\Gamma\models\Delta$, $\Gamma\subseteq\Upsilon$ та $\Delta\subseteq\Sigma$, то $\Upsilon\models\Sigma$ (монотонність відношення $\models$);

C) $\Phi^\alpha,\Gamma\models\Delta,\Phi^\alpha$ (гарантована наявність відношення $\models$).

Властивості еквівалентних перетворень отримуються на основі наведених у [3] властивостей R, RI, RU, RR, R¬, R∨, R∃s, R∃. Кожна така властивість R∗ продукує дві відповідні властивості $R*_L$ та $R*_R$ для відношення |=, коли виділена формула знаходиться у лівій чи правій його частині. Наведемо тут для прикладу властивості, пов'язані з R, R∃s, R∃; інші такі властивості описано в [4].

R_L) $R(\Phi)^\alpha, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \Phi^\alpha, \Gamma \models \Delta$;

R_R) $\Gamma \models R(\Phi)^\alpha, \Delta \Leftrightarrow \Gamma \models \Phi^\alpha, \Delta$;

$R\exists s_L$) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi)^\alpha, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \exists y R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)^\alpha, \Gamma \models \Delta$ за умови $y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$;

$R\exists s_R$) $\Gamma \models \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi)^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \exists y R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)^\alpha$ за умови $y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}$;

$R\exists_L$) $R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi)^\alpha, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \exists z R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_z^y (\Phi)^\alpha, \Gamma \models \Delta$ за умови $z \in fu(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists x\Phi))$;

$R\exists_R$) $\Gamma \models \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi)^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \exists z R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_z^y (\Phi)^\alpha$ за умови $z \in fu(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists x\Phi))$.

До них додаємо властивості пронесення кванторів через реномінацію:

$R\Box_L$) $\Gamma, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Box\Phi)^\alpha \models \Delta \Leftrightarrow \Gamma, \Box R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)^\alpha \models \Delta$;

$R\Box_R$) $\Gamma \models \Delta, R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Box\Phi)^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Box R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)^\alpha$.

Властивості декомпозиції формул $\neg_L$, $\neg_R$, $\vee_L$, $\vee_R$ описано, зокрема, в [4].

Для елімінації кванторів використаємо предикати-індикатори *Ez* (див. [3]). Ці предикати задаємо так:

$E(z) = T$, якщо $d(z)\downarrow$; $E(z) = F$, якщо $d(z)\uparrow$.

Тепер наведемо властивості елімінації кванторів:

$\exists_L$) $\exists x\Phi^\alpha, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow R_z^x(\Phi)^\alpha, Ez^\alpha, \Gamma \models \Delta$ за умови $z \in fu(\Gamma, \Delta, \exists x\Phi)$);

$\exists v_R$) $\Gamma, Ey^\alpha \models \exists x\Phi^\alpha, \Delta \Leftrightarrow \Gamma, Ey^\alpha \models \exists x\Phi, R_y^x(\Phi)^\alpha, \Delta$.

Властивості *E*-розподілу та первісного означення:

Ed) $\Gamma \models \Delta \Leftrightarrow Ey^\alpha, \Gamma \models \Delta$ та $\Gamma \models \Delta, Ey^\alpha$.

Ev) $\Gamma \models \Delta \Leftrightarrow Ez^\alpha, \Gamma \models \Delta$ за умови $z \in fu(\Gamma, \Delta)$.

Властивості елімінації модальностей у загальному випадку:

$\Box_L$) $\Box\Phi^\alpha, \Gamma \models \Delta \Leftrightarrow \{\Phi^\beta \mid \alpha \rhd \beta\} \cup \Gamma \models \Delta$;

$\Box_R$) $\Gamma \models \Delta, \Box\Phi^\alpha \Leftrightarrow \Gamma \models \Delta, \Phi^\beta$ для всіх $\beta \in S$ таких, що $\alpha \rhd \beta$.

За наявності додаткових умов, накладених на $\rhd$, властивості елімінації модальностей певним чином модифікуються. Для випадків, коли $\rhd$ може бути транзитивними, рефлексивними чи симетричними, такі властивості наведено в [4].

3. Секвенційні числення загальних транзиційних модальних логік

Секвенції – це множини специфікованих станами формул. Специфікації мають вигляд $\alpha|\!-$ чи $\alpha\!-\!|$, де α – ім'я стану. Виділяючи $_{|-}$-формули та та $_{-|}$-формули, секвенції позначаємо як $_{|-}\Gamma_{-|}\Delta$. Для секвенції Σ та фіксованого α задаємо секвенцію $\Sigma_\alpha = \{_\sigma\Phi \mid \sigma = \alpha|\!-$ чи $\sigma = \alpha\!-\!|\}$ формул стану α. При побудові виведення збагачуємо секвенції збудованими на даний момент виведення множинами відношень на станах. Такі збагачені секвенції записуємо як Σ // *M*, де *M* – схема моделі світу, тобто збудоване на цей момент відношення досяжності, записане для імен станів.

