УДК 519.81

Михалевич В. М.

ДО МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕННЯ

Показано, що, моделюючи систему прийняття рішення, можна, не зменшуючи загальності, обмежитись параметричними ситуаціями у випадку, коли стан ситуації підкорюється невизначеності, що описується статистичною закономірністю (на відміну від ситуації, коли стан задається стохастичним розподілом, що призводить до звуження класу систем прийняття рішення).

Ключові слова: статистична закономірність, параметрична ситуація.

Вступ

Довкілля (ситуація) із виділеною частиною (той, хто приймає рішення (ТПР)) являє собою систему прийняття рішення (СПР). ТПР може впливати на ситуацію діями (рішеннями), наслідки яких детерміновано залежать від невідомого ТПР стану ситуації. Задача прийняття рішення в СПР полягає у виборі ТПР оптимального з його точки зору рішення. У дослідника СПР виникає питання щодо критерію оптимальності рішення ТПР. Це питання породжує проблему невизначеності процедури вибору рішення, яке приймає ТПР, спираючись на свої принципи оптимальності в заданій ситуації. Необхідна формалізація СПР для аналізу цього процесу.

Під ситуацією в задачі вибору (СЗВ) розумітимемо механізм виникнення причини наслідку, який належить певній множині для кожної дії із заданої множини, що називається множиною рішень СЗВ. Зазначену причину будемо називати станом СЗВ, або значенням неспостережуваного параметра, а множину елементарних подій вказаних наслідків множини рішень СЗВ — множиною наслідків СЗВ. При цьому задача вибору (ЗВ) розуміється як задача вибору дії або відношення переваг на діях множини рішень СЗВ, що складається хоча б із двох елементів, в залежності від відношення переваг у множині наслідків СЗВ. ЗВ дії називається задачею прийняття рішення (ЗР), а ЗВ відношення переваг у множині рішень називатимемо задачею вибору переваг (ЗП). Схема ситуації (СС) відображує можливість або неможливість кожного наслідку з множини наслідків СЗВ для кожного рішення з множини рішень СЗВ. СЗВ, для якої відома множина можливих значень неспостережуваного параметра, будемо називати параметричною, а її схему — матричною, на відміну від непараметричної із лотерейною схемою.

Під моделлю ситуації (МС) ЗВ будемо розуміти СС цієї ЗВ разом із деякою закономірністю випадковості станів у параметричній СЗВ та наслідків рішень у непараметричній СЗВ.

Правило вибору переваг (ПВП) у деякому класі СС представляє відображення, що ставить у відповідність кожній СС цього класу деяке відношення переваг на її множині наслідків та деяке відношення переваг на її множині рішень.

Під моделлю ТПР (МТПР) відносно ЗП в деякому класі СС в СПР будемо розуміти умови (правила вибору рішення) на ПВП цього класу СС.

Будемо говорити, що МС із СС деякого класу задає рішення ЗП для МТПР відносно ЗП в цьому класі СС, якщо множина ПВП вказаного класу СС, що задовольняють цій МТПР при закономірності випадковості, яка задається інформативною частиною цієї МС, представляє єдине рішення ЗП в зазначеному класі СС.

Задача дослідника СПР — отримати її модель, тобто, керуючись певними принципами оптимальності, запропонувати МТПР та сукупність МС відносно ЗП у деякому класі СС так, що ПВП, які задовольняють вказаній МТПР, утворюють непорожній клас (несуперечливість формалізму) і для ТПР, згідних з умовами цієї МТПР, рішення ЗП для зазначеного класу СС задаються відповідними їм МС із запропонованої сукупності (повнота формалізму).

$B_\Sigma(\Theta)$, або $B(\Theta)$ (B) в контексті з фіксованим Σ (фіксованими Θ і Σ), де Θ — довільна множина із заданою алгеброю підмножин Σ, позначимо множину всіх Σ-вимірних обмежених дійсних функцій на Θ.

Основні означення та допоміжні результати

Означення 1. Статистичною закономірністю на Θ, де Θ — довільна множина із заданою алгеброю підмножин Σ (якщо Σ не задається, то вважається, що $\Sigma = 2^\Theta$), називається будь-яка непорожня замкнена в топології $\tau(\Theta)$ простору $PF(\Theta) := \{p \in ([0,1])^\Sigma : p(\Theta) = 1,\, p(C \cup D) = p(C) + p(D \backslash C),\quad \forall C, D \in \Sigma\}$, що є слідом *-слабкої топології в спряженому до банахового простору $B_\Sigma(\Theta)$ з нормою $\|f\| := \sup\limits_{\theta\in\Theta} |f(\theta)|$, множина P всіх адитивних імовірносних мір на Θ.

Сімейство всіх статистичних закономірностей на (Θ, Σ) будемо позначати $P(\Theta)$.

Означення 2. Впорядковану трійку (Θ, Σ, P), де Θ — довільна непорожня множина із заданою алгеброю підмножин Σ, аP — статистична закономірність на Θ, будемо називати простором із розподілом.

Означення 3. Лотерейною формою СС називається впорядкована трійка виду (X, U, R), де R є графіком відповідності з довільної непорожньої множини U в довільний непорожній вимірний простір (X, Ξ), для якої $\mathtt{dom}R = U$ і $\mathtt{im}R = X$. X називається множиною наслідків, U — множиною рішень, R — відповідністю СС (X, U, R). Клас всіх СС у лотерейній формі позначимо $\hat{\mathbb{Z}}$.

Означення 4. Матричною формою СС називається впорядкована четвірка вигляду (X, Θ, U, g), де g є відображенням $\Theta \times U$ на X для довільних непорожніх вимірних просторів $(X, \Xi), (\Theta, \Sigma)$ і довільної непорожньої множини U. Множини X, Θ, U називаються відповідно множинами наслідків, значень неспостережуваного параметра, рішень, а g — відображенням наслідків СС (X, Θ, U, g). Клас усіх СС у матричній формі позначимо $\mathbb{Z}$. Також $\mathbb{Z}(X, \Theta) := \{(X, \Theta, \cdot, \cdot) \in \mathbb{Z}\}$.

Означення 5. СС $(X', \Theta', U', g') \in \mathbb{Z}$ називається підсхемою СС $(X, \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}$, якщо $X' \subseteq X,\ \Theta' \subseteq \Theta,\ U' \subseteq U$, і $g' := g|_{\Theta' \times U'}$.

Позначимо $\mathbf{Z}(\hat{\mathbf{Z}})$ клас всіх матричних (лотерейних) СС із відомими відношеннями переваг на наслідках. СС класу $\mathbf{Z}(\hat{\mathbf{Z}})$ будемо називати СС з доходами в матричній (лотерейній) формі.

Означення 6. Проекцією СС класу $\mathbf{Z}$ $(\hat{\mathbf{Z}})$ в клас $\mathbb{Z}$ $(\hat{\mathbb{Z}})$ називається таке відображення *Пр* : $\mathbf{Z}$ $(\hat{\mathbf{Z}})$ $\longrightarrow$ $\mathbb{Z}$ $(\hat{\mathbb{Z}})$, що для будь-якої СС $((X, \succeq), \Theta, U, g) \in \mathbf{Z}$ $(((X, \succeq), U, R) \in \hat{\mathbf{Z}})$ *Пр*$(((X, \succeq), \Theta, U, g)) = (X, \Theta, U, g)$ (*Пр* $(((X, \succeq), U, R)) = (X, U, R)$).

Означення 7. Підсхемою СС

$$((X, \succeq), \Theta, U, g) \in \mathbf{Z}(((X, \succeq), U, R) \in\in \hat{\mathbf{Z}})$$

називається СС $((X', \succeq'), \Theta', U', g') \in \mathbf{Z}$ $(((X', \succeq'), U', R') \in \hat{\mathbf{Z}})$, де СС $(X', \Theta', U', g') \in \mathbb{Z}$ $((X', U', R') \in \hat{\mathbb{Z}})$ є підсхемою СС $(X, \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}$ $((X, U, R) \in \hat{\mathbb{Z}})$, а $(\succeq') = (\succeq|_{X'})$.

Означення 8. Проекцією СС класу $\mathbb{Z}$ в $\hat{\mathbb{Z}}$ називається таке відображення $\widehat{Пр} : \mathbb{Z} \to \hat{\mathbb{Z}}$, що для будь-якої СС $(X, \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}$ $\widehat{Пр}((X, \Theta, U, g)) = (X, U, R) \in \hat{\mathbb{Z}}$, де для будь-яких $u \in U$

$$R(u) = X_u = g(\Theta, u). \tag{1}$$

Аналогічно визначаються проекції СС класів $\mathbb{Z}_F$ і $\mathbb{Z}_S$ в $\hat{\mathbb{Z}}$. При цьому для будь-якої СС $(X, \Theta, U) \in \mathbb{Z}_F$ $\widehat{Пр}((X, \Theta, U)) = (X, U, R) \in \hat{\mathbb{Z}}$, де $\forall u \in U$ $R(u) = X_u = \{\theta(u) : \theta \in \Theta\}$, а для будь-якої СС $(X, \Theta, U) \in \mathbb{Z}_S$ $\widehat{Пр}((X, \Theta, U)) = (X, U, R) \in \hat{\mathbb{Z}}$, где $\forall u \in U$ $R(u) = X_u = u(\Theta)$.

