МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

Вдовенко Т. І.

ДУАЛЬНА ПАРА ВЛАСНИХ ЗНАЧЕНЬ СИНГУЛЯРНО НЕСИМЕТРИЧНО РАНГУ ОДИН ЗБУРЕНИХ ОПЕРАТОРІВ

Розглядається задача на власні значення сингулярного несамоспряженого збурення рангу один самоспряженого оператора A несиметричним потенціалом ($\delta_1 \neq \delta_2$) у вигляді $\tilde{A} = A + \alpha\langle\cdot, \delta_1\rangle\delta_2$. Надається конструтивний опис оператора вигляду $\tilde{A}$, що має дві нові точки точкового спектра у випадку слабо сингулярного збурення.

Ключові слова: сингулярні збурення рангу один, задача на власні значення, формула М. Крейна, несамоспряжене збурення, аргумент відхилення.

Вступ

Багато публікацій (див. наприклад [1; 5] і посилання тут) були присвячені конструктивному опису і дослідженню спектральних властивостей формального виразу

$$-\Delta + \alpha\delta(x - x_0), \tag{1}$$

де $\Delta = \frac{d^2}{dx^2}$ — оператор Лапласа, збурений $\delta(x - x_0)$-потенціалом, зосередженим у точці $x_0 \in \mathbb{R}$ і $\alpha \in \mathbb{R}$ — константа зв'язку.

Формальний вираз (1) має більш точне визначення сингулярного самоспряженого збурення [1; 5] у вигляді

$$-\tilde{\Delta} := -\Delta + \alpha\langle\cdot, \delta(x - x_0)\rangle\delta(x - x_0), \tag{2}$$

де $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $\delta(x - x_0) \in \mathcal{H}_{-2} := W_2^{-2}(\mathbb{R}^1)$ — негативний соболівський простір відповідний $W_2^2(\mathbb{R}^1)$ і $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — дуальний для $W_2^2(\mathbb{R}^1)$ і $W_2^{-2}(\mathbb{R}^1)$ скалярний добуток. Визначений в (2) оператор $-\tilde{\Delta}$ діє таким чином:

$$-\tilde{\Delta} f = -f'' + \alpha f(x_0)\delta(x - x_0), \tag{3}$$

на векторах $f \in \mathfrak{D}(\tilde{\Delta}) = \big\{f \in W_2^1(\mathbb{R}) \cap W_2^2(\mathbb{R} \setminus \{x_0\}) \mid f'(x_0+) - f'(x_0-) = \alpha f(x_0)\big\}$ [1; 5].

В цій статті розглядається узагальнення (2), (3) вигляду:

$$\begin{gathered} -\tilde{\Delta} f = -\Delta f + \alpha f(x_1)\delta(x - x_2), \\ x_1 \neq x_2, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \\ \mathfrak{D}(\tilde{\Delta}) = \big\{f \in W_2^2(\mathbb{R}^1 \setminus \{x_1\}) \mid f(x_1+) = f(x_1-), \\ f'(x_2+) - f'(x_2-) = \alpha f(x_1)\big\}. \end{gathered} \tag{4}$$

Якщо $x_1 = x_2$ і $\alpha \in \mathbb{R}$, то отримуємо звичайний добре відомий випадок (2). Таким чином ми приходимо до дослідження і вивчення побудови і спектральних властивостей сингулярного збурення рангу один вигляду

$$\tilde{A} = A + \alpha\langle\cdot, \omega_1\rangle\omega_2, \quad \omega_1, \omega_2 \in \mathcal{H}_{-1} \setminus \mathcal{H}, \tag{5}$$

де $A = A^*$ самоспряжений оператор в гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_{-1}$ — простір з A-шкали просторів (див. нижче) і $\alpha \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Очікувані спектральні властивості оператора $-\tilde{\Delta}$ в (4), (також $\tilde{A}$ в (5)) відрізняються від $-\tilde{\Delta}$ в (3), оскільки $\tilde{A}$ в (5) несамоспряжений оператор. Але багато стандартних фактів теорії сингулярних збурень самоспряжених операторів [5; 12] та їхні спектральні властивості мають також відповідні аналоги для виразів (4) та (5).

Якщо в (5) маємо $\omega_1 = \omega_2$ і $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, то приходимо до звичайної теорії самоспряжених сингулярних збурень [5; 6; 12]. Отже, розглядаючи вирази вигляду (5), отримуємо деяке природне узагальнення теорії сингулярних збурень.

Наше дослідження має нетривіальний перетин із загальними міркуваннями, які подані в [14]. В [14] автори розглядають замість одного ермітового оператора загальний об'єкт — відношення і всі його відповідні розширення. Інтерес до таких операторів ми бачимо також у [13]. У наших дослідженнях ми дійсно можемо спостерігати пару симетричних операторів з індексами дефекту (1,1) обидва, що містять лише деякий клас несиметричних розширень. Представлені дослідження мають частково спільні ідеї з [7], де розглядаються збурені нормальні оператори. Хвильові оператори, відповідні (5) у випадку $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{H}$ були активно досліджені в [10]. Також до (4) відносяться результати [4; 16; 17], присвячені нелокальній спектральній задачі (але у випадку самоспряжених збурень).

Питання: за яких умов оператори Шредінгера мають точковий спектр, занурений у неперервний, є складним з фізичної точки зору. Вивчення цього випадку є особливо безперспективним тому, що існують вагомі фізичні причини очікувати, що таких власних значень не повинно бути [18]. Тим не менш, відомий приклад Джона фон Неймана (1929), в якому описується Гамільтоніан, збурений гладким потенціалом, так що збурений оператор набуває когерентних станів всередині неперервного спектра. Основні аспекти такого роду досліджень в основному зосереджені на тому, щоб уникнути появи власних значень, вкладених в неперервний спектр, оскільки це створює труднощі при дослідженнях у теорії розсіяння. Але праця [3] містить опис несподіваної появи: сингулярно збурений самоспряжений оператор рангу один набуває два нові власні значення так, що одне з них занурене в неперервний спектр незбуреного (заданого) оператора.