Виведення в секвенційних численнях має вигляд дерева, вершинами якого є секвенції. Правилами виведення є секвенційні форми, вони задані властивостями відношення |=. Аксіомами є замкнені секвенції, для замкненої $_{|-}\Gamma_{-|}\Delta$ має бути $\Gamma \models \Delta$. Секвенційне дерево замкнене, якщо всі його листи – замкнені секвенції. Секвенція Σ вивідна, якщо існує замкнене секвенційне дерево з коренем Σ.

Для формул ТМЛ введемо поняття *Rs-Un*$_\alpha$-*еквівалентності* (перенесення на модальні логіки *Rs-Un*-еквівалентності [3]). Спочатку задамо множини означених, неозначених та нерозподілених імен стану α секвенції Σ, це робимо так:

$$val(\Sigma_\alpha) = \{u \mid {}_{\alpha|-}Eu \in \Sigma\};\ unv(\Sigma_\alpha) = \{u \mid {}_{\alpha-|}Eu \in \Sigma\};$$
$$ud(\Sigma_\alpha) = nm(\Sigma_\alpha) \setminus (val(\Sigma_\alpha) \cup unv(\Sigma_\alpha)).$$

Rs-формою R-формули $R_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}^{\bar{x},\bar{u},\bar{v}}(\Phi)$, де $\{\bar{u}\} \subseteq \nu(\Phi)$, назвемо формулу $R_{\bar{z}}^{\bar{v}}(\Phi)$, утворену із $R_{\bar{x},\bar{y},\bar{z}}^{\bar{x},\bar{u},\bar{v}}(\Phi)$ всеможливими спрощеннями зовнішньої реномінації на основі властивостей R, RI, RU. *R*-формули – це формули вигляду $R_{\bar{y}}^{\bar{x}}(\Phi)$.

Нехай $Un_\alpha = unv(\Sigma_\alpha)$, нехай $R_{\bar{s},\bar{y},\bar{v}}^{\bar{r},\bar{x},\bar{u}}\Phi$ така: $\{\bar{r},\bar{s},\bar{y}\} \subseteq Un_\alpha$, $\{\bar{x},\bar{v}\} \cap Un_\alpha = \varnothing$. *Un*$_\alpha$-*форма* формули $R_{\bar{s},\bar{y},\bar{v}}^{\bar{r},\bar{x},\bar{u}}\Phi$ – це $R_{\bar{\varepsilon},\bar{v}}^{\bar{x},\bar{u}}\Phi$, де $\varepsilon \notin V$ позначає відсутність значення.

R-формули Ψ та Ξ назвемо *Rs-Un*$_\alpha$-*еквівалентними*, якщо Ψ та Ξ мають однакові *Rs*-форми або ці *Rs*-форми мають однакові *Un*$_\alpha$-форми. Якщо *R*-формули Ψ та Ξ *Rs-Un*$_\alpha$-еквівалентні, то ¬Ψ та ¬Ξ теж назвемо *Rs-Un*$_\alpha$-еквівалентними.

Теорема 1. Якщо Ψ та Ξ – *Rs*-Un_α-еквівалентні, то $\Psi_\alpha(d) = \Xi_\alpha(d)$ для всіх d, для яких $Eu(d) = F$ для всіх $u \in Un_\alpha$, тобто $asn(d) \cap Un_\alpha = \varnothing$.

Отже, отримуємо таку умову замкненості секвенції Σ:

CS) існують α та Un_α-*unv*-еквівалентні ${}_{\alpha\vdash}\Phi$ та ${}_{\alpha\dashv}\Psi$ такі: ${}_{\alpha\vdash}\Phi \in \Sigma$ та ${}_{\alpha\dashv}\Psi \in \Sigma$;

зокрема, існують α та формула Φ така:

$${}_{\alpha\vdash}\Phi \in \Sigma \text{ та } {}_{\alpha\dashv}\Phi \in \Sigma.$$