Означення 9. Операцією *розтягування* СС класу $\hat{\mathbb{Z}}$ називається відповідність Р з $\hat{\mathbb{Z}}$ в $\mathbb{Z}$, що задовольняє умову: для будь-яких СС $(X, U, R) \in \hat{\mathbb{Z}}$, $(X', \Theta, U', g) \in \mathbb{Z}$ $(X', \Theta, U', g) \in \mathrm{P}((X, U, R))$ тоді і тільки тоді, коли

1) $X = X', U = U'$;
2) $\Theta \subseteq \prod\limits_{u \in U} R(u)$;
3) $\theta(u) = g(\theta, u)$ для будь-яких $u \in U, \theta \in \Theta$;
4) $R(u) = g(\Theta, u)$ для будь-яких $u \in U$.

З цього визначення слідує, що $\mathtt{dom}\mathrm{P} = \hat{\mathbb{Z}}$ и $\mathtt{im}\mathrm{P} \subseteq \mathbb{Z}_F$.

Означення 10. *Представленням* СС класу $\hat{\mathbb{Z}}$ називається будь-яке таке відображення $\tau : \hat{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}$, що для будь-якої СС $(X, U, R) \in \hat{\mathbb{Z}}$ маємо $\tau((X, U, R)) \in \mathrm{P}((X, U, R))$.

Введемо відображення $\rho : \hat{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}$ таким чином. Для будь-якої СС

$(X, U, R) \in \hat{\mathbb{Z}}$ $\rho((X, U, R)) = (X, \Theta, U, g) \in \mathrm{P}((X, U, R))$, а

$$\Theta = \prod_{u \in U} R(u). \tag{2}$$

Ясно, що відображення ρ СС класу $\hat{\mathbb{Z}}$ є представленням СС цього класу.

Теорема 1. 1. $\widehat{\text{Пр}} \circ P = I_{\hat{\mathbb{Z}}},\ P \circ \widehat{\text{Пр}}|_{\mathbb{Z}_F} \neq I_{\mathbb{Z}_F}$.

2. $\widehat{\text{Пр}} \circ \rho = I_{\hat{\mathbb{Z}}},\ \rho \circ \widehat{\text{Пр}}|_{\mathbb{Z}_F} \neq I_{\mathbb{Z}_F},\ \rho \circ \widehat{\text{Пр}}|_{\mathbb{Z}'} = I_{\mathbb{Z}'}$, *де*

$$\mathbb{Z}' = \{(X, \Theta, U) \in \mathbb{Z}_F : \Theta = \prod_{u \in U} \bigcup_{\theta \in \Theta} \theta(u)\}.$$

3. $P\ (\hat{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z}_F$.

4. $\widehat{\text{Пр}}(\mathbb{Z}) = \widehat{\text{Пр}}(\mathbb{Z}_F) = \hat{\mathbb{Z}}$.

Доведення.

1. В силу пункту 1) визначення 9 і визначення 8, маємо що $\widehat{Пр} \circ$ Р $= \widehat{Пр}|_{\mathbb{Z}_F} \circ$ Р. Але $(\widehat{Пр}|_{\mathbb{Z}_F})^{-1} =$Р, в силу пунктів 1), 3) визначення 9 і визначення 8. Але для будь-якої відповідності Q маємо $Q \circ Q^{-1} \supseteq I_{\mathtt{im}Q}$, а $Q \circ Q^{-1} = I_{\mathtt{im}Q}$ тоді і тільки тоді, коли $Q|_{\mathtt{dom}Q}$ — відображення. Взявши в якості Q відповідність $\widehat{Пр}|_{\mathbb{Z}_F}$, отримаємо рівність, що вимагається. *А* при $Q =$Р, так як Р многозначна відповідність, то отримуємо рівність, що вимагається.

2. Випливає з того, що, $\mathtt{dom}\rho = \hat{\mathbb{Z}}$, $\mathtt{dom}\widehat{Пр}|_{\mathbb{Z}'} = \mathbb{Z}'$, $\rho \subseteq$Р і роздумів аналогічних, проведеним в пункті 1.

3. Включення $\mathrm{P}(\hat{\mathbb{Z}}) \subseteq \mathbb{Z}_F$ одразу випливає з пункту 1) визначення 9. Включення в інший бік випливає з того, що Р $(\hat{\mathbb{Z}}) \supseteq \rho(\hat{\mathbb{Z}})$, так як Р$\supseteq$ $_\rho$, а $\rho(\hat{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z}_F$ в силу доведеного пункту 2.

4. В силу доведених пунктів 1 і 3 маємо, що $\hat{\mathbb{Z}} = \widehat{Пр} \circ \mathrm{P}(\hat{\mathbb{Z}}) = \widehat{Пр}(\mathrm{P}(\hat{\mathbb{Z}})) = \widehat{Пр}(\mathbb{Z}_F)$. То $\widehat{Пр}(\mathbb{Z}_F) = \hat{\mathbb{Z}}$. Далі,

$\widehat{Пр}(\mathbb{Z}) \supseteq \widehat{Пр}(\mathbb{Z}_F) = \hat{\mathbb{Z}}$, то $\widehat{Пр}(\mathbb{Z}) \supseteq \hat{\mathbb{Z}}$. Але за визначенням проекції $\widehat{Пр}(\mathbb{Z}) \subseteq \hat{\mathbb{Z}}$. Звідси $\widehat{Пр}(\mathbb{Z}) = \hat{\mathbb{Z}}$.

Теорема повністю доведена.

Покажемо, що СС у лотерейній формі $(X, U, R) \in \hat{\mathbb{Z}}$ і СС в матричній формі $(X', \Theta, U', g) \in \mathbb{Z}$ еквівалентні тоді і тільки тоді, коли $(X', \Theta, U', g) \simeq \simeq \rho((X, U, R))$.

Насправді, достатність цього твердження очевидна. Також зрозуміло, що, якщо СС (X, Θ, U, g) еквівалентна СС (X, U, R), то (X, Θ, U, g) має отримуватись з (X, U, R) операцією розтягування, тобто бути представленням класу $\hat{\mathbb{Z}}$. Щодо умови $\Theta = \prod\limits_{u \in U} R(u)$, то його можна рахувати просто технічною умовою. Однак насправді існують цілком виразні інтуїтивні передумови для того, щоб бачити в цьому дещо більше. Виявляється, умова (2) буде виконуватись для будь-якого однотипного представлення класу $\hat{\mathbb{Z}}$, тобто представлення, за якого огрубіння СС у лотерейній формі не призводить до розширення множини неспостережуваних параметрів, що обумовлює задання однотипним представленням лотерейної СС тої ж ситуації, але в параметричній формі (яка при цьому нічого не додає до непараметричної). Сформулюємо точніше це твердження у вигляді теореми, попередньо визначивши однотипність.

Означення 11. Представлення φ СС класу $\hat{\mathbb{Z}}$ називається *однотипним*, якщо для будь-яких непорожніх множин X, U з умов $R' \subseteq R \subseteq U \times \times X$ і $\varphi((X, U, R)) = (X, \Theta, U, g)$, $\varphi((X, U, R')) = = (X, \Theta', U, g')$ випливає $\Theta' \subseteq \Theta$.

Теорема 2. *Представлення СС класу $\hat{\mathbb{Z}}$ є однотипним, тоді і тільки тоді, коли воно збігається з відображенням ρ.*

Доведення. Нехай φ — однотипне представлення і $\varphi \neq \rho$. Тоді, так як φ — представлення, то знайдуться непорожні множини X, U і $R \subseteq U \times X$, що $\varphi((X, U, R)) = (X, \Theta, U, g)$ і $\Theta \subset \prod\limits_{u \in U} R(u)$. Нехай

$$\overline{\theta} \in \prod_{u \in U} R(u) \backslash \Theta. \tag{3}$$

В такому випадку розглянемо СС $(X, U, \Gamma_{\overline{\theta}}) \in \hat{\mathbb{Z}}$. Тоді $\varphi((X, U, \Gamma_{\overline{\theta}})) = = (X, \{\overline{\theta}\}, U, g_{\overline{\theta}})$. Але в силу однотипності розтягнення φ, $\{\overline{\theta}\} \subseteq \Theta$, що суперечить (3).