Оскільки дослідження сингулярно збурених операторів розширюється на випадок збурених несиметричним потенціалом [8], слід очікувати асоційовані пари і при сингулярних збуреннях несиметричними потенціалами рангу один. В цілому ця робота присвячена опису відповідної пари в нашому несиметричному випадку.

Перевагою підходу [3] є таке: запропонована в [3] побудова гарантує, що сингулярно збурений самоспряжений оператор рангу один $\tilde{A} = A + \alpha\langle\cdot,\omega\rangle\omega$ має дві нові точки в точковому спектрі $\lambda, \mu \in \sigma_p(\tilde{A})$, тобто $\tilde{A}\varphi_\lambda = \lambda\varphi_\lambda$, $\tilde{A}\varphi_\mu = \mu\varphi_\mu$ так, що $\mu \in \rho(A)$ і $\lambda \in \sigma_c(A)$. Відповідно до побудови ми маємо обрати довільне $\mu \in \rho(A)$, $\varphi_\lambda \in \mathcal{H}\backslash\mathfrak{D}(A)$ і обчислити λ та φ_μ. Справді, якщо спочатку вибрати φ_μ, то можна гарантувати злічену множину власних значень, занурених в $\sigma_c(A)$, що не так і не несподівано.

Насправді, ми досліджуємо обернену задачу на власні значення для збурень несиметричним потенціалом. А саме, ми розглядаємо збурення (5), що розв'язує задачу на власні значення для дуальної пари $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$:

$$\begin{gathered}\tilde{A}\varphi_\lambda = \lambda\varphi_\lambda, \qquad \tilde{A}\varphi_\mu = \mu\varphi_\mu,\\ \tilde{A}^*\psi_{\bar{\lambda}} = \bar{\lambda}\psi_{\bar{\lambda}}, \qquad \tilde{A}^*\psi_{\bar{\mu}} = \bar{\mu}\psi_{\bar{\mu}},\\ (\bar{\lambda} - \bar{\mu})((A-\mu)^{-1}\varphi_\lambda, \psi_{\bar{\lambda}}) = (\varphi_\lambda, \psi_{\bar{\lambda}}).\end{gathered}$$

Зауважимо, що якщо $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$, то ми отримуємо випадок, близький до самоспряженого [3]. Але в такому випадку також можемо отримати дуальну пару власних значень із різними власними векторами відповідним $\tilde{A}$ та $\tilde{A}^*$.

Для реалізації наших ідей ми використовуємо математичні методи з [8]. Такі методи у випадку самоспряженого оператора ($\tilde{A} = \tilde{A}^*$) були використані в [2].

Попередні результати

Нехай $A = A^*$ самоспряжений необмежений оператор, визначений на $\operatorname{Dom} A = \mathfrak{D}(A)$ в сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ із скалярним добутком $(\cdot,\cdot)$ і нормою $\|\cdot\|$. Позначимо $\sigma(\cdot)$, $\sigma_p(\cdot)$, $\sigma_c(\cdot)$, $\rho(\cdot)$ спектр, точковий спектр, неперервний спектр і регулярні точки, відповідного цього оператора.

Означення 1 ([8])**.** Лінійний замкнений оператор $\tilde{A} \neq A$, щільно визначений в $\mathcal{H}$, називається сингулярно-сингулярно збуреним ((s,s)-збуренням) A, якщо обидві множини

$$\mathfrak{D} = \{f \in \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(\tilde{A}) \mid Af = \tilde{A}f\}, \tag{6}$$

$$\mathfrak{D}_* = \{f \in \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(\tilde{A}^*) \mid Af = \tilde{A}^*f\} \tag{7}$$

щільні в $\mathcal{H}$. Позначимо $\tilde{A} \in \mathcal{P}_{s,s}(A)$.

Зауважимо, що $\tilde{A}$ — взагалі несамоспряжений оператор.

Зрозуміло, що для кожного оператора $\tilde{A} \in \mathcal{P}_{s,s}(A)$ існує пара щільно визначених симетричних обмежених операторів $\dot{A} := A \restriction \mathfrak{D}$ та $\dot{A}_* := A \restriction \mathfrak{D}_*$ з нетривіальними індексами дефекту $\mathbf{n}^\pm(\dot{A}) = \dim\ker(\dot{A} \mp z)^* \neq 0$ і $\mathbf{n}^\pm(\dot{A}_*) = \dim\ker(\dot{A}_* \mp z)^* \neq 0$, $z \in \rho(A)$. В цій статті припускаємо, що $\mathbf{n}^\pm(\dot{A}) = \mathbf{n}^\pm(\dot{A}_*) = 1$, тобто розглядається випадок $\tilde{A} \in \mathcal{P}^{1,1}_{s,s}(A)$.

Якщо $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_*$ та $\tilde{A} = \tilde{A}^*$, тоді отримуємо випадок загального означення сингулярно збурених самоспряжених операторів [5; 12] $\tilde{A} \in \mathcal{P}_s(A)$, тобто означення 1 узагальнює відоме означення самоспряженого сингулярного збурення на випадок несамоспряженого.

Нехай $\{\mathcal{H}_k(A)\}_{k\in\mathbb{R}^1}$ — асоційована A-шкала гільбертових просторів [5], де простір $\mathcal{H}_k := \mathcal{H}_k(A) = \mathfrak{D}(|A|^{k/2})$, $k \geq 1$ з нормою $\|\varphi\|_k = \|(|A|+I)^{k/2}\varphi\|$ (та I позначає тотожне перетворення) $\varphi \in \mathcal{H}_k(A)$ і $\mathcal{H}_{-k} := \mathcal{H}_{-k}(A)$ від'ємний (дуальний) простір, тобто поповнення $\mathcal{H}$ за нормою $\|f\|_{-k} = \|(|A|+I)^{-k/2}f\|$, $f \in \mathcal{H}$. Нехай $\langle\cdot,\cdot\rangle$ позначає дуальний скалярний добуток між просторами $\mathcal{H}_k$ та $\mathcal{H}_{-k}$.

Для подальшого розгляду візьмемо тільки $k = 1, 2$.