Наведемо базові секвенційні форми. Форми еквівалентних перетворень:

$${}_{\vdash}\mathrm{RR}\ \frac{{}_{\alpha\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ {}_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi), \Sigma\ //\ M}{{}_{\alpha\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)), \Sigma\ //\ M}; \qquad {}_{\dashv}\mathrm{RR}\ \frac{{}_{\alpha\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ {}_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi), \Sigma\ //\ M}{{}_{\alpha\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(R_{\bar{y}}^{\bar{w}}(\Phi)), \Sigma\ //\ M};$$

$${}_{\vdash}\mathrm{R}\neg\ \frac{{}_{\alpha\vdash}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Sigma\ //\ M}{{}_{\alpha\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi), \Sigma\ //\ M}; \qquad {}_{\dashv}\mathrm{R}\neg\ \frac{{}_{\alpha\dashv}\neg R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Sigma\ //\ M}{{}_{\alpha\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\neg\Phi), \Sigma\ //\ M};$$

$${}_{\vdash}\mathrm{R}\vee\ \frac{{}_{\alpha\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Sigma\ //\ M \qquad {}_{\alpha\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi), \Sigma\ //\ M}{{}_{\alpha\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi), \Sigma\ //\ M}; \qquad {}_{\dashv}\mathrm{R}\vee\ \frac{{}_{\alpha\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), {}_{\alpha\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Psi), \Sigma\ //\ M}{{}_{\alpha\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi \vee \Psi), \Sigma\ //\ M};$$

$${}_{\vdash}\mathrm{R}\exists\mathrm{s}\ \frac{{}_{\alpha\vdash}\exists y R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Sigma\ //\ M}{{}_{\alpha\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi), \Sigma\ //\ M}, \text{ де } y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\}; \qquad {}_{\dashv}\mathrm{R}\exists\mathrm{s}\ \frac{{}_{\alpha\dashv}\exists y R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Sigma\ //\ M}{{}_{\alpha\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi), \Sigma\ //\ M}, \text{ де } y \notin \{\bar{v}, \bar{x}\};$$

$${}_{\vdash}\mathrm{R}\exists\ \frac{{}_{\alpha\vdash}\exists z R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_z^y(\Phi), \Sigma\ //\ M}{{}_{\alpha\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists y\Phi), \Sigma\ //\ M}; \qquad {}_{\dashv}\mathrm{R}\exists\ \frac{{}_{\alpha\dashv}\exists z R_{\bar{x}}^{\bar{v}} \circ_z^y(\Phi), \Sigma\ //\ M}{{}_{\alpha\dashv}R_{\bar{u}}^{\bar{v}}(\exists x\Phi), \Sigma\ //\ M}.$$

Для ${}_{\vdash}$R∃ і ${}_{\dashv}$R∃ умова: $z \in fu(R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\exists x\Phi))$.

$${}_{\vdash}\mathrm{R}\Box\ \frac{{}_{\alpha\vdash}\Box R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Sigma\ //\ M}{{}_{\alpha\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Box\Phi), \Sigma\ //\ M}; \qquad {}_{\dashv}\mathrm{R}\Box\ \frac{{}_{\alpha\dashv}\Box R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi), \Sigma\ //\ M}{{}_{\alpha\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Box\Phi), \Sigma\ //\ M}.$$

Подібний вигляд мають *допоміжні* форми спрощення ${}_{\vdash}$R, ${}_{\dashv}$R, ${}_{\vdash}$RI, ${}_{\dashv}$RI, ${}_{\vdash}$RU, ${}_{\dashv}$RU. Перетворення на їх основі вже закладено в умову CS, адже для встановлення *Rs*-Un_α-еквівалентності формул на базі R, RI, RU будуємо їх *Rs*-форми.

Форми декомпозиції формул, елімінації кванторів та *E*-розподілу:

$${}_{\vdash}\neg\ \frac{{}_{\alpha\dashv}\Phi, \Sigma\ //\ M}{{}_{\alpha\vdash}\neg\Phi, \Sigma\ //\ M}; \qquad {}_{\dashv}\neg\ \frac{{}_{\alpha\vdash}\Phi, \Sigma\ //\ M}{{}_{\alpha\dashv}\neg\Phi, \Sigma\ //\ M};$$

$${}_{\vdash}\vee\ \frac{{}_{\alpha\vdash}\Phi, \Sigma\ //\ M \qquad {}_{\alpha\vdash}\Psi, \Sigma\ //\ M}{{}_{\alpha\vdash}\Phi \vee \Psi, \Sigma\ //\ M}; \qquad {}_{\dashv}\vee\ \frac{{}_{\alpha\dashv}\Phi, {}_{\alpha\dashv}\Psi, \Sigma\ //\ M}{{}_{\alpha\dashv}\Phi \vee \Psi, \Sigma\ //\ M};$$

$${}_{\vdash}\exists\ \frac{{}_{\alpha\vdash}R_z^x(\Phi), {}_{\alpha\vdash}Ez, \Sigma\ //\ M}{{}_{\alpha\vdash}\exists x\Phi, \Sigma\ //\ M}, \text{ де } z \in fu(\Sigma, \exists x\Phi);$$