З іншого боку, з визначення відображення ρ випливає, що воно є однотипним представленням СС класу $\hat{\mathbb{Z}}$.

Теорема доведена.

Таким чином, маючи СС у лотерейній формі $(X, U, R) \in \hat{\mathbb{Z}}$, ми можемо замінити її на еквівалентну СС у матричній формі $\rho((X, U, R)) \in \mathbb{Z}$. Іншими словами, клас СС $\hat{\mathbb{Z}}$ природним чином вкладається у клас СС $\mathbb{Z}$ відносно задання СЗВ.

Постановка задачі

У роботі [1] ставиться таке запитання: «Якщо параметр θ не спостерігається, то чи обов'язково вводити його у розгляд? Чи не простіше замість матричної СС розглядати відповідну їй лотерейну СС? Зв'язок матричної СС з породженою нею лотерейною СС очевидний. . . » (с. 69). Тут під «породженням» розуміється операція проектування. І далі: «Зрозуміло, що для цілей безпосереднього прийняття рішення лотерейна форма СС підходить анітрохи не менше, ніж матрична форма СС. Однак ситуація різко змінюється, як тільки ми захочемо перед прийняттям рішення провести експеримент для отримання додаткової інформації про об'єкт, тобто скористатися спостереженням. . . » (с. 69).

Залишимо осторонь питання про експеримент та абсолютно резонне обгрунтування в [1] переваги матричної форми СС для прийняття рішення, що використовує спостереження, з яким важко не погодитись. Однак попереднє твердження в цій цитаті є не настільки очевидним і викликає необхідність більш детального дослідження. Розглянемо СС $\hat{\mathcal{Z}} := ((\{x_1, x_2\}, \{(x_2, x_1)\}), \{u_1, u_2\}, \{u_1, u_2\} \times \times \{x_1, x_2\}) \in \hat{\mathbf{Z}}$ і дві СС — $\mathcal{Z}_1 := = ((\{x_1, x_2\}, \{(x_2, x_1)\}), \{\theta_1, \theta_2\}, \{u_1, u_2\}, g_1) \in \mathbf{Z}$ і $\mathcal{Z}_2 := := ((\{x_1, x_2\}, \{(x_2, x_1)\}), \{\theta_1, \theta_2\}, \{u_1, u_2\}, g_2) \in \in \mathbf{Z}$, де $g_1(\theta_1, u_i) = x_2$, $g_1(\theta_2, u_i) = x_1$, $g_2(\theta_i, u_1) = x_1$, $g_2(\theta_i, u_2) = = x_2$, $i = \overline{1, 2}$ (рис. 1–3).

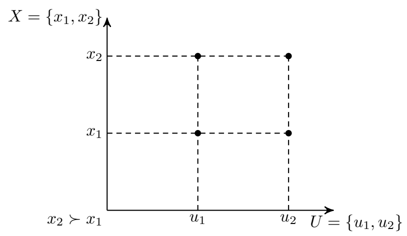

Рис. 1. СС
$\hat{\mathcal{Z}} := ((\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_1\}),\ \{u_1, u_2\}, \{u_1, u_2\} \times \times \{x_1, x_2\}) \in \hat{\mathbf{Z}}$.

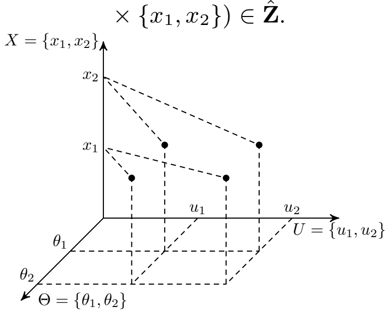

Рис. 2. СС
$\mathcal{Z}_1 := (\{x_1, x_2\},\ \{\theta_1, \theta_2\},\ \{u_1, u_2\},\ g_1) \in \mathbf{Z}$, де $g_1(\theta_1, u_i) = x_2,\ g_1(\theta_2, u_i) = x_1,\ \ i = \overline{1, 2}$.

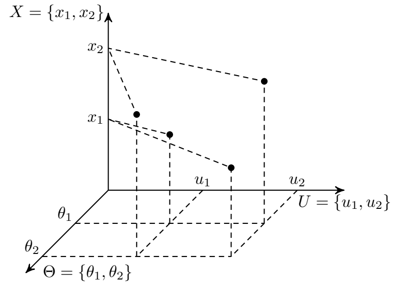

Рис. 3. СС
$\mathcal{Z}_2 := (\{x_1, x_2\},\ \{\theta_1, \theta_2\},\ \{u_1, u_2\},\ g_2) \in \mathbf{Z}$, де
$g_2(\theta_i, u_i) = x_1,\ g_2(\theta_i, u_2) = x_2,\ i = \overline{1,2}.$

Тоді

$$\widehat{\mathit{\Pi p}}(\mathcal{Z}_1) = \widehat{\mathit{\Pi p}}(\mathcal{Z}_2) = \hat{\mathcal{Z}}.$$

При цьому для значного числа ТПР СС $\mathcal{Z}_1$ цілком визначена, тобто без невизначеності, в той час, як СС $\mathcal{Z}_2$ і $\hat{\mathcal{Z}}$ такими не будуть.

Це приводить до висновків, що, загалом кажучи, матрична форма СС дає додаткову інформацію про СЗВ.

Як було зазначено вище, задаючи СС, ми вже встановлюємо якусь закономірність, властиву «механізму випадковості» результатів кожної дії з безлічі рішень цієї СС. Однак у реальних ситуаціях ми часто цей механізм випадковості можемо уточнити. Це є зокрема предметом теорії ймовірностей, де для закономірностей, що описують механізм випадковості, вводяться імовірнісні розподіли. При більш загальних припущеннях їм відповідають статистичні закономірності, що виходять за рамки теорії ймовірностей.

Основний результат

Нехай для будь-якого $u \in U \quad (X_u, \Xi_u)$ — вимірний простір, тобто Ξ_u — деяка алгебра підмножин множини X_u.

Припустимо, що на алгебрі $\bigotimes\limits_{i=1}^{n} \Xi_{u_i}$ (алгебра, породжена напівкільцем $\prod\limits_{i=1}^{n} \Xi_{u_i}$ (див. приклад, [2, с. 42–45]) для кожного $n \in \mathbb{N}$ і для будь-якої вибірки $u_1, \ldots, u_n$, де u_i $(i = \overline{1,n})$ — довільні точки множини U, визначено множину ймовірнісних мір

$$P_{u_1,\ldots,u_n} \subseteq \{p_{u_1,\ldots,u_n} \in PF(\prod_{i=1}^{n} X_{u_i})\}, \qquad (4)$$

причому сімейство множин $\{P_{u_1,\ldots,u_n} : u_i \in U, i = \overline{1,n}\}$, визначених в силу співвідношення (4), для будь-яких $A^{(n)} \in \bigotimes\limits_{i=1}^{n} \Xi_{u_i}$ задовольняють таким *умовам узгодженості*:

a) для будь-якої $p_{u_1,\ldots,u_{n+m}} \in P_{u_1,\ldots,u_{n+m}}$

$$p_{u_1,\ldots,u_n,u_{n+1},\ldots,u_{n+m}}(A^{(n)} \times \prod_{i=1}^{m} X_{n+i}) = p_{u_1,\ldots,u_n}(A^{(n)}),$$ де $p_{u_1,\ldots,u_n} \in P_{u_1,\ldots,u_n}$,

b) для будь-якої $p_{u_1,\ldots,u_n} \in P_{u_1,\ldots,u_n}$

$p_{u_1,\ldots,u_n}(A^{(n)}) = p_{s(u_1,\ldots,u_n)}(\{s(a) : a \in A^{(n)}\})$, де $s(u_1, \ldots, u_n)$ — будь-яка перестановка елементів $u_1, \ldots, u_n$.

Розглянемо клас СС $\hat{\mathbb{Z}}$ із заданими статистичними закономірностями, що описують «механізм випадковості» результатів механізм випадковості СС. Тоді кожній СС цього класу $(X, U, \bigcup\limits_{u \in U}(u, X_u))$, де X_u — непуста підмножина множини X, а $(u, X_u) := \{(u, x) : x \in X_u\}$, відповідає впорядкована четвірка виду $(X, U, \bigcup\limits_{u \in U}(u, X_u), \{P_u : u \in U\})$, де (X_u, Ξ_u, P_u) — будь-який простір з розподілом, алгебра Ξ_u якого є слідом алгебри Ξ в X_u (т.е. $\Xi_u = \Xi \cap 2^{X_u}$). Через $\hat{\mathbb{Z}}\hat{\mathbb{P}}$ позначимо клас всіх четвірок вказаного виду.