Оператор A можна продовжити за неперервністю на $\mathcal{H}_{+1}$ і розуміти як обмежений оператор з $\mathcal{H}_{+1}$ на весь $\mathcal{H}_{-1}$. (Аналогічно A можна продовжити на $\mathcal{H}$ і розуміти як обмежений оператор з $\mathcal{H}$ на весь $\mathcal{H}_{-2}$.) Позначимо це продовження як $\mathbf{A}$.

Таким чином, вираз $\langle\varphi,\omega\rangle$ для $\omega=\mathbf{A}\psi$ має значення з $\varphi,\psi\in\mathcal{H}_{+1}$. І $\mathbf{R}_z=(\mathbf{A}-z)^{-1}$, $z\in\rho(A)$ є відповідною резольвентою.

Оскільки вектори ω_1, ω_2 в (5) можуть належати $\mathcal{H}_{-k}\setminus\mathcal{H}_{-(k-1)}$, $k=0,1,2$, то ми розрізняємо випадки (зокрема регулярного) збурення. З цією метою позначимо $\mathcal{P}_{x,y}(A)$, де кожен індекс — пара $\{x,y\}$ може мати один із символів «ss», «ws», «r», що означає «строго сингулярний» або «слабо сингулярний» або «регулярний» вектор збурення. Символ «s» зарезервований для одного з двох випадків — «строго сингулярне» та «слабо сингулярне» збурення. Після попереднього опису ми даємо означення.

Означення 2. Якщо для множин $\mathfrak{D}$ та $\mathfrak{D}_*$ в (6) і (7) маємо

$$\begin{aligned}&\dim(\mathcal{H}\ominus\mathfrak{D})=0,\\&\dim(\mathcal{H}_{+1}\ominus\mathfrak{D})=1\ (=n\neq 0),\\&\dim(\mathcal{H}\ominus\mathfrak{D}_*)=0,\\&\dim(\mathcal{H}_{+1}\ominus\mathfrak{D}_*)=1\ (=m\neq 0),\end{aligned}$$

тоді збурення називається «слабо-слабо» сингулярним, тобто (ws,ws)-сингулярним рангу один-один (тобто $(1,1)$) і позначається $\tilde{A}\in\mathcal{P}^{1,1}_{ws,ws}(A)$ і для рангу (n,m): $(\tilde{A}\in\mathcal{P}^{n,m}_{ws,ws}(A))$.

Якщо для множин $\mathfrak{D}$ та $\mathfrak{D}_*$ в (6) і (7) маємо

$$\begin{aligned}&\dim(\mathcal{H}_{+1}\ominus\mathfrak{D})=0,\\&\dim(\mathcal{H}_{+2}\ominus\mathfrak{D})=1\ (=n\neq 0),\\&\dim(\mathcal{H}_{+1}\ominus\mathfrak{D}_*)=0,\\&\dim(\mathcal{H}_{+2}\ominus\mathfrak{D}_*)=1\ (=m\neq 0),\end{aligned}$$

тоді збурення називається «сильно-сильно» сингулярним, тобто (ss,ss)-сингулярним рангу один-один (тобто $(1,1)$) і позначається $\tilde{A}\in\mathcal{P}^{1,1}_{ss,ss}(A)$ і для рангу (n,m): $(\tilde{A}\in\mathcal{P}^{n,m}_{ss,ss}(A))$.

Якщо для множин $\mathfrak{D}$ та $\mathfrak{D}_*$ в (6) і (7) маємо

$$\begin{aligned}&\dim(\mathcal{H}\ominus\mathfrak{D})=1\ (=n\neq 0),\\&\dim(\mathcal{H}\ominus\mathfrak{D}_*)=1\ (=m\neq 0),\end{aligned}$$

тоді збурення називається «регулярним-регулярним», тобто (r,r)-збуренням рангу один-один (тобто $(1,1)$) і позначається $\tilde{A}\in\mathcal{P}^{1,1}_{r,r}(A)$ і для рангу (n,m): $(\tilde{A}\in\mathcal{P}^{n,m}_{r,r}(A))$.

Звичайно, можуть бути мішані випадки. Збурення мішаного типу (ss,ws), (ss,r), (ws,r), тобто $\mathcal{P}_{ss,ws}(A)$, $\mathcal{P}_{ss,r}(A)$ і $\mathcal{P}_{ws,r}(A)$, як і випадки, $n>1$, $m>1$ в цій публікації не розглядаються.

У цій статті ми розглядаємо лише випадок «слабо-слабо» сингулярного збурення рангу один-один, тобто досліджуємо спектральні властивості оператора $\tilde{A}\in\mathcal{P}^{1,1}_{ws,ws}(A)$. Інші види збурень ми детально розглянемо в подальших публікаціях, оскільки інші випадки вимагають інших технічних методів.

Розглянемо в A-шкалі оператор V такий, що $\mathfrak{D}(V)\subseteq\mathcal{H}_{+1}$ і $\mathcal{R}(V)\subseteq\mathcal{H}_{-1}$. В нашому випадку $V=\alpha\langle\cdot,\omega_1\rangle\omega_2$ (згідно (5)). Визначимо оператор $A+V$ як суму

$$\begin{gathered}(A+V)\varphi:=(\mathbf{A}\varphi+V\varphi),\\\varphi\in\mathfrak{D}(A+V):=\{\varphi\in\mathfrak{D}(V)\mid\mathbf{A}\varphi+V\varphi\in\mathcal{H}\},\end{gathered}$$

тобто $\tilde{A}f=(\mathbf{A}f+\alpha\langle f,\omega_1\rangle\omega_2)\restriction\mathcal{H}$, $f\in\mathcal{H}_{+1}$. Не втрачаючи загальності, у наступному тексті ми пишемо A замість $\mathbf{A}$ та R_z замість $\mathbf{R}_z$.

Зручним і універсальним є таке означення.