$${}_{\dashv}\exists\mathrm{v}\ \frac{{}_{\alpha\dashv}\exists x\Phi, {}_{\alpha\dashv}R_y^x(\Phi), {}_{\alpha\vdash}Ey, \Sigma\ //\ M}{{}_{\alpha\dashv}\exists x\Phi, {}_{\alpha\vdash}Ey, \Sigma\ //\ M};$$

$$\mathrm{Ed}\ \frac{{}_{\alpha\vdash}Ex,\ \Sigma\ //\ M \qquad {}_{\alpha\dashv}Ex,\ \Sigma\ //\ M}{\Sigma}, \text{ де } {}_{\alpha\vdash}Ex, {}_{\alpha\dashv}Ex \notin \Sigma.$$

Форми *елімінації модальних операторів* залежать від властивостей $\rhd$. Традиційно $\rhd$ може бути рефлексивним, транзитивним чи симетричним. Це дає (див. також [4]) різновиди чистих першопорядкових числень загальних ТМЛ.

1. *На $\rhd$ не накладені додаткові умови*. Маємо *CMG*-числення.

Якщо в момент застосування форми до ${}_{\alpha\vdash}\Box\Phi$ маємо стани $\beta_1, \ldots, \beta_n$ такі, що $\alpha \rhd \beta_1, \ldots, \alpha \rhd \beta_n$, то до ${}_{\alpha\vdash}\Box\Phi$ застосовуємо

$${}_{\vdash}\Box\ \frac{{}_{\alpha\vdash}\Box\Phi, {}_{\beta_1\vdash}\Phi, \ldots, {}_{\beta_n\vdash}\Phi,\ \Sigma\ //\ M}{{}_{\alpha\vdash}\Box\Phi, \Sigma\ //\ M}.$$

Якщо ж таких γ, що $\alpha \rhd \gamma$, немає, то до ${}_{\alpha\vdash}\Box\Phi$ застосовуємо форму

$${}_{\vdash}\Box\mathrm{f}\ \frac{{}_{\alpha\vdash}\Box\Phi, {}_{\beta\vdash}\Phi, \Sigma\ //\ M \cup \{\alpha \rhd \beta\}}{{}_{\alpha\vdash}\Box\Phi,\ \Sigma\ //\ M}, \ \beta \text{ – новий стан.}$$

Форма елімінації, яка застосовується до ${}_{\alpha\dashv}\Box\Phi$:

$${}_{\dashv}\Box\ \frac{{}_{\beta\dashv}\Phi, \Sigma\ //\ M \cup \{\alpha \rhd \beta\}}{{}_{\alpha\dashv}\Box\Phi,\ \Sigma\ //\ M}, \ \beta \text{ – новий стан.}$$

2. $\rhd$ *рефлексивне.* Маємо *CMG_R*-числення. Завжди маємо $\alpha \rhd \alpha$.

До ${}_{\alpha\vdash}\Box\Phi$ застосовуємо форму ${}_{\vdash}\Box$ для всіх станів $\beta_1, \ldots, \beta_n$ таких, що в момент її застосування $\alpha \rhd \beta_1, \ldots, \alpha \rhd \beta_n$. Форма, яка застосовується до ${}_{\alpha\dashv}\Box\Phi$:

$$_{-|}\Box\mathrm{R}\ \frac{_{\beta-|}\Phi,\Sigma\ //\ M\cup\{\alpha\rhd\beta,\beta\rhd\beta\}}{_{\alpha-|}\Box\Phi,\ \Sigma\ //\ M},\ \beta\text{ – новий}$$

стан.

3. $\rhd$ *симетричне.* Маємо *CMG_S*-числення. Завжди маємо $\alpha\rhd\beta\Leftrightarrow\beta\rhd\alpha$.

Якщо в момент застосування форми до $_{\alpha|-}\Box\Phi$ маємо стани $\beta_1, \ldots, \beta_n$ такі, що $\alpha\rhd\beta_1,\ldots,\alpha\rhd\beta_n$, то застосовуємо $_{|-}\Box$. Якщо немає таких γ: $\alpha\rhd\gamma$, то застосовуємо

$$_{|-}\Box\mathrm{fS}\ \frac{_{\alpha|-}\Box\Phi,\ _{\beta|-}\Phi,\Sigma\ //\ M\cup\{\alpha\rhd\beta,\beta\rhd\alpha\}}{_{\alpha|-}\Box\Phi,\ \Sigma\ //\ M},\ \beta\text{ – новий}$$

стан.