Розглянемо також СС класу $\mathbb{Z}$ із заданою статистичною закономірністю, що описує «механізм випадковості» стану природи. Цій СС буде відповідати впорядкована п'ятірка виду (X, Θ, U, g, P), де $\{\Theta, \Sigma, P\}$ — ймовірносний простір із розподілом. Тоді через $\mathbb{ZP}$ позначимо клас всіх п'ятірок вказаного виду.

Елементи класу $\mathbb{ZP}$ ($\hat{\mathbb{Z}}\hat{\mathbb{P}}$) будемо називати *СС з розподілом (розподілами)* в матричній (лотерейній) формі.

Означення 12. *Параметричною МС* будемо називати її матричну схему $Z = (X, \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}$, доповнену статистичною закономірністю на Θ і позначати через *M*, тобто $M := (X, \Theta, U, g, P)$, де $P \in P(\Theta)$. *Непараметричною МС* будемо називати її лотерейну схему $\hat{Z} = (X, U, \bigcup\limits_{u \in U}(u, X_u)) \in \hat{\mathbb{Z}}$, доповнену сімейством узгоджених статистичних закономірностей на множинах $\prod\limits_{i=1}^{n} X_{u_i}$, $u_i \in U$, $u_{i_1} \neq u_{i_2}$ при $i_1 \neq i_2$, $n \in \mathbb{N}$ і позначати через $\hat{M} := (X, U, \bigcup\limits_{u \in U}(u, X_u)), \{P_{u_1,\ldots,u_n}\})$, де $(u, X_u) := \{(u, x) : x \in X_u\}$, $P_{u_1,\ldots,u_n} \in P(\prod\limits_{i=1}^{n} X_{u_i})$.

Множину всіх параметричних МС будемо позначати $\mathbb{M}$. Ясно, що $\mathbb{M} = \mathbb{ZP}$. Множина всіх непараметричних МС будемо позначати $\hat{\mathbb{M}}$.

Зауваження 1. Якщо елемент класу $\mathbb{ZP}$ визначає відповідну параметричну МС (X, Θ, U, g, P), бо $\mathbb{M} = \mathbb{ZP}$, то елемент класу $\hat{\mathbb{Z}}\hat{\mathbb{P}}$, взагалі кажучи, непараметричну МС не визначає. Ясно, що не вистачає інформації про спільні розподіли результатів скінчених послідовностей дій ТПР, тобто $\hat{\mathbb{M}} \subset \hat{\mathbb{Z}}\hat{\mathbb{P}}$.

На рівні схем ситуацій із теореми 1 випливає, що параметрична ситуація (матрична схема) не менш інформативна, ніж відповідна їй (тобто тій, що задає ту саму СЗВ) непараметрична ситуація (лотерейна схема). При цьому кожній матричній СС відповідає єдина лотерейна СС тієї ж СЗВ, що є її проекцією. А саме для будь-якої СС $Z = (X, \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}$ відповідна їй СС із $\hat{\mathbb{Z}}$ має вид $\hat{Z} = (X, U, \bigcup\limits_{u \in U}(u, X_u))$, де $X_u := g(\Theta, u) := \{g(\theta, u) : \theta \in \Theta\}, (u, X_u) := \{(u, x) : x \in X_u\}, \quad \forall u \in U$. З іншого боку, з теореми 1 також випливає, що для будь-якої СС $\hat{Z} \in \hat{\mathbb{Z}}$ знайдеться матрична СС Z (не єдина), проекція якої збігається з $\hat{Z}$, тобто $\widehat{Пр}(Z) = \hat{Z}$. Наприклад, візьмемо за множину значень фіктивного параметра сукупність всіх функціональних звужень відображення, що визначає лотерейну СС $\hat{Z}$. Ми отримаємо параметричну СС Z, яка задає ту саму СЗВ, якщо визначити за значення відображення наслідків (від довільно взятих фіктивного параметра і рішення) результат застосування вибраного параметра до вибраного рішення. Тобто СС Z є представленням СС $\hat{Z}$.

Менш очевидно, що аналогічно відбувається з параметричними і непараметричними МС. Для точного формулювання цього результату введемо необхідні означення.

Означення 13. Параметрична МС $M = (X, \Theta, U, g, P)$ називається *представленням* непараметричнорї МС $\hat{M} = (X, U, \bigcup\limits_{u \in U}(u, X_u), \{P_{u_1,\ldots,u_n}\})$, якщо існує простір із розподілом (Θ, Σ, P), сімейство вимірних просторів $\{(X_u, \Xi_u) : u \in U\}$, і відображення $g : \Theta \times U \to X$ такі, що $X_u = g(\Theta, u)$, $\Xi_u := \{g^{-1}(B, u) : B \in \Sigma\}$, а скінченновимірні статистичні закономірності $\{P_{u_1,\ldots,u_n}\}$ випадкових відображень $g(\theta, u)$ $\forall p \in P$ збігаються із заданим сімейством (4).

Ясно, що при цьому g — (Σ, Ξ_u)-вимірне при кожному $u \in U$ (т.е. $\forall\ A \in \Xi_u$ і $\forall\ u \in U$ множина $\{\theta : g(\theta, u) \in A\}$ належить алгебрі Σ), де $\Xi_u = \Xi \cap 2^{X_u}$.

Означення 14. Якщо $\{(X_u, \Xi_u) : u \in U\}$ деяка сукупність вимірних підпросторів простору X, Θ — простір всіх таких відображень θ, що задані на множині U зі значеннями в просторі X і $\theta(u) \in X_u \quad \forall u \in U$, а $A^{(n)} \in \bigotimes\limits_{i=1}^{n} \Xi_{u_i}$, де $u_i \in U (i = \overline{1, n})$, то множина відображень $\theta \in \Theta$, для яких точка $(\theta(u_1), \ldots, \theta(u_n))$ із $\prod\limits_{i=1}^{n} X_{u_i}$ належить $A^{(n)}$, тобто множина $C_{u_1,\ldots,u_n}(A^{(n)}) = \{\theta(u) : (\theta(u_1), \ldots, \theta(u_n)) \in A^{(n)}\}$, називається *циліндричною множиною* в Θ з основою $A^{(n)}$ над координатами $u_1, \ldots, u_n$.

Ясно, що якщо точки $u_1, \ldots, u_n$ фіксовані, то між циліндричними множинами над координатами $u_1, \ldots, u_n$(їх сукупність позначимо $\mathbb{C}_{u_1,\ldots,u_n}$) і елементами алгебри $\bigotimes\limits_{i=1}^{n} \Xi_{u_i}$ існує ізоморфізм: кожна множина $A^{(n)} \in \bigotimes\limits_{i=1}^{n} \Xi_{u_i}$ визначає циліндричну множину $C_{u_1,\ldots,u_n}(A^{(n)})$, для якої воно є основою; різним основам відповідають різні циліндричні множини; об'єднанню, різниці або перетину основ відповідає об'єднання, різниця або перетин циліндричних множин, що безпосередньо випливає із означення циліндричної множини. Крім того, легко побачити, що будь-які дві циліндричні множини можна завжди розглядати як циліндричні множини над тією самою послідовністю координат. Звідси випливає, що якщо розглядати алгебраїчні дії над скінченним числом циліндричних множин, то можна вважати, що вони задані над фіксованою послідовністю координат. Тому клас $\mathbb{C}$ всіх циліндричних множин утворює алгебру множин.

Означення 15. Непараметрична МС $\hat{M} \in \hat{\mathbb{M}}$ називається *проекцією* МС $M = \{X, \Theta, U, g, P\} \in \mathbb{M}$, якщо $\hat{M} = (X, U, \bigcup\limits_{u \in U}(u, X_u), \{P_{u_1,\ldots,u_n}\})$, де $X_u = g(\Theta, u)\ \forall\ u \in U$, $\Xi = \bigotimes\limits_{u \in U} \Xi_u$, відображення g — (Σ, Ξ_u)-вимірне для $\forall\ u \in U$, $u_1, \ldots, u_n$ — будь-яка вибірка із U і кожна ймовірнісна міра $p_{u_1,\ldots,u_n}$ на $\prod\limits_{i=1}^{n} X_{u_i}$, яка належить множині $P_{u_1,\ldots,u_n}$, така, що для деякої міри $p \in P \in P(\Theta)$ має місце

$$p_{u_1,\ldots,u_n}(A^{(n)}) = p(\{\theta : (g(\theta, u_1), g(\theta, u_2), \ldots,$$

$$g(\theta, u_n)) \in A^{(n)}\}\ \forall A^{(n)} \in \prod_{i=1}^{n} \Xi_{u_i}. \qquad (1)$$

Із означення зрозуміло, що якщо операція проектування параметричних моделей визначена, то вона однозначна, тобто у кожній параметричній МС є не більше однієї проекції.