Означення 3 ([8]). Оператор $\tilde{A}$ називається слабо сингулярним несиметричним збуренням рангу один самоспряженого оператора A у сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, якщо для $\eta_i=A^{-1}\omega_i$, $\omega_1\in\mathcal{H}_{-1}\setminus\mathcal{H}$, або $\omega_2\in\mathcal{H}_{-1}\setminus\mathcal{H}$, $\omega_1\neq\omega_2$:

$$\mathfrak{D}(\tilde{A})=\Big\{\psi=\varphi+b\eta_2\ \Big|\ \varphi\in\mathfrak{D}(A),\ b=\frac{(A\varphi,\eta_1)}{1+(A^{1/2}\eta_2,A^{1/2}\eta_1)}\Big\}$$

для випадку $(A^{1/2}\eta_2,A^{1/2}\eta_1)\neq -1$;

$$\begin{gathered}\mathfrak{D}(\tilde{A})=\mathfrak{D}_{\mathcal{H}_1}\dotplus\{c\eta\},\\\mathfrak{D}_{\mathcal{H}_1}=\{\varphi\in\mathfrak{D}(A)\mid(A\varphi,\eta_1)=0\}\end{gathered}$$

для випадку $(A^{1/2}\eta_2,A^{1/2}\eta_1)=-1$;

$$\tilde{A}\psi=A\varphi.$$

Опис та спектральні властивості сингулярних несиметричних збурень рангу один

Для початку, коротко зауважимо, що якщо $\tilde{A}\in\mathcal{P}_{ws,ws}(A)$, то тоді для спряженого оператора $\tilde{A}^*\in\mathcal{P}_{ws,ws}(A)$ також.

Твердження 1. *Кожний оператор $\tilde{A}\in\mathcal{P}^{1,1}_{ws,ws}(A)$ (означення 1, 2 та 3) має вигляд:*

$$\tilde{A}=A+\alpha\langle\cdot,\omega_1\rangle\omega_2,\tag{8}$$

з $\alpha\in\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ і $\omega_1,\omega_2\in\mathcal{H}_{-1}\setminus\mathcal{H}$.

Наступна теорема описує сингулярні несиметричні збурення рангу один у вигляді резольвент відповідного оператора.

Теорема 2 ([8]). *Для резольвент $R_z=(A-z)^{-1}$ та $\tilde{R}_z=(\tilde{A}-z)^{-1}$ операторів $A=A^*$ та $\tilde{A}\in\mathcal{P}^{1,1}_{ws,ws}(A)$ в сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ можна записати формулу М. Крейна для $z,\xi,\zeta\in\rho(A)\cap\rho(\tilde{A})$:*

$$\tilde{R}_z=R_z+b_z(\cdot,n_{\bar{z}})m_z,\tag{9}$$

з вектор-функціями

$$\begin{aligned}n_z&=(A-\xi)(A-z)^{-1}n_\xi,\\m_z&=(A-\zeta)(A-z)^{-1}m_\zeta,\end{aligned}\tag{10}$$

де $n_z, m_z \in \mathcal{H}_{+1} \setminus \mathcal{H}_{+2}$ *і*

$$b_z^{-1} - b_\xi^{-1} = (\xi - z)(m_\xi, n_{\bar z}). \tag{11}$$

Вектори n_z, m_z *і число* b_z *пов'язане з* ω_1, ω_2 *з (8) виразами*

$$n_z = R_z\omega_1, \quad m_z = R_z\omega_2,$$
$$-b_z^{-1} = \alpha^{-1} + \langle \omega_2, R_{\bar z}\omega_1\rangle,$$

де $\alpha \neq 0$.

Випадок $\alpha = 0$ можна включити до розгляду, оскільки якщо $\alpha = 0$, тоді можна покласти $b_z \equiv 0$ і отже $\tilde{R}_z \equiv R_z$.

Можливо $b_z = \infty$, що є так тоді і тільки тоді, коли $z \in \sigma_p(\tilde{A})$, але (9) виконується і для такого випадку.

Неперервний спектр $\sigma_c(A)$ оператора A при збуренні скінченого рангу незмінний, тобто $\sigma_c(A) = \sigma_c(\tilde{A})$, $\tilde{A} \in \mathcal{P}^{n,n}_{s,s}(A)$, $n < \infty$.

Теорема 3. *Нехай* (ws, ws)*-збурення* $\tilde{A} \in \mathcal{P}^{1,1}_{ws,ws}(A)$ *задано у вигляді (9) з (10) і (11) набуває нове власне значення* $\lambda \in \mathbb{C}$ *в порівнянні з* A*, тобто існує* $\lambda \in \sigma_p(\tilde{A})$, $\lambda \notin \sigma_p(A)$*, тоді для відповідних власних векторів* φ, ψ: $\tilde{A}\varphi = \lambda\varphi$ *і* $\tilde{A}^*\psi = \bar\lambda\psi$ *виконуються співвідношення*

$$(\lambda - z)b_z(\varphi, n_{\bar z}) = 1,$$
$$\varphi = (A - z)(A - \lambda)^{-1}m_z; \tag{12}$$
$$(\bar\lambda - \bar z)\bar b_z(\psi, m_z) = 1,$$
$$\psi = (A - \bar z)(A - \bar\lambda)^{-1}n_{\bar z}. \tag{13}$$

Доведення. Використовуючи рівність $\tilde{A}\varphi = \lambda\varphi$, тобто $R_z\varphi + b_z(\varphi, n_{\bar z})m_z = \frac{1}{\lambda - z}\varphi$, отримуємо $(\lambda - z)b_z(\varphi, n_{\bar z})(A - z)(A - \lambda)^{-1}m_z = \varphi$, що дає (12).

Аналогічно, розглядаючи $\tilde{A}^*\psi = \bar\lambda\psi$, можна довести (13).

Аналогічно теоремі 3 для оператора $\tilde{A}$ вигляду, (9) маємо наступний наслідок, де оператор $\tilde{A}$ заданий у вигляді (8).