До $_{\alpha-|}\Box\Phi$ застосовується така форма:

$$_{-|}\Box\mathrm{S}\ \frac{_{\beta-|}\Phi,\Sigma\ //\ M\cup\{\alpha\rhd\beta,\beta\rhd\alpha\}}{_{\alpha-|}\Box\Phi,\ \Sigma\ //\ M},\ \beta\text{ – новий стан.}$$

4. $\rhd$ *рефлексивне та симетричне.* Отримуємо *CMG_RS*-числення.

До $_{\alpha|-}\Box\Phi$ застосовуємо $_{|-}\Box$ для всіх $\beta_1, \ldots, \beta_n$ таких, що $\alpha\rhd\beta_1,\ldots,\alpha\rhd\beta_n$ в момент її застосування; тут маємо $\alpha\rhd\alpha$ та $\alpha\rhd\beta\Leftrightarrow\beta\rhd\alpha$. До $_{\alpha-|}\Box\Phi$ застосовується

$$_{-|}\Box\mathrm{RS}\ \frac{_{\beta-|}\Phi,\Sigma\ //\ M\cup\{\alpha\rhd\beta,\beta\rhd\alpha,\beta\rhd\beta\}}{_{\alpha-|}\Box\Phi,\ \Sigma\ //\ M},\ \beta\text{ – новий}$$

стан.

5. $\rhd$ *транзитивне.* Маємо *CMG_T*-числення.

До $_{\alpha-|}\Box\Phi$ застосовуємо форму $_{-|}\Box$. Якщо в момент застосування форми до $_{\alpha|-}\Box\Phi$ маємо стани $\beta_1, \ldots, \beta_n$ такі, що $\alpha\rhd\beta_1,\ldots,\alpha\rhd\beta_n$, то застосовуємо

$$_{|-}\Box\mathrm{T}\ \frac{_{\alpha|-}\Box\Phi,\ _{\beta_1|-}\Phi,\ldots,\ _{\beta_n|-}\Phi,\ _{\beta_1|-}\Box\Phi,\ldots,\ _{\beta_n|-}\Box\Phi,\ \Sigma\ //\ M}{_{\alpha|-}\Box\Phi,\Sigma\ //\ M}.$$

Якщо ж таких γ, що $\alpha\rhd\gamma$, немає, то застосовуємо форму:

$$_{|-}\Box\mathrm{fT}\ \frac{_{\alpha|-}\Box\Phi,\ _{\beta|-}\Phi,\ _{\beta|-}\Box\Phi,\ \Sigma\ //\ M\cup\{\alpha\rhd\beta\}}{_{\alpha|-}\Box\Phi,\ \Sigma\ //\ M},$$

β – новий стан.

6. $\rhd$ *транзитивне й рефлексивне.* Маємо *CMG_RT*-числення.

До $_{\alpha-|}\Box\Phi$ застосовуємо форму $_{-|}\Box\mathrm{R}$. До $_{\alpha|-}\Box\Phi$ застосовуємо форму $_{|-}\Box\mathrm{T}$ для всіх станів $\beta_1, \ldots, \beta_n$ таких, що в момент її застосування $\alpha\rhd\beta_1,\ldots,\alpha\rhd\beta_n$.

7. $\rhd$ *транзитивне й симетричне.* Отримуємо *CMG_TS*-числення.

До $_{\alpha-|}\Box\Phi$ застосовуємо форму $_{-|}\Box\mathrm{S}$. Якщо в момент застосування форми до $_{\alpha|-}\Box\Phi$ маємо стани $\beta_1, \ldots, \beta_n$ такі, що $\alpha\rhd\beta_1,\ldots,\alpha\rhd\beta_n$, то застосовуємо $_{|-}\Box\mathrm{T}$. Якщо немає таких γ, що $\alpha\rhd\gamma$, то застосовуємо

$$_{|-}\Box\mathrm{fTS}\ \frac{_{\alpha|-}\Box\Phi,\ _{\beta|-}\Phi,\ _{\beta|-}\Box\Phi,\Sigma\ //\ M\cup\{\alpha\rhd\beta,\beta\rhd\alpha\}}{_{\alpha|-}\Box\Phi,\ \Sigma\ //\ M},$$

β – новий стан.

8. $\rhd$ *транзитивне, рефлексивне й симетричне.* Маємо *CMG_RTS*-числення.

До $_{\alpha-|}\Box\Phi$ застосовуємо форму $_{-|}\Box\mathrm{RS}$. До $_{\alpha|-}\Box\Phi$ застосовуємо форму $_{|-}\Box\mathrm{T}$ для всіх станів $\beta_1, \ldots, \beta_n$ таких, що в момент її застосування $\alpha\rhd\beta_1,\ldots,\alpha\rhd\beta_n$.

Теорема 2.