Теорема 3. *Будь-яка параметрична МС* (X, Θ, U, g, P), *де відображення наслідків* g — (Σ, Ξ_u)*-вимірне для кожного* $u \in U$, *має проекцію.*

Доведення. Нехай $M = (X, \Theta, U, g, P) \in \mathbb{M}$, а $\hat{M} = (X, U, \bigcup\limits_{u \in U}(u, X_u), \{P_{u_1,\ldots,u_n}\})$, де множини $X_u, u \in \{P_{u_1,\ldots,u_n}\}$ задаються згідно визначенню. Очевидно, що сімейство множин $\{P_{u_1,\ldots,u_n}\}$ задовольняє умовам узгодженості. Обґрунтування потребує лише те, що сімейство $\{P_{u_1,\ldots,u_n}\}$ є сімейством статистичних закономірностей. А це рівносильне тому, що коли ймовірнісна міра p пробігає замкнуту в топології $\tau(\Theta)$ множину P, то для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ і будь-якої вибірки $u_1, \ldots, u_n$ із множини U ймовірнісні міри $P_{u_1,\ldots,u_n}$ будуть утворювати замкнуту в топології $\tau(\prod_{i=1}^{n} X_{u_i})$ множину $P_{u_1,\ldots,u_n}$. Дійсно, якщо припустити протилежне, тобто, що для деякої вибірки $u_1, u_2, \ldots, u_n$ із множини U множина $PF(\prod_{i=1}^{n} X_{u_i}) \backslash P_{u_1,\ldots,u_n}$ буде відкритою в топології $\tau(\prod_{i=1}^{n} X_{u_i})$, то існує така ймовірнісна міра $p_{u_1,\ldots,u_n}$ із множини $PF(\prod_{i=1}^{n} X_{u_i})$, що не входить у множину $P_{u_1,\ldots,u_n}$ і для будь-яких $k, m \in \mathbb{N}$ знайдеться ймовірнісна міра $p_{k,u_1,\ldots,u_n}$ із множини $P_{u_1,\ldots,u_n}$, для якої за будь-яких $f_1, f_2, \ldots, f_m \in B_{\bigotimes_{i=1}^{n} \Xi_{u_i}}(\prod_{i=1}^{n} X_{u_i})$

$$\left| \int_{\bar{X}} f_j(x_{u_1}, \ldots, x_{u_n}) \times p_{k,u_1,\ldots,u_n}(d(x_{u_1}, \ldots, x_{u_n})) - \int_{\bar{X}} f_j(x_{u_1}, \ldots, x_{u_n}) \times p_{u_1,\ldots,u_n}(d(x_{u_1}, \ldots, x_{u_n})) \right| < \frac{1}{k}, \quad j = \overline{1,m}. \quad (5)$$

Нехай $Y := \{(g(\theta, u_1), \ldots, g(\theta, u_n)) : \theta \in \Theta\}$. В силу (Σ, Ξ_u)-вимірності відображення $g(\theta, u)$ за будь-яких $u \in U$, множина Y є $\bigotimes_{i=1}^{n} \Xi_{u_i}$-вимірною. Тоді для будь-якої ймовірнісної міри $q_{u_1,\ldots,u_n}$, заданої на вимірному просторі $(\prod_{i=1}^{n} X_{u_i}, \bigotimes_{i=1}^{n} \Xi_{u_i})$ і зосередженої в множині Y, та будь-якої функції $f \in B_{\bigotimes_{i=1}^{n} \Xi_{u_i}}(\prod_{i=1}^{n} X_{u_i})$ маємо

$$\int_{\bar{X}} f(x_{u_1}, \ldots, x_{u_n}) \times q_{u_1,\ldots,u_n}(d(x_{u_1}, \ldots, x_{u_n})) = \int_{Y} f(x_{u_1}, \ldots, x_{u_n}) \times q_{u_1,\ldots,u_n}(d(x_{u_1}, \ldots, x_{u_n})) + \int_{\bar{Y}} f(x_{u_1}, \ldots, x_{u_n}) \times q_{u_1,\ldots,u_n}(d(x_{u_1}, \ldots, x_{u_n})), \quad (6)$$

де $\bar{X} = \prod_{i=1}^{n} X_{u_i}$, $\bar{Y} = \prod_{i=1}^{n} X_{u_i} \backslash Y$.

Але, в силу обмеженості f, знайдеться таке число μ, що $|f(x_{u_1}, \ldots, x_{u_n})| \leqslant \mu$ для будь-яких $(x_{u_1}, \ldots, x_{u_n}) \in \prod_{i=1}^{n} X_{u_i}$. Отже,

$$\left| \int_{\bar{Y}} f(x_{u_1}, \ldots, x_{u_n}) \times q_{u_1,\ldots,u_n}\big(d(x_{u_1}, \ldots, x_{u_n})\big) \right| \leq \mu \int_{\bar{Y}} q_{u_1,\ldots,u_n}\big(d(x_{u_1}, \ldots, x_{u_n})\big) = \mu q_{u_1,\ldots,u_n}\Big(\prod_{i=1}^{n} X_{u_i} \setminus Y\Big) = 0.$$

Тоді маємо з (6), що

$$\int_{\bar{X}} f(x_{u_1}, \ldots, x_{u_n}) \times q_{u_1,\ldots,u_n}(d(x_{u_1}, \ldots, x_{u_n})) = \int_{Y} f(x_{u_1}, \ldots, x_{u_n}) \times q_{u_1,\ldots,u_n}(d(x_{u_1}, \ldots, x_{u_n})) = \int_{\Theta} f(g(\theta, u_1), \ldots, g(\theta, u_n)) q(d\theta), \quad (7)$$

де для будь-якого $B \in \Sigma$

$$q(B) := q_{u_1,\ldots,u_n} \times (\{(g(\theta, u_1), \ldots, g(\theta, u_n)) : \theta \in B\}).$$

Отже, скориставшись рівністю (7), для будь-яких мір p_k и p на Θ, що задовольняють співвідношенню (15) відносно відповідних мір $p_{k,u_1,\ldots,u_n}$ і $p_{u_1,\ldots,u_n}$ на $\prod_{i=1}^{n} X_{u_i}$, нерівність (5) можна переписати у вигляді

$$\left| \int_{\Theta} f_j(g(\theta, u_1), \ldots, g(\theta, u_n)) p_k(d\theta) - \int_{\Theta} f_j(g(\theta, u_1), \ldots, g(\theta, u_n)) p(d\theta) \right| < \frac{1}{k}, \quad j = \overline{1,m}. \quad (8)$$

Тепер визначимо на множині Θ відношення еквівалентності таким чином, що для будь-яких $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$

$$\theta_1 \sim \theta_2 :\Longleftrightarrow \theta_1(u_i) = \theta_2(u_i), \quad i = \overline{1,n}. \quad (9)$$

Транзитивність, симетричність, рефлексивність визначеної співвідношенням (9) відповідності очевидні. Позначимо клас еквівалентності елемента θ із фактор-множини $\Theta/\sim$ через $\widetilde{\theta}$ (проекція елемента θ відносно еквівалентності $(\sim)$), тобто $\Theta/\sim = \{\widetilde{\theta} : \theta \in \Theta\} := \widetilde{\Theta}$. Відповідно алгебру, що породжується алгеброю Σ при цьому проектуванні, позначимо $\widetilde{\Sigma}$, а її елемент, який є проекцією елемента $B \in \Sigma$, — через $\widetilde{B}$. Ясно, що алгебра $\widetilde{\sum}$ ізоморфна алгебрі $\bigotimes_{i=1}^{n} \Xi_{u_i}$.

Тоді для всякої міри $p \in PF(\Theta)$ можна визначити міру $\widetilde{p} \in PF(\widetilde{\Theta})$ так, що для будь-яких $B \in \Sigma$

$$\widetilde{p}(\widetilde{B}) := p(B). \tag{10}$$

При цьому довільна множина мір $P \subseteq PF(\Theta)$ замкнена в топології $\tau(\Theta)$ тоді і тільки тоді, коли відповідна їй множина мір $\widetilde{P} = \{\widetilde{p} : p \in P\}$, де p і $\widetilde{p}$ зв'язані співвідношенням (10), замкнена в фактор-топології відносно відповідності $(\sim)$(див. [3, Теорема 3.10]), що збігається з $\tau(\widetilde{\Theta})$.