Наслідок 4. *Нехай* (ws, ws)*-збурення* $\tilde{A} \in \mathcal{P}^{1,1}_{ws,ws}(A)$ *набуває нове власне значення* $\lambda \in \mathbb{C}$ *у порівнянні з* A *і власні вектори* φ *і* ψ*, тобто* $\tilde{A}\varphi = \lambda\varphi$ *і* $\tilde{A}^*\psi = \bar\lambda\psi$*, тоді співвідношення (12) та (13) в термінах* ω_1, ω_2 *мають вигляд:*

$$\alpha\langle (A - \lambda)^{-1}\omega_2, \omega_1\rangle = -1,$$
$$\varphi = (A - \lambda)^{-1}\omega_2; \tag{14}$$
$$\bar\alpha\langle (A - \bar\lambda)^{-1}\omega_1, \omega_2\rangle = -1,$$
$$\psi = (A - \bar\lambda)^{-1}\omega_1. \tag{15}$$

Якщо теорема 3 є прямою спектральною задачею, то наступна теорема є оберненою задачею.

Теорема 5. *Для цього самоспряженого оператора* $A = A^*$ *в сепарабельному гільбертовому просторі* $\mathcal{H}$ *і* $\lambda \in \mathbb{C}$ *і векторів* $\varphi, \psi \in \mathcal{H}_{+1} \setminus \mathcal{H}_{+2}$ *існує єдиний* $\tilde{A} \in \mathcal{P}^{1,1}_{ws,ws}(A)$ *такий, що* $\tilde{A}\varphi = \lambda\varphi$ *і* $\tilde{A}^*\psi = \bar\lambda\psi$*. При цьому оператор* $\tilde{A}$ *визначений виразом (9):*

$$\tilde{R}_z = R_z + b_z(\cdot, n_{\bar z})m_z, \tag{16}$$

з вектор-функціями

$$\begin{aligned} m_z &= (A - \lambda)(A - z)^{-1}\varphi, \\ n_{\bar z} &= (A - \bar\lambda)(A - \bar z)^{-1}\psi \end{aligned} \tag{17}$$

і скалярною функцією (коефіцієнтом)

$$\begin{aligned} b_z^{-1} &= (\lambda - z)(\varphi, n_{\bar z}), \\ \big(\bar b_z^{-1} &= (\bar\lambda - \bar z)(\psi, m_z)\big). \end{aligned} \tag{18}$$

Теореми 2–5 у випадку самоспряженого збуреного оператора $\tilde{A} = \tilde{A}^*$ доведені в [2; 9].

Дуальна пара власних значень

Оскільки $\tilde{A} \in \mathcal{P}^{1,1}_{ws,ws}(A)$ взагалі є несамоспряженим оператором, тоді означення дуальної пари власних значень відрізняється від [3].

Означення 4. Пара чисел $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ називається дуальною парою власних значень сингулярно збуреного оператора $\tilde{A} \in \mathcal{P}^{1,1}_{ws,ws}(A)$ якщо

$$\tilde{A}\varphi_\lambda = \lambda\varphi_\lambda, \quad \tilde{A}\varphi_\mu = \mu\varphi_\mu,$$
$$\tilde{A}^*\psi_{\bar\lambda} = \bar\lambda\psi_{\bar\lambda}, \quad \tilde{A}^*\psi_{\bar\mu} = \bar\mu\psi_{\bar\mu},$$
$$(\bar\lambda - \bar\mu)((A - \mu)^{-1}\varphi_\lambda, \psi_{\bar\lambda}) = (\varphi_\lambda, \psi_{\bar\lambda}).$$

Наступна теорема описує метод побудови дуальної пари.

Теорема 6. *Нехай* $A = A^*$ *самоспряжений оператор визначений на* $\mathfrak{D}(A)$ *в сепарабельному гільбертовому просторі* $\mathcal{H}$*. Для довільного фіксованого* $\mu \in \rho(A)$ *і векторів* $\varphi_\lambda, \psi_{\bar\lambda} \in \mathcal{H}_{+1} \setminus \mathcal{H}_{+2}$ *існує єдиний несиметричний сингулярно збурений оператор* $\tilde{A} \in \mathcal{P}^{1,1}_{ws,ws}(A)$ *такий, що* (μ, λ) *є дуальною парою, де*

$$\bar\lambda := \bar\mu + \frac{(\varphi_\lambda, \psi_{\bar\lambda})}{((A - \mu)^{-1}\varphi_\lambda, \psi_{\bar\lambda})}$$

власне значення з власним вектором

$$\varphi_\mu = (A - \lambda)(A - \mu)^{-1}\varphi_\lambda.$$

Оператор $\tilde{A}^* \in \mathcal{P}^{1,1}_{ws,ws}(A)$ має власні вектори $\psi_{\bar\lambda}$, $\psi_{\bar\mu} = (A - \bar\lambda)(A - \bar\mu)\psi_{\bar\lambda}$.

Оператор $\tilde{A}$ заданий у вигляді $\tilde{A} = A + \alpha\langle\cdot, \omega_1\rangle\omega_2$, має константу зв'язку $\alpha = -\frac{1}{(\varphi_\lambda, \omega_1)}$ (або $\bar\alpha = -\frac{1}{(\psi_{\bar\lambda}, \omega_2)}$) з відповідними векторами

$$\begin{aligned} \omega_2 &= (A - \mu)\varphi_\lambda - \frac{(\psi_{\bar\lambda}, \varphi_\lambda)}{((A - \mu)\psi_{\bar\lambda}, \varphi_\lambda)}\varphi_\lambda, \\ \omega_1 &= (A - \bar\mu)\psi_{\bar\lambda} - \frac{(\varphi_\lambda, \psi_{\bar\lambda})}{((A - \mu)\varphi_\lambda, \psi_{\bar\lambda})}\psi_{\bar\lambda}. \end{aligned} \tag{19}$$

Доведення. Для довільного $\mu \in \rho(A)$ та $\varphi = \varphi_\lambda \in \in \mathcal{H}_{+1} \setminus \mathfrak{D}(A)$, $\psi = \psi_{\bar\lambda} \in \mathcal{H}_{+1} \setminus \mathfrak{D}(A)$ покладемо:

$$\bar\lambda = \bar\mu + \frac{(\varphi_\lambda, \psi_{\bar\lambda})}{((A-\mu)^{-1}\varphi_\lambda, \psi_{\bar\lambda})}. \tag{20}$$