Нехай $\dfrac{_{|-}\Lambda_{-|}\mathrm{K}\ //\ \mathrm{M}}{_{|-}\Gamma_{-|}\Delta\ //\ \mathrm{M}}$ та $\dfrac{_{|-}\Lambda_{-|}\mathrm{K}\ //\ \mathrm{M}\quad _{|-}\mathrm{X}_{-|}\mathrm{Z}\ //\ \mathrm{M}}{_{|-}\Gamma_{-|}\Delta\ //\ \mathrm{M}}$ – секвенційні форми. Тоді: 1) $\Lambda\models\mathrm{K}\Rightarrow\Gamma\models\Delta$; $\Lambda\models\mathrm{K}$ та $\mathrm{X}\models\mathrm{Z}\Rightarrow\Gamma\models\Delta$;

2) $\Gamma\not\models\Delta\Rightarrow\Lambda\not\models\mathrm{K}$; $\Gamma\not\models\Delta\Rightarrow\Lambda\not\models\mathrm{K}$ або $\mathrm{X}\not\models\mathrm{Z}$.

Побудова виведення (секвенційного дерева) в численні ТМЛ немонотонних предикатів загалом аналогічна такій побудові для ТМЛ еквітонних предикатів [5]. Основна відмінність – особливості застосування форми $_{-|}\exists$. Нехай при побудові виведення секвенції Σ застосовуємо $_{-|}\exists\mathrm{v}$ до формули $_{\alpha-|}\exists x\Phi$ в секвенції η. Нехай Ξ – множина доступних формул секвенцій на шляху від Σ до η, нехай $Ud_\alpha = ud(\Xi_\alpha)$. Якщо при переході до застосування $_{-|}\exists\mathrm{v}$ маємо $Ud_\alpha\neq\varnothing$, то за допомогою форми Ed робимо всеможливі розподіли імен із Ud_α на означені та неозначені. Це веде до побудови піддерева висоти $|Ud_\alpha|$ з вершиною η, що дає $m = 2^{|Ud_\alpha|}$ наступників η –$\eta_1,\ldots,\eta_m$ з множинами $Vn_{\alpha k}\subseteq Ud_\alpha$ нових означених імен. Якщо $val(\Xi_\alpha) = \varnothing$, то для тієї η_j, де $Vn_{\alpha j} = \varnothing$, додаємо $_{\alpha|-}Ez$ для нового тотально неістотного імені z, що дає $Vn_{\alpha j} = \{z\}$. В кожній з цих η_k застосовуємо $_{-|}\exists\mathrm{v}$ до $_{\alpha-|}\exists x\Phi$ для кожного $y\in Vn_{\alpha k}$.

При побудові секвенційного дерева можливі такі ситуації:

1. Побудова завершена позитивно, маємо скінченне замкнене дерево.

2. Побудова завершена негативно, тоді маємо скінченне незамкнене дерево, або не завершується, тоді дерево нескінченне. В такому дереві існує скінченний або нескінченний незамкнений шлях $\wp$, всі його вершини – незамкнені секвенції. Кожна з формул секвенції Γ зустрінеться на $\wp$ і стане доступною.

Теорема 3 (коректності). Нехай секвенція $_{|-}\Gamma_{-|}\Delta$ вивідна. Тоді $\Gamma\models\Delta$.

Нехай $_{|-}\Gamma_{-|}\Delta$ вивідна, тоді для неї побудоване замкнене секвенційне дерево. Кожен його лист $_{|-}\mathrm{X}_{-|}\mathrm{Z}$ – замкнена секвенція, тому $\mathrm{X}\models\mathrm{Z}$. Рух від листів дерева до його кореня робимо за допомогою секвенційних форм, які зберігають відношення $\models$ згідно з теоремою 2. Тому для кожної вершини секвенційного дерева ${}_{\vdash}\Lambda_{\dashv}\mathrm{K}$ маємо $\Lambda\models\mathrm{K}$. Зокрема, для секвенції ${}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ – кореня дерева – теж маємо $\Gamma\models\Delta$.

Доведення повноти секвенційних числень ТМЛ спирається на метод систем модельних множин. Система модельних множин – це пара $(\{H_\alpha \mid \alpha\in S\}, M)$, де кожна H_α – модельна множина стану α, M – схема моделей світу, яка задається R.

Для множин H_α задаємо $Un_\alpha = unv(H_\alpha)$, $W_\alpha = nm(H_\alpha) \setminus Un_\alpha$.

Модельна множина стану H_α визначається умовою коректності та умовами переходу. Умова коректності індукується умовою замкнености секвенції:

МС) не існує Rs-Un_α-еквівалентних формул Φ та Ψ: ${}_{\alpha\vdash}\Phi\in H_\alpha$ та ${}_{\alpha\dashv}\Psi\in H_\alpha$.