Далі визначимо функції $F_j,\ \ j = \overline{1,m}$ на $\widetilde{\Theta}$ так, що для будь-яких $\widetilde{\theta} \in \widetilde{\Theta}$

$$F_j(\widetilde{\Theta}) := f_j(g(\theta, u_1), g(\theta, u_2), \ldots, g(\theta, u_n)). \tag{11}$$

Коректність цього означення випливає із співвідношення (9). При цьому для кожного $j = \overline{1,m}$ функція F_j пробігає всю множину $B_{\widetilde{\Sigma}}(\widetilde{\Theta})$, коли функція f_j пробігає множину $B_{\bigotimes_{i=1}^{n} \Xi_{u_i}}(\prod_{i=1}^{n} X_{u_i})$, в силу (Σ, Ξ_u)-вимірності відображення $g(\theta, u),\ \forall u \in U$ і того, що $g(\Theta, u_i) = X_{u_i},\ i = \overline{1,n}$.

Тепер співвідношення (8) можна переписати в такому вигляді

$$\left| \int_{\widetilde{\Theta}} F_j(\widetilde{\theta}) \widetilde{p}_k(d\widetilde{\theta}) - \int_{\widetilde{\Theta}} F_j(\widetilde{\theta}) \widetilde{p}(d\widetilde{\theta}) \right| < \frac{1}{k}, \quad j = \overline{1,m}. \tag{12}$$

Таким чином послідовність мір $\{\widetilde{p}_k, k \in \mathbb{N}\}$ на $\widetilde{\Theta}$ збігається в топології $\tau(\widetilde{\Theta})$ до міри $\widetilde{p}$, а це означає, що відповідна їй послідовність мір $\{p_k, k \in \mathbb{N}\}$ на Θ збігається в топології $\tau(\Theta)$ до міри p.

Оскільки міри $p_{k,u_1,\ldots,u_n} \in P_{u_1,\ldots,u_n},\ \ \forall k \in \mathbb{N}$, то міри p_k, що їх визначають згідно зі співвідношенням (15), за умовою, належать статистичній закономірності P. Тоді в силу замкненості в топології $\tau(\Theta)$ множини P і збіжності в топології $\tau(\Theta)$ послідовності $\{p_k, k \in \mathbb{N}\}$ до міри p, то міра p також належить статистичній закономірності P. А отже міра $p_{u_1,\ldots,u_n}$ визначається, згідно зі співвідношенням (15), мірою p із P, тобто $p_{u_1,\ldots,u_n} \in P_{u_1,\ldots,u_n}$, що суперечить припущенню.

Теорема доведена.

Теорема 4. *Будь-яка непараметрична МС припускає деяке представлення і є його проекцією.*

Доведення. Припустимо, що задана деяка непараметрична МС $\hat{M} = (X, U, \bigcup_{u \in U}(u, X_u), \{P_{u_1,\ldots,u_n}\})$, де $(u, X_u) := \{(u,x) : x \in X_u\}$. Покажемо, що для $\hat{M}$ існує представлення $M = (X', \Theta, U', g, P)$. Очевидно, що $X = X'$ и $U = U'$. За простір Θ візьмемо простір всіх таких відображень θ, що задані на U зі значеннями в X і $\theta(u) \in X_u$. Відображення g визначимо так, що $g(\theta, u) = \theta(u)$. Тим самим четвіркою (X, Θ, U, g) ми задали представлення СС $\hat{Z} = (X, U, \bigcup_{u \in U}(u, X_u))$, де $(u, X_u) := \{(u,x) : x \in X_u\}$.

Далі визначимо на алгебрі циліндричних множин $\mathbb{C}$ простору Θ для будь-якої ймовірнісної міри $p_{u_1,\ldots,u_n} \in P_{u_1,\ldots,u_n}$ функцію множин $p(C)$, $C \in \mathbb{C}$ умовою

$$p(C) := p_{u_1,\ldots,u_n}(A^{(n)}), \tag{13}$$

якщо C є циліндричною множиною з основою $A^{(n)}$ над координатами $u_1, \ldots, u_n$. Умови узгодженості забезпечують коректність визначення функції $p(C)$, $C \in \mathbb{C}$. Нехай C_k, $k = \overline{1,m}$ — послідовність циліндричних множин. Без зменшення загальності, можна вважати, що вони задані основами $A_k^{(n)}$ над тією самою послідовністю координат $u_1, \ldots, u_n$. Алгебраїчним операціям над множинами C_k відповідають ті самі дії над основами $A_k^{(n)}$. Оскільки ймовірнісна міра $p_{u_1,\ldots,u_n}$ адитивна на $\bigotimes_{i=1}^{n} \Xi_{u_i}$, то звідси випливає, що функція множин $p(C)$, $C \in \mathbb{C}$ адитивна на $\mathbb{C}$. Коли ймовірнісні міри $p_{u_1,\ldots,u_n}$ пробігають замкнену в топології $\tau(\prod_{i=1}^{n} X_{u_i})$ множину $P_{u_1,\ldots,u_n}$, то сімейство ймовірнісних мір p буде утворювати деяку замкнену в топології $\tau(\Theta)$ множину P. Дійсно, якщо припустити протилежне, тобто, що множина $PF(\Theta) \backslash P$ не буде відкритою в топології $\tau(\Theta)$, то існує така ймовірнісна міра p із множини $PF(\Theta)$, яка не входить в множину P і $\forall k \in \mathbb{N}$ знайдеться ймовірнісна міра p_k із множини P, що для будь-яких функцій $f_1, f_2, \ldots, f_m \in B_{\mathbb{C}}(\Theta),\ \ m \in \mathbb{N}$ має місце нерівність

$$\left| \int_{\Theta} f_j(\theta) p_k(d\theta) - \int_{\Theta} f_j(\theta) p(d\theta) \right| < \frac{1}{k}, \quad j = \overline{1,m}. \tag{14}$$

Зафіксуємо вибірку $u_1, u_2, \ldots, u_n$ із множини U та розглянемо довільну сукупність таких m функцій $f'_1, f'_2, \ldots, f'_m$, що, якщо $\widetilde{\theta}_1 = \widetilde{\theta}_2$, то $f'_j(\theta_1) = f'_j(\theta_2)$ для будь-яких $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ і $j = \overline{1,m}$, де еквівалентність $(\sim)$ визначається згідно з (9).

Якщо для кожної такої функції $f'_j,\ j = \overline{1,m}$ визначити функцію F'_j на Θ умовою $F'_j(\widetilde{\theta}) := f'_j(\theta)$ для будь-яких $\theta \in \Theta$, що коректно в силу визначення функції f'_j, то $F'_j \in B_{\widetilde{\mathbb{C}}_{u_1,\ldots,u_n}}(\widetilde{\Theta})$, де $\widetilde{\mathbb{C}}_{u_1,\ldots,u_n}$ — проекція алгебри $\mathbb{C}_{u_1,\ldots,u_n}$ відносно еквівалентності $(\sim)$. При цьому зрозуміло, що функція F'_j пробігає всю множину $B_{\widetilde{\mathbb{C}}_{u_1,\dots,u_n}}(\widetilde{\Theta})$, коли функція f_j пробігає множину $B_{\mathbb{C}}(\Theta)$.

Тоді для будь-якої функції $F'_j \in B_{\widetilde{\mathbb{C}}_{u_1,\dots,u_n}}(\widetilde{\Theta})$, $j = \overline{1,m}$, в силу співвідношення (14), отримаємо, що

$$\left|\int_{\widetilde{\Theta}} F'_j(\widetilde{\theta})\widetilde{p}_k(d\widetilde{\theta}) - \int_{\widetilde{\Theta}} F'_j(\widetilde{\theta})\widetilde{p}(d\widetilde{\theta})\right| < \frac{1}{k}, \qquad (15)$$

де міри $\widetilde{p_k}, \widetilde{p}$ відповідають мірам p_k, p, згідно зі співвідношенням (10).

Або, враховуючи ізоморфізм множин $\widetilde{\Theta}$ і $\prod_{i=1}^{n} X_{u_i}$, в силу визначення множини Θ, а також визначень алгебри $\widetilde{\mathbb{C}}_{u_1,\dots,u_n}$ і алгебри $\bigotimes_{i=1}^{n} \Xi_{u_i}$, для будь-яких функцій має місце $F''_1, F''_2, \dots, F''_m \in B_{\bigotimes_{i=1}^{n} \Xi_{u_i}}(\prod_{i=1}^{n} X_{u_i}), m \in \mathbb{N}$

$$\Bigg|\int_{\bar{X}} F''_j(x_{u_1}, \dots, x_{u_n}) \times \\ \times p_{k,u_1,\dots,u_n}(d(x_{u_1}, \dots, x_{u_n})) - \\ - \int_{\bar{X}} F''_j(x_{u_1}, \dots, x_{u_n}) \times \\ \times p_{u_1,\dots,u_n}(d(x_{u_1}, \dots, x_{u_n}))\Bigg| < \frac{1}{k}, \\ j = \overline{1,m}. \qquad (16)$$

Це випливає із нерівності (15) при $F''_j(x_{u_1}, \dots, x_{u_n}) := F'_j(\widetilde{\theta})$, $j = \overline{1,m}$, де $\widetilde{\theta}$ таке, що $\theta(u_i) = x_{u_i}$, $i = \overline{1,n}$, для будь-яких $(x_{u_1}, \dots, x_{u_n}) \in \prod_{i=1}^{n} X_{u_i}$, міри $p_{k,u_1,\dots,u_n}$, $p_{u_1,\dots,u_n}$ визначаються відповідно по мірам p_k, p згідно з (10).