За умови теореми 5 існує єдиний оператор $\tilde A \in \in \mathcal{P}^{1,1}_{ws,ws}(A)$ такий, що виконуються рівності $A\varphi_\lambda = \lambda\varphi_\lambda$ і $\tilde A^*\psi_{\bar\lambda} = \bar\lambda\psi_{\bar\lambda}$, і який заданий у формі резольвенти (9):

$$\tilde R_z = R_z + b_z(\cdot, n_{\bar z})m_z,$$

з (17) та (18) маємо:

$$\begin{aligned} m_z &= (A-\lambda)^{-1}(A-z)^{-1}\varphi_\lambda, \\ n_{\bar z} &= (A-\bar\lambda)^{-1}(A-\bar z)^{-1}\varphi_{\bar\lambda}, \\ b_z &= \frac{1}{(\lambda - z)(\varphi_\lambda, n_{\bar z})}. \end{aligned} \tag{21}$$

За наявності множника $(\lambda - z)$ в знаменнику останнього виразу видно, що λ є власним значенням.

Друге власне значення випливає з того, що другий множник у знаменнику теж може дорівнювати нулю:

$$0 = (\varphi, n_{\bar z}) = (\varphi_\lambda, (\psi_{\bar\lambda} + (\bar z - \bar\lambda)(A-\bar z)^{-1}\psi_{\bar\lambda}),$$

де з теореми 5: $n_{\bar z} = (A-\lambda)(A-\bar z)^{-1}\psi_{\bar\lambda}$. Отже, $(\varphi_\lambda, \psi_{\bar\lambda}) = (\bar\lambda - \bar z)((A-z)^{-1}\varphi_\lambda, \psi_{\bar\lambda})$ і отримуємо (20). З (21), замінивши z на μ, отримуємо $\varphi_\mu = = m_\mu = (A-\lambda)(A-\mu)^{-1}\varphi_\lambda$. Зокрема $\varphi_\lambda \perp \psi_{\bar\mu}$.

Аналогічно використовуючи $(A^* - z)^{-1} = R_z + + b_z(\cdot, m_z)n_{\bar z}$ для оператора $\tilde A^* \in \mathcal{P}^{1,1}_{ws,ws}(A)$, отримуємо $\tilde A^*\varphi_{\bar\lambda} = \lambda\varphi_{\bar\lambda}$ і $\tilde A^*\psi_{\bar\mu} = \bar\mu\psi_{\bar\mu}$. Отже теорема 6 доведена.

Для дійсної дуальної пари $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ маємо наступний наслідок із теореми 6.

Наслідок 7. *Нехай $A = A^* \geq 0$ додатній самоспряжений оператор, визначений на $\mathfrak{D}(A)$ в сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, такий, що $\sigma(A) = \sigma_c(A) = [0, \infty)$. Для довільного числа $\mu < < 0$ і векторів $\varphi_\lambda, \psi_{\bar\lambda} \in \mathcal{H}_{+1} \setminus \mathcal{H}_{+2}$ існує єдине несиметричне сингулярне збурення рангу один $\tilde A \in \in \mathcal{P}^{1,1}_{ws,ws}(A)$ так, що має дуальну пару (μ, λ), де*

$$\lambda = \mu + \frac{(\varphi_\lambda, \psi\lambda)}{((A-\mu)^{-1}\varphi_\lambda, \psi_\lambda)}$$

є його власними значеннями з відповідними власними векторами φ_λ і $\varphi_\mu = (A-\lambda)(A-\mu)^{-1}\varphi_\lambda$.

Оператор $\tilde A^* \in \mathcal{P}^{1,1}_{ws,ws}(A)$ має ті самі власні значення з власними векторами ψ_λ і $\psi_\mu = = (A-\lambda)(A-\mu)\psi_\lambda$.

Приклади

Приклад 1. Нехай $\mathcal{H} = L_2([1,\infty), dx)$ і A є оператором множення на незалежну змінну x, тобто $Af(x) = xf(x)$, $f \in \mathfrak{D}(A)$, де

$$\mathfrak{D}(A) := \{f(x) \in L_2 \mid xf(x) \in L_2\}.$$

Очевидно $A \geq 1$ та $\mathfrak{D}(A) = \sigma(A) = [1, \infty)$.

Покладемо $0 = \mu \notin \sigma(A)$ і $\varphi = \varphi_\lambda = x^{-1\frac{1}{3}}$, $\psi = \psi_\lambda = x^{-1\frac{2}{3}}$, $\varphi, \psi \in \mathcal{H}_{+1} = L_2([1,\infty), xdx)$. Зокрема $\mathcal{H}_{+2} = L_2([1,\infty), x^2dx)$ і $\varphi, \psi \notin \mathcal{H}_{+2}$, тоді

$$(\varphi, \psi) = \int_1^\infty \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2},$$
$$\big((A-\mu)^{-1}\varphi, \psi\big) = \int_1^\infty \frac{dx}{x^4} = \frac{1}{3}.$$

Отже, $\lambda = \frac{3}{2} \in \sigma(A)$; і

$$\varphi_\mu = \Big(A - \frac{3}{2}\Big)A^{-1}\varphi_\lambda = \frac{x - \frac{3}{2}}{x^{7/3}},$$
$$\psi_\mu = \Big(A - \frac{3}{2}\Big)A^{-1}\psi_\lambda = \frac{x - \frac{3}{2}}{x^{8/3}}.$$

А також з (17) маємо:

$$m_z = (A-\lambda)(A-z)^{-1}\varphi_\lambda = \frac{x - 3/2}{x - z}\frac{1}{x^{4/3}},$$
$$n_z = (A-\bar\lambda)(A-\bar z)^{-1}\psi_\lambda = \frac{x - 3/2}{x - z}\frac{1}{x^{5/3}},$$