Умови переходу індуковані виконанням відповідних секвенційних форм. Наведемо для прикладу умови для форм елімінації кванторів та модальностей:

$$\mathrm{M}\exists)\ {}_{\alpha\vdash}\exists x\Phi\in H_\alpha \Rightarrow \text{існує } y\in W_\alpha\text{: } {}_{\alpha\vdash}R_y^x(\Phi)\in H_\alpha;$$

$${}_{\alpha\dashv}\exists x\Phi\in H_\alpha \Rightarrow {}_{\alpha\dashv}R_y^x(\Phi)\in H_\alpha \text{ для всіх } y\in W_\alpha;$$

$$\mathrm{M}\Box)\ {}_{\alpha\vdash}\Box\Phi\in H_\alpha \Rightarrow {}_{\beta\vdash}\Phi\in H_\beta \text{ для всіх } \beta\in S \text{ таких, що } \alpha\rhd\beta;$$

$${}_{\alpha\dashv}\Box\Phi\in H_\alpha \Rightarrow {}_{\beta\dashv}\Phi\in H_\beta \text{ для деякого } \beta\in S \text{ такого, що } \alpha\rhd\beta.$$

Умови для форм еквівалентних перетворень задаємо однотипно. Наприклад:

$$\mathrm{MR}\Box)\ {}_{\alpha\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Box\Phi)\in H_\alpha \Rightarrow {}_{\alpha\vdash}\Box R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in H_\alpha;$$

$${}_{\alpha\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Box\Phi)\in H_\alpha \Rightarrow {}_{\alpha\dashv}\Box R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\Phi)\in H_\alpha.$$

Теорема 4 (про контрмодель). Нехай $\wp$ – незамкнений шлях у секвенційному дереві, H_α – множина всіх специфікованих формул стану α на шляху $\wp$, M – об'єднання усіх схем моделей світу секвенцій шляху $\wp$, $\mathrm{H}_M = (\{H_\alpha \mid \alpha\in S\}, M)$, $W = \bigcup_{\alpha\in S} W_\alpha$. Тоді існують ЗМС $M = (S, R, A, Im)$ та $\delta\in{}^V\!A$ з $asn(\delta) = W$ такі:

1) ${}_{\alpha\vdash}\Phi\in H_\alpha \Rightarrow \Phi_\alpha(\delta) = T$;

2) ${}_{\alpha\dashv}\Phi\in H_\alpha \Rightarrow \Phi_\alpha(\delta) = F$.

Подібно тому, як це описано в [5], показуємо, що H_M – система модельних множин. Візьмемо множину A таку, що $|A| = |W|$, та ін'єктивну $\delta\in{}^V\!A$ з $asn(\delta) = W$. Така δ є бієкцією W на A, вона розпадається на бієкції $\delta_\alpha : W_\alpha\to A_\alpha$.

Задамо значення базових предикатів на δ та на даних вигляду $\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta)$:

$${}_{\alpha\vdash}Ey\in H \Rightarrow Ey(\delta_\alpha) = T,\ {}_{\alpha\dashv}Ey\in H \Rightarrow Ey(\delta_\alpha) = F;$$

$${}_{\alpha\vdash}p\in H \Rightarrow p_\alpha(\delta) = T,\ {}_{\alpha\dashv}p\in H \Rightarrow p_\alpha(\delta) = F;$$

$${}_{\alpha\vdash}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p)\in H \Rightarrow p_\alpha(\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta)) = R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p)_\alpha(\delta) = T;$$

$${}_{\alpha\dashv}R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p)\in H \Rightarrow p_\alpha(\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(\delta)) = R_{\bar{x}}^{\bar{v}}(p)_\alpha(\delta) = F.$$

Далі доводимо індукцією за складністю формули згідно з побудовою H_M.

Теорема 5 (повноти). Нехай $\Gamma\models\Delta$. Тоді секвенція ${}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ вивідна.

Нехай супротивне: $\Gamma\models\Delta$, тобто $\Gamma_G\models\Delta$ для кожної узгодженої ЗМС $\boldsymbol{G}$, проте $\Sigma = {}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$ невивідна. Тоді в секвенційному дереві для Σ існує незамкнений шлях. За теоремою 4 існують ЗМС $\boldsymbol{M}$ та $\delta\in{}^V\!A$: ${}_{\alpha\vdash}\Phi\in H_\alpha \Rightarrow \Phi_\alpha(\delta) = T$ та ${}_{\alpha\dashv}\Phi\in H_\alpha \Rightarrow \Phi_\alpha(\delta) = F$. Це вірно і для формул секвенції ${}_{\vdash}\Gamma_{\dashv}\Delta$, тому $\Phi_\alpha(\delta) = T$ для всіх $\Phi^\alpha\in\Gamma$ та $\Psi_\beta(\delta) = F$ для всіх $\Psi^\beta\in\Delta$. Звідси $\Gamma_M\not\models\Delta$, тому $\Gamma\not\models\Delta$. Маємо суперечність, що й доводить теорему.