Таким чином послідовність мір $\{p_{k,u_1,\dots,u_n}, k \in \mathbb{N}\}$ збігається в топології $\tau(\prod_{i=1}^{n} X_{u_i})$ до міри $p_{u_1,\dots,u_n}$.

Оскільки міри p_k, $\forall k \in \mathbb{N}$ належать множині P, то міри $p_{k,u_1,\dots,u_n}$, що їх визначають згідно зі співвідношенням (5), за умовою, належать статистичній закономірності $P_{u_1,\dots,u_n}$. Тоді, в силу замкненості множини $P_{u_1,\dots,u_n}$ в топології $\tau(\prod_{i=1}^{n} X_{u_i})$ і збіжності в цій топології послідовності $\{p_{k,u_1,\dots,u_n}, k \in \mathbb{N}\}$ до міри $p_{u_1,\dots,u_n}$ маємо, що також і міра $p_{u_1,\dots,u_n}$ належить статистичній закономірності $P_{u_1,\dots,u_n}$. А отже міра p визначається, згідно зі співвідношенням (5), мірою $p_{u_1,\dots,u_n}$ із $P_{u_1,\dots,u_n}$, тобто $p \in P$, що суперечить припущенню.

Таким чином, представлення для довільної непараметричної МС вказано. При цьому із визначення циліндричної множини і співвідношення (13) випливає співвідношення (3). Це означає, що проекція вказаного представлення M для МС $\hat{M}$ збігається з $\hat{M}$.

Теорему доведено.

Із доведених теорем 3 і 4 випливає, що будь-яка параметрична МС має деяку проекцію і будь-яка непараметрична МС (лотерейна СС) є проекцією деякої параметричної МС.

Зокрема, цей результат дозволяє, аналізуючи СПР, не зменшуючи загальності, вважаючи СЗВ параметричною.

Під абстрактним ТПР у СЗВ ми будемо розуміти клас розбиття множини всіх ТПР, в який входять ТПР, що мають однакові відношення переваг на наслідках і що отримують однакові рішення ЗП у цій СЗВ, і тільки вони. Це дає підставу в обраній дослідником СЗВ ввести такі поняття.

Означення 16. *Правилом вибору переваг* (ПВП) для ЗП у класі СС $\mathbb{Z}' \subseteq \mathbb{Z}$ $(\hat{\mathbb{Z}}' \subseteq \hat{\mathbb{Z}})$ (коротко ПВП у $\mathbb{Z}' \subseteq \mathbb{Z}$ $(\hat{\mathbb{Z}}' \subseteq \hat{\mathbb{Z}})$) будемо називати будь-яке відображення $\pi = (\pi_1, \pi_2)$, визначене на $\mathbb{Z}'(\hat{\mathbb{Z}}')$ і співставляюче кожній $Z = (X, \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}'$ $(\hat{Z} = (X, U, R) \in \hat{\mathbb{Z}}')$ деяку пару відповідностей $(X, \succcurlyeq_Z)((X, \succcurlyeq_{\hat{Z}}))$ і $(U, \succcurlyeq^*_Z)$ $((U, \succcurlyeq^*_{\hat{Z}}))$. Клас всіх ПВП у $\mathbb{Z}' \subseteq \mathbb{Z}$ $(\hat{\mathbb{Z}}' \subseteq \hat{\mathbb{Z}})$ будемо позначати $\Pi(\mathbb{Z}')$ $(\Pi(\hat{\mathbb{Z}}'))$.

Кожен абстрактний ТПР є генератором ПВП для класу $\mathbb{Z}'(\hat{\mathbb{Z}}')$, що моделює ТПР відносно рішення ним ЗП у класі $\mathbb{Z}'(\hat{\mathbb{Z}}')$. Знаючи ПВП для $\mathbb{Z}' \subseteq \mathbb{Z}$ $(\hat{\mathbb{Z}}' \subseteq \hat{\mathbb{Z}})$ довільного ТПР, ми можемо дізнатися його рішення ЗП для $Z \in \mathbb{Z}' \subseteq \mathbb{Z}$ $(\hat{Z} \in \hat{\mathbb{Z}}' \subseteq \hat{\mathbb{Z}})$.

Будемо говорити, що ПВП π' в $\mathbb{Z}'(X, \Theta) \subseteq \mathbb{Z}(X, \Theta)$ продовжує ПВП π'' у $\mathbb{Z}''(X, \Theta) \subseteq \mathbb{Z}(X, \Theta)$, якщо значення ПВП π' від будь-якої СС $Z' \in \mathbb{Z}'$ є розширенням значення ПВП π'' від будь-якої СС $Z'' \in \mathbb{Z}''$, що є підсхемою схеми Z', тобто для будь-яких $Z' = (X, \Theta, U, g) \in \mathbb{Z}'$ та $Z'' = (X, \Theta, U', g') \in \mathbb{Z}''$ таких, що $U' \subseteq U$, $g'(\theta, u) = g(\theta, u)$ $\forall \theta \in \Theta$, $\forall u \in U'$ має місце рівність $\pi''(Z'') = \pi'(Z')|_{X \times U'}$.

Також будемо говорити, що рішення φ' ЗП у класі $\mathbb{Z}'(X, \Theta) \subseteq \mathbb{Z}(X, \Theta)$ продовжує рішення φ'' ЗП у класі $\mathbb{Z}''(X, \Theta) \subseteq \mathbb{Z}(X, \Theta)$, якщо для будь-якого відношення переваг $(X, \succcurlyeq)$ ПВП $(\succcurlyeq, \varphi'(\succcurlyeq))$ у $\mathbb{Z}'$ продовжує ПВП $(\succcurlyeq, \varphi''(\succcurlyeq))$ у $\mathbb{Z}''$.

Означення 17. ПВП в $\mathbf{Z}' \subseteq \mathbf{Z}$ $(\hat{\mathbf{Z}}' \subseteq \hat{\mathbf{Z}})$ будемо називати будь-яке відображення п, визначене на $\mathbf{Z}'$ $(\hat{\mathbf{Z}}')$ і співставляюче кожній $\mathcal{Z} = ((X, \succcurlyeq), \Theta, U, g) \in \mathbf{Z}'$ $(\hat{\mathcal{Z}} = ((X, \succcurlyeq), U, R) \in \hat{\mathbf{Z}}')$ деяку відповідність $(U, \succcurlyeq^*_{\mathcal{Z}})$ $((U, \succcurlyeq^*_{\hat{\mathcal{Z}}}))$. Клас усіх ПВП у $\mathbf{Z}' \subseteq \mathbf{Z}$ $(\hat{\mathbf{Z}}' \subseteq \hat{\mathbf{Z}})$ будемо позначати $\Pi(\mathbf{Z}')$ $(\Pi(\hat{\mathbf{Z}}'))$.

Будемо говорити, що клас СС $\mathbb{Z}'' \subseteq \mathbb{Z}$ є звуженням класу СС $\mathbb{Z}' \subseteq \mathbb{Z}$, якщо клас $\mathbb{Z}''$ утворюється із класу $\mathbb{Z}'$ шляхом заміни кожної СС останнього на її підсхему.

Означення 18. *Моделлю* ТПР (МТПР) відносно ЗП у класі $\mathbb{Z}'(X,\Theta) \subseteq \mathbb{Z}(X,\Theta)$ ($\mathbf{Z}'(X,\Theta) \subseteq \subseteq \mathbf{Z}(X,\Theta)$) будемо називати умови **У** на ПВП у деякому класі СС $\mathbb{Z}''(X,\Theta) \subseteq \subseteq \mathbb{Z}(X,\Theta)$ ($\mathbb{Z}'(X,\Theta) \subseteq \mathbb{Z}(X,\Theta)$), що є звуженням класу $\mathbb{Z}'(X,\Theta)$ (*Пр*$\mathbf{Z}'(X,\Theta)$), які задають множину всіх рішень ЗП для СС класу $\mathbb{Z}'(X,\Theta)$(*Пр*$\mathbf{Z}'(X,\Theta)$), тобто рішення ЗП для СС класу $\mathbb{Z}''(X,\Theta)(\mathbb{Z}'(X,\Theta))$ представляє сукупність значень ПВП для СС класу $\mathbb{Z}''(X,\Theta)(\mathbb{Z}'(X,\Theta))$, що задовольняють умовам **У**, та його можна, і притому єдиним чином, продовжити до рішення ЗП для будь-якого прообразу зазначеної СС класу $\mathbb{Z}''(X,\Theta)(\mathbb{Z}'(X,\Theta))$ відносно звуження. Таку МТПР позначатимемо [**У** для $\mathbb{Z}''(X,\Theta)$] в $\mathbb{Z}'(X,\Theta)$([**У** для $\mathbb{Z}'(X,\Theta)$] в $\mathbf{Z}(X,\Theta)$).