і з (18) маємо:

$$\begin{aligned} b_z &= (\lambda - z)^{-1}(\varphi_\lambda, n_{\bar z})^{-1} = \\ &= \Big(\frac{3}{2} - z\Big)^{-1}(\varphi_\lambda, n_{\bar z})^{-1}, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} (\varphi_\lambda, n_{\bar z}) &= \int_1^\infty \frac{1}{x^{4/3}}\frac{x - 3/2}{x - z}\frac{1}{x^{5/3}}\,dx = \\ &= \Big(\frac{3}{2z^3} - \frac{1}{z^2}\Big)\ln(1 - z) + \Big(\frac{3}{2z^2} - \frac{1}{z}\Big) + \frac{3}{4z}. \end{aligned}$$

Отже (16) має вигляд:

$$\begin{aligned} (\tilde A - z)^{-1} &= \frac{1}{x - z} + \\ &+ b_z\Big(\cdot, \frac{x - 3/2}{x - \bar z}\frac{1}{x^{5/3}}\Big)\frac{x - 3/2}{x - z}\frac{1}{x^{4/3}}. \end{aligned}$$

Крім того,

$$\omega_1 = \frac{x}{x^{5/3}} - \frac{1/2}{1/3}\frac{1}{x^{5/3}} = \frac{2x - 3}{2x^{5/3}},$$
$$\omega_2 = \frac{x}{x^{4/3}} - \frac{1/2}{1/3}\frac{1}{x^{4/3}} = \frac{2x - 3}{2x^{4/3}},$$
$$\begin{aligned} \langle\varphi_\lambda, \omega_1\rangle &= \int_1^\infty \frac{1}{x^{4/3}}\frac{2x - 3}{2x^{5/3}}dx = \langle\psi_\lambda, \omega_2\rangle = \\ &= \int_1^\infty \frac{1}{x^{5/3}}\frac{x - 3}{2x^{4/3}}dx = \\ &= \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{2x - 3}{x^3}dx = 1/4. \end{aligned}$$

У зв'язку з цим, згідно (14), (15):

$$\alpha = -\frac{1}{\langle \varphi_\lambda, \omega_1 \rangle} = -4.$$

Приклад 2. Нехай $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^1, dx)$ і A відіграє роль оператора Лапласа, а саме $Af(x) = -f''(x)$, $\mathfrak{D}(A) = W_2^2(\mathbb{R}^1)$ — соболівський простір. Оператор $A \geq 0$ має чисто абсолютно неперервний спектр, тобто $\sigma(A) = \sigma_c(A) = [0, \infty)$.

Покладемо

$$\varphi_\lambda = e^{-|x-1|} \text{ і } \psi_\lambda = e^{-|x+1|}, \ \mu = -1$$

(розглянемо випадок $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ і $\lambda, \mu \in \rho(A)$). Для обчислення λ нам потрібно

$$(\varphi_\lambda, \psi_\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{-|x-1|} e^{-|x+1|}\, dx = 3e^{-2}.$$

Використовуючи [1], обчислимо

$$\begin{aligned}(A+1)^{-1}\varphi_\lambda &= \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} e^{-|x-\tau|} e^{-|\tau-1|}\, d\tau = \\ &= \begin{cases} \frac{x}{2} e^{-x+1}, & x > 1, \\ \frac{2-x}{2} e^{x-1}, & x < 1, \end{cases}\end{aligned} \tag{22}$$

і, отже,

$$\left((A+1)^{-1}\varphi_\lambda, \psi_\lambda\right) = \frac{13}{4} e^{-2}.$$

Також, $\lambda = -\frac{1}{13} < 0$, $\alpha = -\frac{4}{13} e^2$. І з (19) маємо:

$$\omega_1 = \delta_{-1}(x) - \frac{12}{13} e^{-|x+1|},$$
$$\omega_2 = \delta_{+1}(x) - \frac{12}{13} e^{-|x-1|}.$$

Приклад 3. Дещо змінимо попередній приклад. А саме, залишимо $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}^1, dx)$ і оператор $Af(x) = -f''(x)$, $\mathfrak{D}(A) = W_2^2(\mathbb{R}^1)$, але виберемо

$$\varphi_\lambda = e^{-|x-1|} \text{ і } \psi_\lambda = e^{-|x|}, \ \mu = -1$$

(також розглянемо випадок $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, але $\lambda \in \sigma(A)$, $\mu \in \rho(A)$). Для обчислення λ потрібно

$$(\varphi_\lambda, \psi_\lambda) = \int_{\mathbb{R}} e^{-|x-1|} e^{-|x|}\, dx = 2e^{-1}$$

і, використовуючи (22), маємо

$$\left((A+1)^{-1}\varphi_\lambda, \psi_\lambda\right) = \frac{7}{4} e^{-1}.$$

Отже, $\lambda = \frac{1}{15} > 0$, $\alpha = -\frac{1}{7} e$. І з (19) маємо:

$$\omega_1 = \delta_0(x) - \frac{8}{7} e^{-|x|},$$
$$\omega_2 = \delta_{+1}(x) - \frac{8}{7} e^{-|x-1|}.$$

У застосуваннях вираз (4) можна інтерпретувати як «δ-взаємодія із запізненням», якщо $x_1 < x_2$, що має фізичне значення в диференціальних моделях із запізненням. У зв'язку з цим, випадок $x_1 > x_2$ можна розуміти як «потенціал з випередженням» (див. узагальнену теорію, наприклад [11; 15]).

Представленні в статті методи дають змогу також розглянути відповідні рівняння типу Штурма — Ліувіля [4].