Висновки

У роботі досліджено програмно-орієнтовні логічні формалізми – чисті першопорядкові транзиційні модальні логіки немонотонних предикатів. Описано семантичні аспекти цих логік, розглянуто властивості відношення логічного наслідку для множин специфікованих станами формул. На цій основі для таких логік побудовано числення секвенційного типу. Характерна їхня особливість – розширені умови замкнености секвенції, нові форми елімінації модальностей та форми елімінації кванторів, що враховують немонотонність. Описано різновиди цих числень, для них доведено теореми коректності й повноти.

Список літератури

1. Нікітченко М. С. Математична логіка та теорія алгоритмів / М. С. Нікітченко, С. С. Шкільняк. – К. : ВПЦ Київський університет, 2008. – 528 с.
2. Нікітченко М. С. Прикладна логіка / М. С. Нікітченко, С. С. Шкільняк. – К. : ВПЦ Київський університет, 2013. – 278 с.
3. Нікітченко М. С. Чисті першопорядкові логіки квазіарних предикатів / М. С. Нікітченко, О. С. Шкільняк, С. С. Шкільняк // Пробл. програмування. – 2016. – № 2–3. – С. 73–86.
4. Шкільняк О. С. Модальні логіки немонотонних часткових предикатів / О. С. Шкільняк // Вісник Київського ун-ту. Серія : фіз.-мат. науки. – 2015. – Вип. 3. – С. 141–147.
5. Шкільняк О. С. Транзиційні композиційно-номінативні модальні логіки та їх числення / О. С. Шкільняк // Наук. записки НаУКМА. – Т. 151 : Комп'ютерні науки. – 2013. – С. 48–54.
6. Шкільняк О. С. Транзиційні модальні логіки немонотонних квазіарних предикатів / О. С. Шкільняк // Компьютерная математика. – 2014. – Вип. 2.– С. 99–110.
7. Cocchiarella N. B. Modal logic / N. B. Cocchiarella, M. A. Freund. – Oxford University Press, 2008.– 267 p.
8. Shkilniak O. Modal Logics of Partial Predicates without Monotonicity Restriction / O. Shkilniak // Workshop on Foundations of Informatics: Proceedings FOI-2015. August 24–29, 2015, Chisinau, Moldova. – P. 198–211.

V. Kasyanuk, L. Malutenko, O. Shkilniak

SEQUENT CALCULI OF COMPOSITION OF NOMINATIVE MODAL LOGICS OF NON-MONOTONE PREDICATES

Modal logics give tools which help to efficiently solve a variety of problems in informatics and programming. Classical predicate logic is the basis for traditional modal logics. However, classical logic does not allow sufficiently taking into account incompleteness and partiality of information. This leads to a problem of construction of program-oriented logical formalisms. Composition of nominative modal logics could be such a formalism combining capabilities of logics of partial quasi-ary predicates and traditional modal logics. Modal transitional logics (MTL), their important variant, can adequately represent changes and development of subject-domains.

Effective reasoning may be a key part of many information and program systems. Sequent calculus is an efficient Gentzen-style deduction system. Sequent calculi are a formalization of logical consequence, one of the central concepts of logic.

This paper studies pure first-order MTL of partial quasi-ary predicates without monotonicity restriction and construct sequent calculi for them. We define multimodal, temporal and general MTL. It is sufficient to consider only general MTL (GTL); obtained results can be carried to multimodal and temporal MTL. We describe languages and semantic models of pure first-order MTL and logical consequence relations for sets of specified with state names formulae. Basing on properties of the defined relations, we construct sequent calculi for GTL of non-monotone predicates. Their distinctive features include extended conditions for sequent closure, new sequent forms for elimination of modalities and forms for quantifier elimination respecting non-monotonicity. Depending on restrictions imposed on the transition relation, various classes of GTL can be introduced. We consider most conventional cases: the relation can be reflexive, symmetric, or transitive (or their combination). This leads to a number of different sequent forms for modalities elimination, and correspondingly, of different variants of sequent calculi. For the specified calculi, we describe a derivation procedure and prove the soundness and completeness theorems.

Keywords: modal logic, predicate, logical consequence, sequent calculus.

Матеріал надійшов 20.09.2016