МТПР [**У** для K$'$] в K, де K$' := = \mathbb{Z}''(X,\Theta) \subseteq \mathbb{Z}(X,\Theta)$, K$:= \mathbb{Z}'(X,\Theta) \subseteq \subseteq \mathbb{Z}(X,\Theta)$ (K$' := \mathbb{Z}'(X,\Theta) \subseteq \mathbb{Z}(X,\Theta)$, K$:= = \mathbf{Z}'(X,\Theta) \subseteq \mathbf{Z}(X,\Theta)$) називається параметричною або $\Omega(X) \times J(\Theta)$-МТПР, якщо існують сімейство відношень переваг $\Omega(X)$ на X, множина $J(\Theta)$ та розбиття множини $\Pi(\mathrm{K}')$ — всіх ПВП у класі K$'$, які задовольняють умовам **У**, виду $\{\Pi_{J'} : J' \in J'(\Theta) \subseteq J(\Theta), \Pi_J \subseteq \subseteq \Pi(\mathrm{K}'), J \in J(\Theta)\}$ на підкласи, таке, що будь-який підклас цього розбиття представляє рішення ЗП в класі K$'$, звужену на $\Omega(X)$. Таким чином МС (Z, J), де $Z \in$ K, $J \in J(\Theta)$, задає рішення ЗП для $\Omega(X) \times J(\Theta)$-МТПР [**У** для K$'$] в K.

При цьому $\Omega(X) \times J(\Theta)$-МТПР [**У** для K$'$] в K будемо називати незвідною, якщо $J'(\Theta) = J(\Theta)$, а при $\mathtt{card}\,\Omega(X) = 1 - J(\Theta)$-МТПР і позначати $J(\Theta)$-МТПР [**У** для K$'$] в K.

Тоді *моделлю системи прийняття рішення* (МСПР) для ЗП у класі СС $\mathbb{Z}'(X,\Theta) \subseteq \mathbb{Z}(X,\Theta)$ ($\mathbf{Z}'(X,\Theta) \subseteq \mathbf{Z}(X,\Theta)$) буде $\Omega(X) \times J(\Theta)$-МТПР [**У** для $\mathbb{Z}''(X,\Theta)$] в $\mathbb{Z}'(X,\Theta)$ ($J(\Theta)$-МТПР [**У** для $\mathbb{Z}'(X,\Theta)$] в $\mathbf{Z}'(X,\Theta)$) та називати незвідною, якщо її МТПР незвідна.

МСПР при випадковості прийняття значень параметра, що не спостерігається, що описується статистичними закономірностями, пропонується в роботі [1]. Досліджувана там МС, що називається «загальною задачою рішення», характеризується тим, що її клас СС являє собою всі схеми з множиною наслідків, що є множиною дійсних чисел, $\mathbb{R}$ з лінійним порядком незростання ($\leqslant$) в якості відношення переваг ТПР та функцією доходу g, що є довільною функцією, для якої $\inf\{g(\theta,u) : \theta \in \in \Theta, u \in U\} > -\infty$ і при всякому $u \in U$ $\sup\{g(\theta,u) : \theta \in \Theta\} < +\infty$. Доходи там інтерпретуються як втрати, а під ЗП розуміється задача вибору відношення переваг на рішеннях, що задається функцією шкідливості. При цьому $P(\Theta)$-МТПР задається трьома природніми умовами (монотонність, невід'ємна лінійність та статистична форма принципа гарантованого результату), в яких переваги на рішеннях задаються функцією корисності, що називається там критерієм. При цьому для вказаної моделі отриманий явний вигляд цього критерія.

Виявляється, що для задання рішень ЗП в умовах ризику обмежиться параметричним МС, тобто матричними СС, доповненими інформаційними частинами у вигляді стохастичного розподілу на Θ, не звужуючи класа ситуацій, *в загальному випадку* неможливо. Оскільки для таких ЗП визначенню 12 представлення МС, де P — стохастичний розподіл, відповідає визначення представлення випадкового відображення «в широкому розумінні» (див. [4]). Однак теорема 4 про існування вказаного представлення для довільної непараметричної МС в умовах ризику, тобто для МС з інформаційними частинами, що є стохастичними розподілами, рівносильна твердженню теореми Колмогорова про узгоджені розподіли (див. приклад [4–6], «яке не можна довести, не виходячи за рамки теорії міри» [5] (доведення теореми Колмогорова в [4], використовує повноту і сепарабельність метричного простору X, а в [5; 6] — його локальну компактність).

Моделювання СПР у непараметричній формі, при випадковості значення неспостережного параметра θ, що описується стохастичними розподілу, здійснює, наприклад, відома теорія очікуваної корисності фон Неймана — Моргенштерна [7] (див. також [8, с. 20–23; 9, с. 92–124; 10, с. 211–223]). А в параметричній формі — відома теорія суб'єктивної очікуваної корисності Севіджа [11] (див. також [8, с. 23–28; 10, с. 298–328]). В згаданих моделях для стохастичних розподілів переваги на рішеннях визначаються так званим «байєсівським критерієм».

Висновки

Для отримання дослідником МСПР необхідна формалізація СПР.

Формалізація ситуації досягається шляхом визначення двох форм СС і МС. При цьому введене розширене поняття статистичної закономірності, що інтерпретується в МС як узагальнена суб'єктивна ймовірність значень неспостережуваного параметра, і розвинений математичний апарат СС і МС дозволяють, зокрема, досліджуючи СПР, не зменшуючи загальності, вважати її СЗВ в умовах невизначеності параметричною. Останнє твердження не є справедливим, загалом кажучи, для СЗВ в умовах ризику.

Формалізувати ТПР відносно рішення їм ЗП можна з допомогою визначення ПВП для ЗП, що узагальнює ПВК, введеного для ЗВ відношення переваг на рішеннях, що визначається функцією шкідливості.

Введене визначення МТПР здійснює формалізацію принципів оптимальності адекватно до правил вибору рішення.

Нарешті, МСПР визначається шляхом параметризації МТПР для цієї СПР, що забезпечує повноту формалізму МТПР. При цьому параметрична МТПР зводить невизначеність в СС до невизначеності вибору її МС, який визначається узагальненою суб'єктивною ймовірністю значень неспостережуваного параметра.

Список літератури

1. Иваненко В. И. Проблема неопределенности в задачах принятия решений / В. И. Иваненко, В. А. Лабковский. — К. : Наукова думка, 1990. — 136 с.
2. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М. : Наука, 1981. — 542 с.
3. Келли Д. Л. Общая топология / Дж. Л. Келли. — М. : Наука, 1968. — 384 с.
4. Гихман И. И. Введение в теорию случайных процессов / И. И. Гихман, А. В. Скороход. — М. : Наука, 1965. — 656 с.
5. Ламперти Д. Вероятность / Дж. Ламперти. — М. : Наука, 1973. — 184 с.
6. Хеннекен П. Л. Теория вероятностей и некоторые ее приложения / П. Л. Хеннекен, А. Тортра. — М. : Наука, 1974. — 472 с.
7. Нейман Дж. фон. Теория игр и экономическое поведение / Дж. фон Нейман, О. Моргенштерн. — М. : Наука, 1970. — 798 с.
8. Вилкас Э. Й. Оптимальность в играх и решениях / Э. Й. Вилкас. — М. : Наука, 1990. — 255 с.
9. Гроот М. де. Оптимальные статистические решения / М. де Гроот. — М. : Мир, 1974. — 496 с.
10. Фишберн П. Теория полезности для принятия решений / П. Фишберн. — М. : Наука, 1978. — 352 с.
11. Savage L. J. The foundations of statistics / L. J. Savage. — New York : John Wiley and Sons, 1954. — 264 p.

V. Michalevich

TO MODELING OF SOLUTION MAKING SYSTEM

It's shown, that modeling the taking solution system quite possible not to deminish omneity to limit the parametric situations. In case when the state of the situation is not recognized (what is described by statistic regularity opposite to the situation, when the stateis made by stohastic dicision, what arrives to narration of making-solution system classes).

Keywords: statistical conformity, parametric situation.

Матеріал надійшов 05.12.2016