Список літератури

1. Solvable models in quantum mechanics / S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Høegh-Krohn, H. Holden. — Second edition. — Providence, RI : AMS Chelsea Publishing, 2005. — xiv+488 p. — With an appendix by Pavel Exner.
2. On the point spectrum of H_{-2}-singular perturbations / S. Albeverio, M. Dudkin, A. Konstantinov, V. Koshmanenko // Math. Nachr. — 2007. — Vol. 280, no. 1–2. — P. 20–27.
3. Albeverio S. Rank-one singular perturbations with a dual pair of eigenvalues / S. Albeverio, M. Dudkin, V. Koshmanenko // Lett. Math. Phys. — 2003. — Vol. 63, no. 3. — P. 219–228.
4. Albeverio S. Inverse spectral problems for non-local Sturm-Liouville operators / S. Albeverio, R. O. Hryniv, L. P. Nizhnik // Inverse Problems. — 2007. — Vol. 23, no. 2. — P. 523–535.
5. Albeverio S. Singular perturbations of differential operators: Solvable Schrödinger type operators / S. Albeverio, P. Kurasov. — Cambridge : Cambridge Univ. Press, 2000. — 429 p.
6. Berezansky Y. Generalized selfadjoint operators and their singular perturbations / Y. Berezansky, J. Brasche // Methods Funct. Anal. Topology. — 2001. — Vol. 7, no. 3. — P. 54–66.
7. Дудкін М. Е. Сингулярно збурені рангу один нормальні оператори та їх застосування / М. Е. Дудкін. — Інститут Математики НАН України, 2008. — 38 с. — (Препринт 2008.3).
8. Вдовенко Т. І. Сингулярні рангу один несиметричні збурення самоспряженого оператора / Т. І. Вдовенко, М. Е. Дудкін // Спектральна теорія операторів та наборів операторів // Збірник праць Інституту математики НАНУ. — 2015. — Т. 12, № 1. — С. 57–73.
9. Dudkin M. E. The point spectrum of self-adjoint operators that appears under singular perturbations of finite rank / M. E. Dudkin, V. D. Koshmanenko // Ukrainian Math. J. — 2003. — Vol. 55, no. 9. — P. 1532–1541.
10. Kato T. Wave operators and similarity for some non-selfadjoint operators / T. Kato // Math. Annalen. — 1966. — Vol. 162. — P. 258–279.
11. Kato T. The functional-differential equation $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$ / T. Kato, J. B. McLeod // Bull. Amer. Math. Soc. — 1971. — Vol. 77. — P. 891–937.
12. Koshmanenko V. D. Singular quadratic forms in perturbation theory / V. D. Koshmanenko. — Dordrecht : Kluwer Acad. Publisher, 1999. — 300 p.
13. Лидский В. Б. Несамосопряженный оператор типа Штурма — Лиувилля с дискретным спектром / В. Б. Лидский // Тр. Моск. матем. об-ва. — 1960. — Т. 9. — С. 45–79.
14. Malamud M. M. Kreĭn type formula for canonical resolvents of dual pairs of linear relations / M. M. Malamud,

V. I. Mogilevskii // Methods Funct. Anal. Topology. — 2002. — Vol. 8, no. 4. — P. 72–100.

15. Мышкис А. Д. Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом / А. Д. Мышкис // Успехи мат. наук. — 1949. — Т. 4, № 5 (33). — С. 99–141.
16. Nizhnik L. Inverse nonlocal Sturm-Liouville problem / L. Nizhnik // Inverse problems. — 2010. — Vol. 26. — P. 125006.
17. Nizhnik L. Inverse spectral nonlocal problem for the first order ordinary differential equation / L. Nizhnik // Tamkang Journal of Mathematics. — 2011. — Vol. 42, no. 3. — P. 385–394.
18. Reed M. Analysis of operators / M. Reed, B. Simon. — New York — San Francisco — London : Academic Press, 1978. — Vol. 4 of Methods of Modern Mathematical Physics. — 325 p.
19. Като Т. Теория возмущений линейных операторов / Т. Като. — М. : Мир, 1972. — 740 с.

T. Vdovenko

DUAL PAIR OF EIGENVALUES IN RANK ONE SINGULAR NONSYMMETRIC PERTURBATIONS

We discuss the eigenvalue problem for a rank one singular non-selfadjoint perturbation of a selfadjoint operator A in the separable Hilbert space, by nonsymmetric potential ($\delta_1 \neq \delta_2$) in the form $\tilde{A} = A + \alpha\langle\cdot,\delta_1\rangle\delta_2$. We give the constructive description of such sort operator $\tilde{A}$ which possess two new points in the point spectrum in case of weakly singular perturbations.

In our investigations we can really observe the pair of symmetric operator with defect indexes (1,1) both and consider only some class of nonsymmetric extensions.

There are known old questions: under what conditions the Schrödinger operator have a point spectrum immersed in the continuous one, is difficult from a physical point of view. The study of this case is particularly unpromising, because there are good physical reasons to expect that such eigenvalues should not be. However, there are known examples of J. von Neumann (1929) in which described Hamiltonian perturbed by free smooth potentials such that perturbed operator becomes coherent states inside the continuous spectrum. The main considerations of this kind of cases mainly focused on how to avoid appearance of eigenvalues embedded in the continuous spectrum, as this creates difficulties by researches in the scattering theory. But the work S. Albeverio, M. Dudkin, V. Koshmanenko contains the description on an unexpected appearance: rank one singularly perturbed self-adjoint operator possess two new eigenvalues so that one of them is immersed in a continuous spectrum of the unperturbed (given) operator.

Since the study of singular perturbation operators extended to perturbations nonsymmetric potentials, you should expect also associated pairs by rank one singularly perturbed

In fact, we investigate the inverse eigenvalue problem for perturbations of nonsymmetric potentials. Namely, we present perturbation $\tilde{A}$ which solves the eigenvalue problem for the dual pair $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$: $\tilde{A}\varphi_\lambda = \lambda\varphi_\lambda$, $\tilde{A}\varphi_\mu = \mu\varphi_\mu$, $\tilde{A}^*\psi_{\bar{\lambda}} = \bar{\lambda}\psi_{\bar{\lambda}}$, $\tilde{A}^*\psi_{\bar{\mu}} = \bar{\mu}\psi_{\bar{\mu}}$, $(\bar{\lambda} - \bar{\mu})((A-\mu)^{-1}\varphi_\lambda, \psi_{\bar{\lambda}}) = (\varphi_\lambda, \psi_{\bar{\lambda}})$.

Keywords: rank one singular perturbation, eigenvalue problem, M. Krein's formula, nonselfadjoint perturbation, deviating argument.

Матеріал надійшов 09.06.2016